韓國數學敎育學會誌〈數學敎育〉
1978. 12, Vol. XVII No. 1

Journal of the Korea Society of Mathematical Education
Dec. 1978. XVII No. 1

被覆定理의 證明에 對하여

林 東 日

Ⅰ. 序 論

Borel-Lebesgue 의 被覆定理는 點集合論에서 有界集合에 對하여 大端히 有用한 定理이다. 이 定理를 Centor 의 共通點 定理와 細胞分割定理를 利用하여 證明하여 보고 또 Lindelöf 의 被覆定理를 利用하여 歸納法으로 證明하려고 한다.

Ⅱ. 本 論

一般으로 $Y \subseteq \cup_{\alpha \epsilon M} X_\alpha$ 일때 Y 는 $\{x_\alpha | _{\alpha \epsilon} M\}$ 에 依하여 被覆된다고 한다. "有界한 閉集合 F 가 $\{G_\alpha | \alpha \epsilon M\}$ 에 依하여 被覆되었을때 F 는 有限個의 G_α 로 된 集合에 依하여 이것을 被覆할 수 있다."란 內容이 Borel-Lebesgue 의 被覆定理인데 이 定理의 證明을 몇가지 측면에서 考察하여 보자.

有界한 閉集合 F 가 有限被覆可能이 안된다고 假定하자. 먼저 $\varepsilon_v > 0$, $\varepsilon_v > \varepsilon_{v+1}$ $(v=1, 2, \cdots\cdots)$, $\lim\limits_{v} \varepsilon_v = 0$ 되는 수열 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_v, \cdots$를 定한다. 다음에 F 를 ε_1 細胞分割하면 ε_1 細胞안에는 有限被覆可能아닌 것이 적어도 하나 있게 된다. 왜냐하면 ε_1 細胞의 어느것도 모두 有限被覆可能이라면 ε_1 細胞의 數가 有限個이므로 F 自身이 有限被覆이 되어 假定에 모순이 되기 때문이다. 有限被覆可能이 아닌 것중의 하나를 F_1 으로 表示하고 F_1 에 ε_2 細胞分割을 하면 ε_2 細胞안에는 有限被覆 可能아닌 것이 반드시 存在할 것이므로 그 하나를 F_2 라 하고 그 F_2 에 ε_3 細胞分割한다. 이를 반복하여 F_{v-1} 이 얻어 졌을때 이것에 ε_v 細胞分割하여서 그 ε_v 細胞中에서 有限被覆可能 아닌 것의 하나를 F_v 로 表示하면

$$F \supseteq F, \supseteq F_2 \supseteq \cdots \supseteq F_v \supseteq F_{v+1} \supseteq \cdots$$

되는 點集合列 $F_1, F_2, \cdots, F_v, \cdots$가 얻어 진다.

또 F_1 이 閉集合이 되도록 ε_1 細胞分割을 하였다고 하고, 같은 方法으로 $F_2, F_3, \cdots, F_v$ 가 모두 閉集合이라 할때 F_v 의 直徑은 ε_v 보다 작게된다. 여기서 F, F_1 이 有界 閉集合이므로 Centor 의 共通點定理에 依하여(Centor 의 공통점 정리 : $F_1, F_2 \cdots F_v$ 가 어느 것이나 空 아닌 閉集合으로서 $F_1 \supseteq F_2 \supseteq \cdots \supseteq F_v \supseteq F_{v+1} \supseteq \cdots$일때 F_1 이 有限하면 $\cap_{v=1}^{\infty} F \neq \phi$) $\cap_{v=1}^{\infty} F_v$ 은 空集合이 아니므로 $a \in \cap_{v=1}^{\infty} F_v$ 되는 點 a 를 잡으면. $a \in F$ 되므로 a 는 $G_\alpha (\alpha \in M)$ 中의 적어도 하나에 包含되어야 한다. 그 하나를 G_{α_0} 라 하면 G_{α_0} 는 開集合이므로 $V(a:\rho) \subseteq G_{\alpha 0}$ 되는 a 의 球近傍 $V(a:\rho)$가 存在한다. $\lim\limits_{v} \varepsilon_v = 0$ 에 依하여 $\varepsilon_{\alpha_0} < \rho$ 되는 V_0 를 고르면 $F_{\alpha 0}$ 의 直徑은 ρ 보다 작고, 또 $a \in F_{v_0}$ 되므로

$$F_{v_0} \subseteq V(a:\rho) \subseteq G_{\alpha_0}$$

이것은 F_{v_0} 가 단 하나의 G_{α_0} 로 被覆된다는 것을 뜻하고 F_{v_0} 가 有限被覆可能이 아니라는 假定에 矛盾이므로 Borel-Lebesgue 의 被覆定理는 成立하게 된다. 다음에는 Lindelöf 의 被覆定理를 證明하고 이 定理를 利用하여 Borel-Lebesgue 의 被覆定理를 證明하려고 한다.

Lindelöf 의 被覆定理

任意의 點集合 A 가 開集合으로 된 集合 $\{G_\alpha | \alpha \in M\}$ 으로서 被覆되어 있을 때, G_α 의 集合中에서 可付番 部分集合 $\{G_{\alpha_1}, G_{\alpha_2}, \cdots,$

G_{α_ν}}을 골라서 이 部分集合으로 A를 被覆할 수 있다.

卽이 定理를 簡單히 表示하면

$A \subseteq \cup_{\alpha\in M} G_\alpha$ 라면 $A \subseteq \cup_{\alpha=1}^{\infty} G_{\nu_\alpha}$ 되는 $G_{\alpha_1}, G_{\alpha_2}, \cdots, G_{\alpha_\nu}, \cdots$를 고를 수 있음을 뜻한다.

(證明)

x를 A의 任意의 點이라 하면 假定에 依하여 $x \in G_\alpha$ 되는 G_α가 반드시 存在할 것이다. 그러한 G_α는 x의 近傍이므로 G_α의 部分集合으로 x의 近傍이 되는 有理球近傍이 存在할 것이다.

A의 各點 x에 對하여 이와같은 有理球 近傍을 定하면, 이들의 有理球近傍·全部의 集合은 可付番集合이 된다. 이들의 有理球 近傍을 $U_1, U_2, \cdots, U_\nu, \cdots$로 表示하면, A의 어떤 點이든 $U_\nu(v=1,2,\cdots)$의 어느 것인가를 품어질 것이므로 $A \subseteq \cup_{v=1}^{\infty} U_v$가 된다.

따라서 U_v를 部分集合으로 갖는 G_α의 하나를 G_{α_v}로 表示한다면 $A \subseteq \cup_{v=1}^{\infty} G_{\alpha_v}$ 되는 $G_{v_1}, G_{v_2}, \cdots, G_{\alpha_\nu}, \cdots$를 고를 수 있다.

다음에는 Lindelöf의 被覆定理를 利用하여 Borel-Lebesgue의 被覆定理를 歸納法으로 證明하려고 한다.

(證明)

F가 有界인 閉集合으로써 $F \subseteq \cup_{\alpha\in M} G_\alpha$ 일때 F가 有限被覆可能이 안된다고 假定하자. Lindelöf의 被覆定理에 依하여 $F \subseteq \cup_{v=1}^{\infty} G_{\alpha_v}$ 되는 $G_{\alpha_1}, G_{\alpha_2}, \cdots, G_{\alpha_\nu}, \cdots$가 存在하지만, 假定에 依하여 k가 어떤 自然數이든지 $F \subseteq \cup_{v=1}^{k} G_{a^v}$. $(k=1,2,)$되는 數는 存在하지 않는다.

卽.

$F_k = F - U_{v=1}^{k} G_{ad} = F \cap (U_{v=1}^{k} G_{\alpha v})_c (k=1,2,\cdots\cdots)$로 놓으면

$F_k \fallingdotseq \phi (k=1,2,\cdots)$

그리고 F는 有界閉集合이고, $(\cup_{v=1}^{k} G_{Q\alpha})^c$는 開集合의 餘集合이므로 閉集合이다. 따라서 F_k는 어느 것이나 閉集合이고

$$F_1 \supseteq F_2 \supseteq \cdots \supseteq F_k \supseteq F_{k+1} \supseteq \cdots$$

故로 Cantor의 共通點定理에 依하여

$$\cap_{k=1}^{\infty} F_k = \cap_{k=1}^{\infty}[F \cup (\cup_{v=1}^{k} G_{\alpha v})_c]$$
$$= F \cap [\cap_{k=1}^{\infty} (\cup_{v=1}^{k} G_{\alpha v})_c]$$
$$= F \cap [\cup_{k=1}^{\infty} (\cup_{k=1}^{\infty} G_{\alpha v})]_c$$
$$= F \cap (\cup_{v=1}^{\infty} G_{\alpha v})_c$$
$$= \phi$$

이것은 $F \subseteq \cup_{v=1}^{\infty} G_{\alpha v}$와 모순된 結果이다.

따라서 F는 有限被覆可能이다.

Borel-Lebesgue의 被覆定理의 逆定理

$F \subseteq \cup_{\alpha\in M} G_\alpha$ 되는 $G_\alpha(\alpha \in M)$가 어떠한 開集合이던지 언제나 그중에서 有限個 $G_{\alpha_1}, G_{\alpha_2}, \cdots, G_{\alpha k}$를 골라서 $F \subseteq U_{v=1}^{k} G_{\alpha v}$ 되게 할수 있을때, F는 반드시 有界閉集合이 된다.

(證明)

먼저 F… 閉集合임을 證明하자.

이것은 $x \in F$ 일때, $x \in F^a$(F의 閉包)임을 밝히면 된다. $y \in F$라 하면 $x \fallingdotseq y$이므로 $V, (x) \cap V^{(y)} = \phi$ 되는 x의 近傍 $V_{y(x)}$와 近傍 $V_{(y)}$가 存在한다. 그러므로 F의 各點 y에 對해서 이와같은 $V_{(y)}$와 $V_{(x)}$를 取하면 $F \subseteq \cup_{y\in F} V_{(y)}$이다. 이때 $V_{(y)}$는 처음부터 開近傍으로 取하였다고 하면 $V_{(y)}$中에서 有限個

$$V_{(y(1))},\ V_{(y(2))}, \cdots, V_{(y(k))}.$$

를 골라서 $F \subseteq \cup_{v=1}^{k} V_{(y(v))}$ 되게 하고, x의 近傍 $\cap_{v=1}^{g} V_{y(v)}(x)$를 $V_{(x)}$로 表示한다면 분명히 $V_{(x)} \cap F = \phi$이다. 卽 $x \in F^a$

다음에 F가 有界임을 밝히기 爲하여 a를 F의 한 定點이라 하고

$$G_v = V(a:v)(v=1,2,\cdots)$$

로 놓으면 $F \subseteq R^n = \cup_{v=1}^{\infty} G_v$

이므로 $G_v(v=1,2,\cdots)$ 中에서 有限個 $G_{v_1}, G_{v_2}, \cdots, G_{v=k}$를 골라서 $F \subseteq \cup_{v=1}^{k} G_{vk}$ 되게 할 수 있다.

그리하여 $v_1 \le v_2 \le \cdots \le v_k$ 된다고 하면 $F \subseteq G_{vk} = V(a:V_k)$이다. 이것은 F의 直徑이 $V(a:V_k)$의 直徑 2_{vk}보다 크지 않음을 나타내므로 F는 有界이다.

〈定理〉

F는 有限한 閉集合이고 $F_\alpha(\alpha \in M)$은 어느 것이나 閉集合이며, $F_\alpha \subseteq F$라 할때 F_α

($\alpha \in M$) 中에서 有限個 $F_{\alpha_1}, F_{k_2}, \cdots, F_{\alpha_k}$를 어떻게 取하여도 $\cap_{\nu=1}^{k} F_{\alpha_\nu} \neq \phi$ 된다면 $\cap_{\alpha \in M} F_\alpha \neq \phi$ 이다.

(證明)

$\cap_{\alpha \in M} F_\alpha$ 가 空集合이 된다고 假定하여 보자.

$\cup_{\alpha \in M} F_\alpha^c = (\cap_{\alpha \in M} F_\alpha)^c = \phi^c = R^n$

되므로 $F \subseteq \cup_{\alpha \in M} F_\alpha^c$ 될 것은 分明하다. 여기서 F_α^c는 開集合이므로 F_α^c 中에서 有限個 $F^c_{\alpha_1}$, $F^c_{\alpha_2}, \cdots F^c_{\alpha_k}$를 取하여 $F \subseteq \cup_{\nu=1}^{k} F^c_{\alpha_\nu}$ 되게 할 수 있다. 그리고 $F_{\alpha_1} \subseteq F$ 되므로 $F^c \subseteq F_{\alpha_1} \subseteq \cup_{\nu=1}^{k} F^c_{\alpha_\nu}$

卽 $\cap_{\nu=1}^{k} F_{\alpha_\nu} = (\cup_{\nu=1}^{k} F^c_{\alpha_\nu})^c = \phi$

이것은 假定과 矛盾이므로 $\cap_{\alpha \in M} \neq \phi$ 이 된다.

〈定理〉

A가 有界한 無限集合이라면, 반드시 A의 集積點이 存在한다.

(證明)

만일, A가 集積點을 갖지 않는다고 假定하자. $x \in A$ 라고 하면 x가 A의 集積點이 될 수 없는 것은 分明하다.

卽 $x \in (A - \{x\})^a$ 되므로 $V_{(x)} \cap (A - \{x\}) = \phi$ 되는 x의 開近傍 $V_{(x)}$가 있게 된다. A의 各點 x에 對하여 이러한 開近傍 $V_{(x)}$를 잡는다면 $A \subseteq \cup_{x \in A} V_{(x)}$ 그리고 $A^a = \phi$ 되므로 $A^a \subseteq A$ 되어, 이것은 有限集合 A가 閉集合이 됨을 表示한다. 그러므로 Borel-Lebesgue의 被覆定理에 依하여

$A \subseteq \cup_{\nu=1}^{k} V_{(x_\nu)}$ 되는 $V_{(x_1)}, \cdots, V_{(x_k)}$ 가 存在할 것이다.

그러나 $V(x_\nu)$안에는 x_ν 以外에는 A의 點이 들어 있지 않다. 따라서 A는 $x_1, x_2, \cdots, x_k$ 인 有限個의 點만으로 된 有限集合이 되므로 假定에 矛盾이 된다. 따라서 A가 有界한 集限集合이면 반드시 A의 集積點이 存在한다.

Ⅲ. 結 論

Borel-Lebesgue의 被覆定理를 證明하기 爲하여 Centor의 共通點定理와 細胞分割定理를 利用하면 證明이 解決된다. 그러나 Lindelöf의 被覆定理를 利用하면 이의 證明은 더욱 簡單하고 容易하였으며, Borel-Lebesgue의 被覆定理의 逆定理가 成立함을 證明할 수 있었다. 卽 $F \subseteq \cup_{\alpha \in M} G_\alpha$ 되는 $G_\alpha(\alpha \in M)$가 어떠한 開集合이든지 언제나 그가운데서 有限個 G_{α_1}, $G_{\alpha_2}, \cdots, G_{\alpha_k}$를 取하여 $F \subseteq \cup_{\nu=1}^{k} G_{\alpha_\nu}$ 되게 할 수 있는 境遇에는 F는 반드시 有界閉集合이 됨을 밝혔다.

또한 Borel-Lebesgue의 被覆定理를 利用하여 有界한 無限集合은 반드시 集積點이 存在함을 明白히 밝힐 수 있었다.

參 考 文 獻

1. 集合論 Ⅰ, Ⅱ 垣稻武著 共立社.
2. 集合과 位相, 龜各後司著 朝倉書店
3. S. Lipschutz. *Set Theory & Qelated Topics*, Schaum's Qutline Senies.
4. Dahgundje *Topology*, Allyn and Bacon, Inc.
5. S. Lipsehutz *General Topology*, Schaum's Outline Series.