韓國數學敎育學會誌〈數學敎育〉
1978. 12 Vol. XVII No. 1

Journal of the Korea Society of Mathematical Education
Dec. 1978. Vol. XVII No. 1

π에 대한 현대적 고찰

沈 敬 輔

주어진 원의 면적과 같은 면적을 가지는 정사각형을 구할 수 있는가? 만일 이 문제를 자와 콤파스만을 사용하는 고전적인 작도 문제로 생각한다면 이 문제의 해가 불가능하다는 것을 알고 있다. 그러나 이같은 결론은 1000여년동안이나 계산과 실험 및 추론을 시도한 후 그리스인들에 의하여 내려진 제한 조건이었다. 그런데, 이 문제는 다음과 같은 새로운 관점에서 생각하기에 이르렀다. 즉 비례상수 π에 촛점을 맞추는 일이다. 이 π는 자와 콤파스만으로 얻을 수 없는 결과를 수학에서 해결할 수 있다.

우리는 수학사를 통하여 원의 면적을 구하려는 인간의 성공적인 시도와 실패에 관한 기록을 잘 볼 수 있다. 여기서는 문제의 해법, 수학적인 추측, 추론동기, 실제 계산, 역사적 배경 등을 다루면서 결론을 내리기로 한다.

우리가 다루고 있는 기하적 도형 중에서 원은 가장 흥미로운 도형으로 볼 수 있다. 한편 정사각형은 면적에 대한 개념을 시각적으로 잘 기타내 주는 도형이다. 당분간 길이나 영역에 관한 개념은 미루어 놓자 수학사의 기록을 보면 초기에는 원의 면적에 대한 해는 모두 그와 관련된 정사각형의 면적으로 표현되고 있다.

그후에 원의 면적과 같은 면적을 갖는 정사각형으로의 변환이 전개되었으며 치환에 대한 개념은 이미 초기에서부터 비롯되었다.

수학에서는 "원의 제곱(squaring the circle)"이라는 표현보다는 "원적법(quadrature of the circle)이라는 표현을 더 자주 사용한다. "quadrature"라는 단어는 라틴어에서 파생된 것으로 그 본래의 뜻은 그 면적을 불변으로 하는 정사각형으로 만드는 것을 뜻한다. 즉 그리스인들은 이 문제를 최초로 공식화하였으며, 우리가 이 점을 인정한다면 우리는 지금 "원의 사변형화(the fetragonization of the circle)"이라고 말할지도 모른다. 그후 quadrature는 면적을 구한다는 뜻으로 사용되어졌다. 예를 들면, 문제 "quadrature of the parabora"에 관한 아르키메데스의 해는 주어진 포물선의 선분과 연관을 맺는 삼각형들로 표현되어져 있다. 그리고 초기의 계산문제에 있어서 주어진 곡선 아래에 있는 면적을 구하는 문제는 quadrature에 관한 문제로 취급되어졌다.

π를 원둘레의 지름에 대한 비례상수로 정의하면 그 원의 면적 A는 $A=\pi r^2$이고 이 표현은 원의 면적의 공식 중에서 가장 널리 통용되고 있다. π에 근사치로서 좀더 정확하고 좋은 값을 구하는 문제는 원의 제곱문제로 포함된다. 고로, 이제 우리가 살펴볼 문제 연구들의 해에서 직접적으로 π의 개념에 도입되지 않았더라도 π의 근사치를 유도해 볼 수 있겠다.

비례상수로서 π가 상징화되어 널리 쓰이게 된 것은 아마도 1700년대 초기 이후 Euler의 영향을 크게 받은 후일 것이다. 계산기를 사용하면 계산이 좀 더 용이해지므로 이 점에서 이 부분이 좀 더 현대적이라고 생각할지도 모

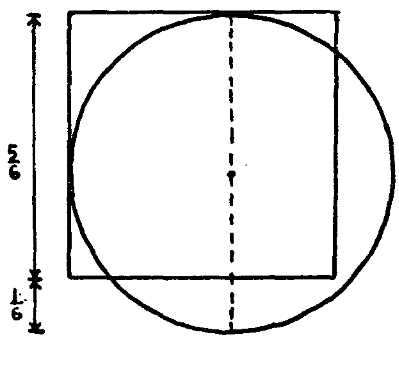
르겠다.

물론 자와 콤파스만으로 작도가 불능하다는 것은 π가 대수적 정수가 아니라는 증명으로 해결을 보았다. π가 초월수라는 증명은 본 논문의 요지에서 벗어나므로 제외한다. 몇 년동안 수학자들은 원의 구적법이 불가능하다고 생각해 왔으나, 1775년에 the French Royal Academy는 공식적으로 그 해가 존재하지 않을 것이라고 발표했다. 1882년 당시 31세의 수학자 Ferdinand Lindeman은 최초로 π가 초월수임을 증명하였다. Munich 대학에서 발견된 Lindemann의 흉상에는 "π"가 새겨져 있으며 원과 정사각형이 테두리에 새겨져 있다.

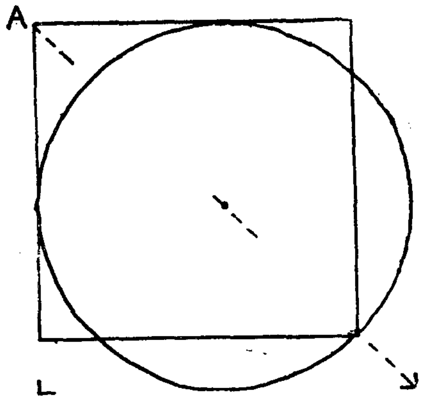
문제연구 1

기원전 1750년 이전에 이집트인들은 다음과 같은 방법으로 원의 면적을 구하였다. 즉 원의 지름의 분할을 한변으로 하는 정사각형의 면적을 그 원의 면적과 비교하였다. 이 방법은 자세한 관찰과 경험에 토대를 둔 것이므로, 우리도 그들의 결과를 얻을 수 있는지 살펴보기로 한다.

이집트인들이 최초에 어떻게 규정을 세웠는지는 잘 알 수 없으나, 그들이 지름의 분할을 다룬 방법은 매우 독특하다(참고 NCTM 1969 p 123).



〈그림 1〉



〈그림 2〉

이집트인들은 $\frac{2}{3}$와 $\frac{3}{4}$, 그리고 그 분자가 1인 지름의 분할만을 허용하였다. 고로 그들은 지름의 $\frac{5}{6}$대신 지름의 $\frac{1}{6}$을 취급하고 그 나머지 부분을 다루었다. 이런 상황은 그림 1에서 살펴볼 수 있다. 지름의 나머지 $\frac{5}{6}$분할을 한변으로 하는 정사각형의 면적은 원의 면적보다 적음을 분명히 살펴볼 수 있다.

1) 그림 1과 같은 경우 그림을 지름의 $\frac{1}{7}$ $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{9}$, $\frac{1}{10}$분할인 경우에 각각 그려보기로 하자. A를 고정점으로 취하고 각 경우에 한 변을 주어진 원에 접하도록 정사각형을 취한다. 각 경우의 정사각형의 면적은 원에 면적에 근사치가 될 것인가?

2) 원의 반지름이 1인 경우, 원의 면적은 π와 같다. (계산기 이용)

1)에서 한 방법으로 여러가지 경우의 정사각형의 면적을 구해 보면 그 값은 π의 근사치가 될 것인가? 이 근사치들은 1)에서 얻은 결과와 비교해 보시요.

3) 때로는 독특한 관점으로 살펴봄으로써 문제를 해결할 수 있다. 즉, 그림 1에서 A의 대각선 방향에 꼭지점을 원 위에 갖는 정사각형을 생각해 보기로 하자. (그림 2)

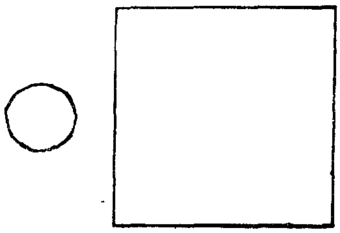
이 사각형의 면적을 구해 보시요.

이 값은 위에서 얻은 근사치보다 더 정확한 근사치로 볼 수 있겠는가?

문제연구 2

기원전 1700년 이전에 만들어진 메소포타미아인들이 거주지였서 발견된 점토서판에서 우리는 바빌로니아인들이 원의 면적을 어떻게 구하려 하였는지 살펴볼 수 있다. 그들도 역시 원과 정사각형과의 관계를 이용하였다. 즉 정사각형의 한 변이 그 원의 둘레와 같은 경우를 연구하였다. 원의 둘레에 착안하는 것은 별로 이상한 일이 아니었다.

나무의 단면적이나 원형인 연못의 면적 등은 그 좋은 예가 된다.



〈그림 3〉

1) 그림 3은 원의 둘레를 한 변으로 하는 정사각형을 그린 것이다. 이 정사각형의 면적은 원의 면적을 몇 배까지 포함할 수 있겠는가? (정사각형 속에 원을 그리는 경우 그 사이사이에 생기는 부분의 면적을 고려하여야 한다)

2) 원의 반지름이 10인 경우 정사각형의 면적과 원의 면적을 구하고 원의 면적의 몇 배인가를 구하시오. (계산기 이용)

3) 바빌로니아인들은 $C^2/12$를 원의 면적을 구하는 공식으로 사용하였다. 그들이 π라는 개념을 이용하지는 않았지만, 원의 면적의 공식 $C^2/12$와 우리가 알고 있는 공식 $2\pi r$, πr^2을 이용하면 바빌로니아인들이 사용한 π의 근사치를 구할 수가 있다. 그 값을 유도해 보아라.

문제연구 3

원의 면적이 한변의 길이가 그 원과 밀접한 연관을 갖는 직각삼각형의 면적과 같다면 아마도 놀랄 것이다.

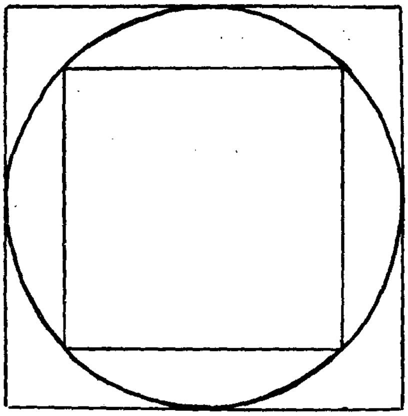
자와 콤파스를 사용해서 직각삼각형은 같은 면적을 갖는 정사각형으로 변환시킬 수 있으므로 앞의 주장은 원의 제곱 문제가 풀릴 수 있는 듯이 보이기도 한다. 문제 3은 바로 이 문제와 연관됨을 볼 수 있다. 그리스 수학자 아르키메데스(약 기원전 240년)는 삼각형과의 관계를 정확히 서술하고 증명하였다. 우리가 이미 알고 있는 원의 공식에 간단한 치환을 하면 같은 관계식을 얻을 수 있다. 밑변 a, 높이 b인 직각삼각형의 면적은 $\frac{1}{2}ab$이다. 공식 $A=\pi r^2$에서 이 원과 적당한 관계를 갖는 a와 b를 결정하면 $A=\frac{1}{2}ab$의 형태로 변화시킬 수 있다. 자와 콤파스만으로 원의 제곱을 작도하는 것이 불가능한가 연구해 보자.

문제연구 4

수학에서는 두 가지 값의 평균값이 유용하게 쓰인다. 여러 값의 항들을 산술적으로 합하는 경우, 초항과 말항의 평균값을 이용하면 도움이 된다.

약 1840년경 독일의 함부르그에 살던 한 아마 한 아마츄어 수학자는 원의 면적을 구하는데 이 생각을 응용했다. 그림 4에서 보는 바와 같이, 주어진 원에 내접 정사각형과 외접 정사각형의 면적의 평균값을 원의 면적의 값으로 생각했다. 더우기 그는 a번 펼치면 외접 사각형을 겹칠 수 있고, b번 펼치면 내접 사각형을 겹칠 수 있는 삼각형이 존재함을 보여 주었다. 이 두 수 a와 b의 평균값을 구하여 그 값에 위에서 존재하는 삼각형의 면적을 곱하면, 두 사각형의 면적의 평균값을 구할 수 있고, 바로 그 값은 원의 면적이 된다.

1) 먼저 그 독일인의 억측을 생각해 보자.



〈그림 4〉

그는 과연 원의 면적과 비교하여 정확하고 타당성이 있는 결과를 얻을 수 있었는가? 혹은 너무 크거나 작은 값이 아닌가?

2) 그림을 잘 살펴서 독일인이 생각한 삼각형을 찾아보고 a와 b의 값 그리고 그 평균값 $\frac{a+b}{2}$를 결정하여라.

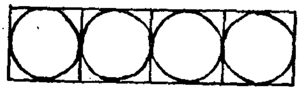
3) 이 방법에는 π에 대응하는 근사치가 얼마인가?

문제연구 5

문제를 풀기 위하여 때로는 지름을 한변으로 하는 외접 정사각형을 생각하곤 하였다. 1878년 New York 신문의 한 관계자는 다음과 같은 글을 실었다. "주어진 원의 면적은 그 원의 지름을 한 변으로 하는 네개의 정사각형의 면적에서 네개의 원의 면적을 뺀 값과 같다" 즉, 원의 면적과 정사각형의 면적의 차이 네배와 같다.

1) "만일 원의 면적을 모른다면 어떻게 정사각형의 면적과의 차를 구할 수 있겠는가"라는 의문점이 생길 수 있다. 그러나 가정을 잘 살펴보면 정사각형의 면적의 적당한 배값은 원의 면적의 적당한 배값과 같아짐을 알 수 있다. 그 관계식을 구해 보아라.

2) 그림 5에서 정사각형의 면적의 네배는



〈그림 5〉

원의 면적의 다섯배와 같음을 알 수 있다. 이 관계식에서 π에 대응하는 근사치를 구해 보아라.

문제연구 6

T. K. W. 라는 사람은 원의 제곱을 다음처럼 작도하였다. 즉 주어진 원에서 O와 A를 잇는 지름을 그린다. 점 O에서 이 지름에 수직인 반지름을 올려주고, 이 선분의 중점을 M이라 한다. 점 A와 M을 잇는 선분을 연장시켜서 원과의 교점을 B라 한다. 선분 AB를 한변으로 하는 정사각형은 주어진 원과 같은 면적을 갖는다.

1) 이 작도법에서 π에 대응하는 근사치를 구하여라.

문제연구 7

우리의 마지막 문제는 Euclid의 기하론으로 부터 연구하는 것이 적당하겠다. 흔히들 전통적인 중등교과과정에서는 기하론의 기초를 Euclid의 기하론에 의거한다고 말하고 있다(물론 행렬, 변환, 벡터와 같은 현대적 방법을 통하여 연구하는 기하론을 제외한다). Euclid 기하론은 원, 현, 접선, 내각 등의 많은 성질을 포함한다. π와 원둘레, 그 면적 등의 공식은 어떻게 다루고 있는가?

Euclid의 기하론에는 원둘레의 반지름에 관한 비값은 명시되지 않았으며 원면적에 대한 공식도 명시되지 않았다. 그러나 정리는 "두 원의 면적의 비는 각 지름의 제곱의 비와 같다. 즉 $A_1/A_2=d_1^2/d_2^2$이므로 $A_1/d_1^2=A_2/dd_2^2$, $A=\delta\cdot d^2$이 성립한다. 그러므로 외접 사각형을 원의 면적과 연관을 시킨 것은 그 기원과 역사가 깊음을 알 수 있다.

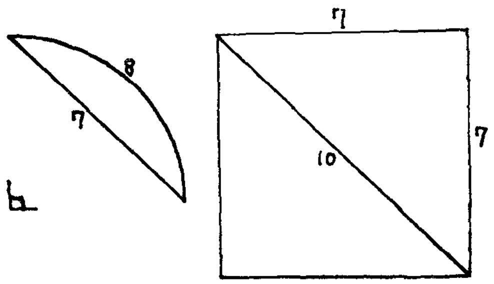
1) 위에 명시한 관계식의 관점에서 살펴 보

면 서로 다른 비값은 그 원의 기하와 관련이 있음을 알 수 있다. (그러나 π는 수학에서 원이 아닌 다른 부분에도 작용하는 경우가 많았으므로, 위의 사항은 오래동안 계속되지 못하였다. 만일 위에서 행한 방법으로 한다면, δ의 적당한 근사치는 얼마이며 원둘레의 공식은 어떠한 형태로 얻을 수 있는가?)

문제 풀이 및 해석

문제 연구 1. 우리는 Rhind Papyrus로부터 고대 이집트인들의 수학에 관한 지식을 살펴볼 수 있다. Rhind Papyrus에서는 지름의 $\frac{1}{9}$분할을 제외한 나머지 $\frac{8}{9}$분할을 한변으로 하는 정사각형을 생각하였다.

이 방법은 그들이 사용한 일반적인 규칙은 아니지만, 원의 면적을 구하는 다섯개의 문제에서 네가지 경우를 이집트인들은 $\frac{1}{9}$분할을 이용하였으며, 나머지 한 경우에는 $\frac{1}{10}$분할을 이용하였다. $\frac{1}{9}$분할인 경우, 정사각형의 면적 A는 다음과 같다. 즉 $A=\left(\frac{8}{9}d\right)^2=\left(\frac{8}{9}\cdot 2r\right)^2=\frac{256}{81}r^2$ 그러므로 이집트인들은 π의 값으로써 256/81을 즉 3.1605를 사용하였다. $\frac{1}{7}$, $\frac{1}{8}$. $\frac{1}{9}$, $\frac{1}{10}$인 경우에는 각각 2.9388, 3.0625, 3.1605, 3.2400을 얻는다. 그러므로 이집트인들은 지름의 분할로서 생각할 수 있는 가장 적절한 값을 π로 사용하였다.



〈그림 6〉

3)의 경우, 그림 6를 살펴보기로 하자. $a^2+a^2=1$이므로, 만들어진 정사각형의 한 변은 그 길이가 $1+\frac{\sqrt{2}}{2}$이다. 이 값은 π의 값으로서 2.9138을 대응시켜 준다. 그러므로 적절한 근사치가 아니다.

문제연구 2. $d=10$이면 $C=31.416$, $A=78.54$ 그리고 C^2/A는 12.5보다 크다.

그들은 다음과 같은 이유에서 13대신 12를 C^2/A로 사용하였다. 즉 그들은 60진법을 사용하고 있었으므로 12로 나누는 것은 0.5를 곱하는 것과 같았기 때문이다.

$C^2/12=\pi r^2$으로 놓고 C 대신 $2\pi r\pi$를 치환시키면 바빌로니아인들이 π로서 3을 사용했음을 알 수 있다. 그들은 또 $3\frac{1}{8}$을 π로 사용했음을 알 수 있다.

그들은 또 $3\frac{1}{8}$을 π로 사용했음을 알 수 있으나 자세한 경위는 점토서판으로서만 살펴보는 데는 문제점이 있다(참고 NCTM 1969, p. 149).

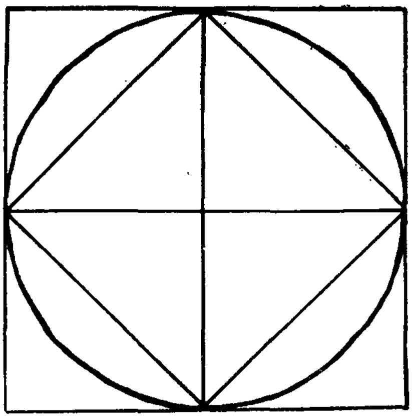
문제연구 3. $A=\pi r^2=\frac{1}{2}\cdot 2\pi r\cdot r=\frac{1}{2}\cdot C\cdot r$

그러므로 원의 면적은 두 변의 길이가 각각 r과 C인 직사각형의 면적과 같다. 그러나 원둘레 C를 자와 콤파스로 작도 불가능하다는 점이다. 역사적으로 이 문제는 "원의 길이 구하기(rectification of circle)"이라고 알려져 있다.

각 변이 a와 b의 직사각형이 주어진 경우 $\frac{a}{2}$와 b의 기하평균 S는 다음을 만족한다. 즉 $\frac{a/2}{S}=\frac{S}{b}$에서 $S^2=\frac{ab}{2}$이다.

문제연구 4. 그림 7과 같이 두 정사각형의 위치를 잡아주면 찾고자 하는 삼각형은 바로 내접 사각형의 대각선을 이어줌으로써 생기는 합동인 삼각형들 중의 하나임을 알 수 있다.

이 삼각형은 외접 사각형은 8번, 내접 사



〈그림 7〉

각형은 4번씩 각각 펼쳐서 겹칠 수 있다. 8과 4의 평균값은 6이고, 이 삼각형의 면적은 $\frac{r^2}{2}$이므로 원의 면적의 근사치로서 $3r^2$이 되고, π의 근사치로서 3을 택하게 된다. 이 값은 π의 근사치로서 매우 실제적인 값을 얻을 수 있었다. 이 방법은 5% 이내의 오차를 갖는다.

문제연구 5. 지름이 2인 원의 면적은 π이다. 이 문제의 가정에 의하면 사각형의 면적의 4제곱은 16이고 $\frac{5}{16}$는 π의 근사치이다. 즉 3.2를 얻는다.

3.2는 π의 근사치로서 널리 쓰이고 있으며 만족할만한 값이기도 하다(문제연구 6 참조). 이 값은 2% 이내의 오차를 갖는다.

문제연구 6. 원점을 중심으로 하는 단위원의 방정식은 $x^2+y^2=1$이다. 점 A와 M을 지나는 직선의 방정식은 $x+2y=1$이고, B의 좌표는 $\left(-\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$이다.

이로부터 π의 근사치로서 3.2를 얻을 수 있으며, 쉬운 방법으로 기하학적인 해도 얻을 수 있다.

문제연구 7. $\delta \cdot d^2=\pi \cdot r^2$, $\delta=\pi/4$이므로 $\delta=0.78539$, 또는 11/14이다(이에 대응하는 π는 22/7이다). Archimedes가 지은 "Measurement of the Circle"(Health p. 91)에는 다음과 같은 단 세개의 정리가 기록되어 있다 처음 정리는 삼각 관계에 관한 것으로서 P. S. 3에 주어졌다. 둘째 정리는 "원의 면적과 그 지름을 한 변으로 하는 정사각형의 면적의 비는 11대 14이다"이다. 마지막 정리는 다음과 같다. 즉 "원의 둘레와 반지름의 비는 $3\frac{10}{71}$보다 크고 $3\frac{1}{7}$보다는 작다"이다. 그러므로 우리가 종종 사용하는 근사치 $3\frac{1}{7}$은 π에 관한 Archimedian의 근사치로 알려져 있다. 여러분은 위에서 얻는 여러가지 근사치를 순환소수 $3.\overline{142857}$과 비교해 보기 바란다.