

타이어의 形狀力學에 對해서

日本 브릴지스톤 타이어 (株) 吉 村 信 哉

1. 序

近年의 自動車産業의 發達과 軌를 같이해서 空氣入 타이어도 發達해왔다.

然이나 타이어라고하는 一見 單純한 構造體에 要求되는 機能은 多種多樣하며 타이어처럼 單一部品으로 許多한 機能을 遂行하는 部品은 달리없다고 해도 좋을 程度이며 타이어의 發達과 함께 形狀이나 各種 性能에 關한 理論이나 實驗이 重疊되어오고 있기는해도 아직 充分하게 理解되었다고는 할수없는 現狀이다. 타이어의 力學을 연구했을경우 于先 問題로 되는것은 內部에 高壓의 空氣를 넣었을때의 安定된 形狀과 그때의 코오드 張力, 各部의 變形, 歪 등의 強度的 問題이다.

타이어의 形狀에 關한 理論이 登場한 것은 타이어 그 自體의 出現보다도 相當히 세롭다.

Wood¹⁾는 그의 著書속에서 바이어스 타이어의 形狀 理論의 基礎가 되는 판타그래프變形에 對해서 言及하고있으나 相當히 初期의 것이다. 바이어스 타이어에 對해서 本格的인 形狀理論은 Hofferberth²⁾에 依해서 提出되었다. 그의 網目理論은 現在의 바이어스타이어 設計의 基礎를 이룩하고 있다. 그後 Lauterbach, Ames⁴⁾는 컴퓨터를 使用해서 網目理論에 있어서의 平衡形狀을 實際로 求하고 또 Walston, Ames⁵⁾는 特別한 코오드파스의 타이어에 對해서 理論을 展開, Day Gehman⁷⁾은 一般의 코오드파스의 경우의 式을 유도하고 있다. 타이어에는 고무와 코오드로부터 이룩되는 典型的인 複合材料이지만 카아카스나 벨트를 고무와 코오드의 複合體라고 보고서 剛性を 評價^{8~12)} 하고 그것을 使用해서 平衡形狀을 求하는 膜理論¹³⁾¹⁴⁾, 또는 屈曲剛性까지 考慮한 殼理論^{15~17)} 등도 提出되어 있으며 그것은 타이어를 보다 現實에 가까운 모델에 依해서 理解하려고하는 努力의 結果이다

最近의 컴퓨터의 發達は 從來의 手計算으로는 不可能 했던 膨大한 數值計算을 可能케 했다. 이에 따라서 컴퓨터處理를 前提로한 構造解析의 手法이 發達해왔으나 그중에도 有限 要素法 (Finite Element Met-

hod略稱 FEM)은 代表的인 것으로서 오늘날에서는 宇宙工學, 土木建築을 爲始하여 넓은分野에서 活用되고 있다.

타이어의 解析에 FEM을 應用하려고하는 試圖는 比較的 일찍부터 行해진것 같다. Zorowski¹⁸⁾는 타이어가 回轉하여 遠心力이 作用할 경우의 平衡形狀을 薄肉殼의 FEM解析으로 求하고 또 Ridha¹⁹⁾는 물드形狀과 加硫後에 收縮이 作用했을 때의 타이어 形狀의 關係를 FEM으로 求하고있다.

타이어에 內壓이 걸렸을 경우 或은 回轉에 依해서 遠心力이 作用할 경우에는 타이어는 回轉對稱體로서 取扱되므로 比較的 簡單하나 타이어가 荷重을 받아서 接地變形했을 경우의 形狀, 코오드張力 등의 解析은 宏壯히 複雜하게 되며 몇個人가의 試圖^{20~22)}는 行해지고 있기는 해도 아직 滿足할만한 段階까지는 相當히 멀다. FEM을 活用하는것도 3次元의 取扱으로되는것, 變形이 큰것 등이 넉크로되어 充分한 解析은 行해져 있지 않다.

2. 膜 理 論

타이어는 內部的 空氣를 保持하기 爲한 壓力容器라고 할수가 있겠다. 內壓을 加했을 경우에 타이어 內部에 如何한 應力이 發生하며 安定形狀은 어떻게 되는가 그것이 第一의 問題이다. 이때 카아카스를 屈曲시켜 剛성이 없는 膜이라고 보고서 取扱하는것이 膜理論 (Membrane Theory)이다.²³⁾

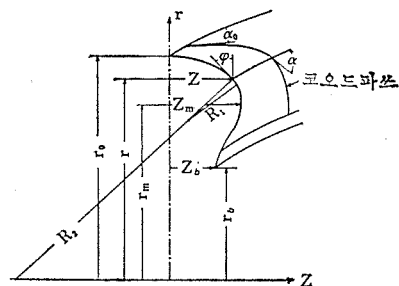


圖 1 타이어의 座標와 記號 매기는法

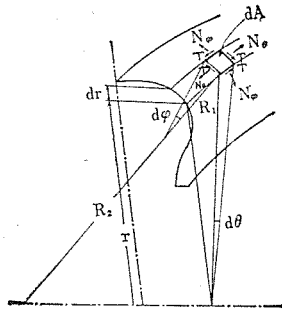


圖 2 타이어에 작용하는 힘

트럭타이어等相當한 두께가있는 카아카스를 膜이라고 假定하는 것은 相當히 勇敢한 假定이지만 充分 쓸모 있는 結果가 얻어져서 膜理論이 바이어스타이어設計의 基礎를 이룩하고 있다.

타이어를 薄膜回轉體로 하고 그 座標系 및 記號를 圖 1과 같이 한다.

이 薄膜回轉體에 圖 2에 表示하는 것처럼 微少部分 dA 를 잡고 이 dA 에 작용하는 힘의 均衡을 考察한다.

膜面에서 單位 길이當 周方面에 작용하는 힘을 N_θ , 徑方向에 작용하는 힘을 N_φ , 剪斷力을 T 로 하면 平衡方程式은

$$2T + r \frac{\partial T}{\partial r} - \frac{1}{\cos \varphi} - \frac{\partial N_\theta}{\partial \theta} + \frac{F_\theta r}{\cos \varphi} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial(N_\varphi r)}{\partial r} - N_\theta - \frac{1}{\cos \varphi} \frac{\partial T}{\partial \theta} + \frac{F_\varphi r}{\cos \varphi} = 0 \quad (2)$$

$$\frac{N_\varphi}{R_1} + \frac{N_\theta}{R_2} = F_n \quad (3)$$

으로 부여된다¹³⁾ (F_θ , F_φ , F_n)은 膜要素 dA 에 작용하는 外力의 成分을 表示한다.

타이어에 內壓만이 작용하고 있을 경우에는

$$\begin{aligned} F_\theta &= 0 \\ F_\varphi &= 0 \\ F_n &= P \end{aligned} \quad (4)$$

으로되며 또한 타이어가 回轉對稱體이며 內壓이 같은 모양으로 걸리는 것으로부터 剪斷力 T 도 0으로 된다.

따라서 式(1)~(3)은 簡單하게 되어서

$$\frac{d(N_\varphi r)}{dr} - N_\theta = 0 \quad (5)$$

$$\frac{N_\varphi}{R_1} + \frac{N_\theta}{R_2} = P \quad (6)$$

한편 微分幾何의 關係로부터 主曲率半徑 R_1 , R_2 에 關해서 다음의 式이 成立한다.

$$\frac{1}{R_1} = \cos \varphi \frac{d\varphi}{dr} \quad (7)$$

$$R_2 = \frac{r}{\sin \varphi} \quad (8)$$

式(7), (8)을 式(6)에 代入해서 N_θ 를 求해서 그것을 式(5)에 넣어서 收合하면

$$\frac{d(N_\varphi r \sin \varphi)}{dr} = rP \quad (9)$$

積分해서

$$N_\varphi r \sin \varphi = \frac{r^2}{2} P + C \quad (10)$$

積分定數 C 는 타이어의 最大幅位置의 半徑 r_m 에서 $\varphi=0$ 으로 되는 것으로부터

$$C = -\frac{r_m^2}{2} P$$

로 求해지므로 結局

$$N_\varphi = \frac{r^2 - r_m^2}{2 \sin \varphi} P \quad (11)$$

N_θ 는 式(11)을 式(6)에 代入 함으로써

$$N_\theta = \frac{2R_1 r \sin \varphi - (r^2 - r_m^2) P}{2R_1 \sin^2 \varphi} \quad (12)$$

로 된다. 式(11), (12)가 膜力 N_θ , N_φ 를 부여하는 式이다. 타이어의 平衡斷面形狀을 求하는 데는 式(6), (11)을 式(7)에 代入하여

$$\cos \varphi \frac{d\varphi}{dr} = \frac{2r \sin \varphi}{r^2 - r_m^2} - \frac{\sin \varphi}{r} \left(\frac{N_\theta}{N_\varphi} \right) \quad (13)$$

여기서

$$\frac{N_\theta}{N_\varphi} = \beta \quad (14)$$

로 두고서 整頓하면

$$\cot \varphi \frac{d\varphi}{dr} = \frac{2r}{r^2 - r_m^2} - \frac{\beta}{r} \quad (15)$$

式(15)를 積分하여 境界條件으로서 r_0 에서 $\varphi=\pi/2$ 로 됨을 考慮하면

$$\sin \varphi = \frac{r^2 - r_m^2}{r_0^2 - r_m^2} \exp\left(\int_r^{r_0} \frac{\beta}{r} dr\right) \quad (16)$$

여기서 또 다시

$$G = r^2 - r_m^2 \quad (17)$$

$$G_0 = r_0^2 - r_m^2 \quad (18)$$

로 두고 또

$$\sin \varphi = -\frac{z'}{(1+z'^2)^{1/2}} \quad (19)$$

이란 것을 考慮하면

$$z' = \frac{dz}{dr} = -\frac{GH}{\sqrt{G_0^2 - G^2 H^2}} \quad (20)$$

로 된다. 여기에

$$H = \exp\left(\int_r^{r_0} \frac{\beta}{r} dr\right) \quad (21)$$

이다. 式(20)을 積分해서

$$z = \int_r^{r_0} \frac{GH}{\sqrt{G_0^2 - G^2 H^2}} dr \quad (22)$$

式(22)가 타이어의 斷面形狀을 부여하는 式이다.

主曲率半徑 R_1 은 式(7)을 使用해서

$$R_1 = \frac{(r_0^2 - r_m^2)r}{2r^2 - (r^2 - r_m^2)\beta} \cdot \frac{1}{H} \quad (23)$$

式(22), (23)은 周徑方向의 膜力の 比 β 를 파라메터

어로 해서 부여되어 있다. β 는 膜의 剛性이나 코오드 角度에 依해서 決定되어 오므로 β 를 r 의 關數로서 부여 할수가 있으면 平衡形狀이 얻어지게끔 된다.

3. 網目理論

前章에서의 β 를 具體的으로 求하기爲한 하나의 方法은 膜力 N_θ, N_ϕ 는 모두 카아카스의 코오드가 擔當하고 고무는 힘을 負擔하지 않는다고 假定할수가 있다.

即 타이어의 카아카스를 恰似 코오드만으로되는 網처럼 생각하려고 하는 셈이다.

이假定에서는 理論을 網目理論 (Netting Theory)이라고 부르고 있다.

圖 3에 表示하는것처럼 周方向과 $\pm\alpha$ 의 角을 이루는 兩쌍의 프라이층을 考慮 相隣하는 코오드가 만드는 菱形을 描집어내어 그一邊을 d , 코오드張力を t 로하면 圖 3의 關係로부터

$$N_\theta = \frac{2t \cos \alpha}{2d \sin \alpha} = \frac{t}{d} \cot \alpha \quad (24)$$

$$N_\phi = \frac{2t \sin \alpha}{2d \cos \alpha} = \frac{t}{d} \tan \alpha \quad (25)$$

이로부터

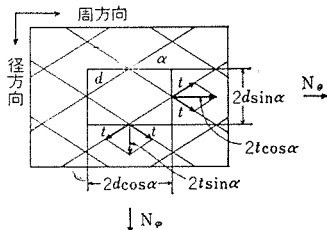


圖 3 網目理論에서의 周, 徑方向의 힘의關係

$$\beta = \frac{N_\theta}{N_\phi} = \cot^2 \alpha \quad (26)$$

이 얻어진다. 式 (26)은 網目理論에서의 基本式이다. 實際로 平衡斷面形狀을 求하는데는 式(26) 만으로서는 아직 不充分하며 코오드파스가 如何히 되어있는가 α 를 r 의 關數로서 부여하지 않으면 안된다.

3.1 바이어스타이어의 平衡形狀

普通바이어스 타이어는 圖 4에 表示 하는바와 같이 圓筒型의 成形드럼에 비스듬하게 裁斷한 프라이層을 交互로 퍼서붙여서 成形하며 타이어의 形으로 팽창시켜서 加硫된다.

팽창 될때에 코오드 角度가 變化하나 이 코오드 角度變化의 原理로서 上下의 프라이層에 미끄럼이 없이 相隣하는 프라이層의 코오드로 만드는 菱形은 所謂 판타그래프와 같은 變形을 한다고하는 原理를 導入한다. 이 판타그래프 變形의 假定은 코오드入 고무製品의 變形을 取扱할 경우에 종종 採用되고 있는 原理로서 嚴密하게는 成立 안된다고 하더라도 實用的으로 相當히 좋은

近似를 부여하는 假定이다. 이렇게 假定하면 菱形의 周方向의 길이는 半徑에 比例하게끔 되어 簡單한 考察로부터

$$\frac{\cos \alpha}{r} = \frac{\cos \alpha_0}{r_0} = \text{const} \quad (27)$$

이 얻어진다. 여기에 α_0 는 크라운 센터에서의 코오드 角度이다. 이 式의 關係는 cosine 法則이라고 불리어지고 있다.

式(27)을 式(26)에 代入하여 式(21)에 依해서 H 를 計算하면

$$H = \frac{\sqrt{r_0^2 - r^2 \cos^2 \alpha_0}}{r_0 \sin \alpha_0} \quad (28)$$

따라서 平衡形狀을 부여하는 式은 式(22)로부터

$$z = \int_r^{r_0} \frac{G(r_0^2 - r^2 \cos^2 \alpha_0)^{1/2}}{\sqrt{G_0^2 r_0^2 \sin^2 \alpha_0 - G^2 (r_0^2 - r^2 \cos^2 \alpha_0)}} dr \quad (29)$$

한편 曲率 半徑은

$$R_1 = \frac{G_0 r_0 \sin \alpha_0 (r_0^2 - r^2 \cos^2 \alpha_0)^{1/2}}{r \{2r_0^2 - (3r^2 - r_m^2) \cos^2 \alpha_0\}} \quad (30)$$

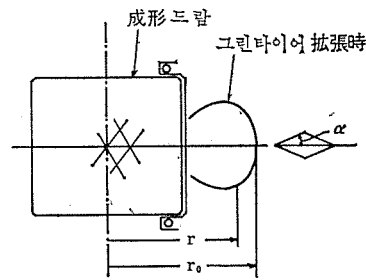


圖 4 바이어스타이어의 成型

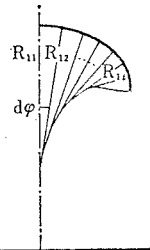


圖 5 平衡形狀의 圖式解法

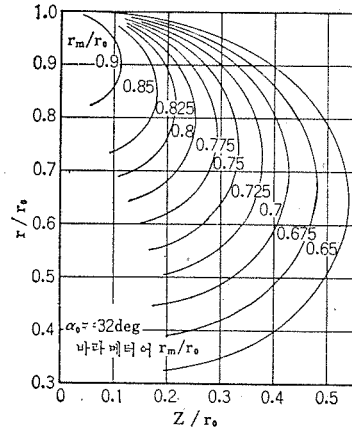


圖 6 바이어스타이어의 노모그램의 一例²⁾

$\alpha_0 = 32 \text{ deg}$ 으로 r_m/r_0 를 파라메타아 한것

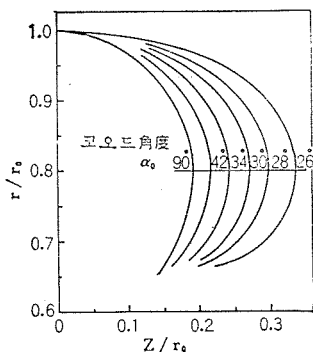


圖 7 코오드角度를 變更했을 때의 바이어스타이어의 平衡形狀(0.8($r_m/r_0 = \text{一定}^{13}$))

이로써 바이어스타이어의 平衡形狀의 式이 얻어졌다 式(29), (30)은 바이어스타이어의 形狀設計의 基礎로되는 式이다. 式(29)는 r 에 關한 超橢圓積分으로 되어있으므로 解析의으로는 積分이 안되며 數值積分을 行하지 않으면 안된다. 或은 式(30)으로부터 R_1 은 各點에서 求해지므로 圖 5처럼 圖式解法으로 求할수도 있다.

式(29)는 左右兩便을 r_0 로 除하여서 基準化하면 無次元化되므로 r_m/r_0 , α_0 를 파라메타아로 해서 曲線群이 얻어져 이것을 노무그람이라고부르고 있다.

圖 6을 α_0 를 一定으로하고 r_m/r_0 를 파라메타아로 했을 경우의 一例이다.

式(29)에서 注目해야 할것은 平衡形狀이 코오드의 幾何學的 配置만으로 決定되며 코오드의 物理的 性質에 無關係하다는 것이며 그 意味에서 自然形狀이라고 부를 때도있다. cosine 法則에 따르면 圖 7에 表示하는 것처럼 코오드角度 α_0 가 작아짐에따라서 偏平한 形狀이 얻어진다. 타이어 斷面에서의 코오드角度는 式(27)로부터 알수있는 바와같이 크라운센터로부터 비이드부에 갈에 따라서 높아져간다.

타이어 斷面에 따라서 크라운센터로부터 비이드部까지의 페리헤리 길이 s 는

$$s = \int_{r_b}^{r_0} \sqrt{1 + \left(\frac{dz}{dr}\right)^2} dr = \int_{r_b}^{r_0} \frac{G_0 r_0 \sin \alpha_0}{\sqrt{G_0^2 r_0^2 \sin^2 \alpha_0 - G^2 (r_0^2 - r^2 \cos^2 \alpha_0)}} dr \quad (31)$$

또 코오드의 길이 S 는

$$S = \int_{r_b}^{r_0} \frac{1}{\sin \alpha} \sqrt{1 + \left(\frac{dz}{dr}\right)^2} dr = \int_{r_b}^{r_0} \frac{G_0 r_0 \sin \alpha_0}{\sin \alpha \sqrt{G_0^2 r_0^2 \sin^2 \alpha_0 - G^2 (r_0^2 - r^2 \cos^2 \alpha_0)}} dr \quad (32)$$

로 表示된다. 코오드에 걸리는 張力 t 는 式(11), (25)를 使用해서

$$t = \frac{(r_0^2 - r_m^2) \sin \alpha_0}{2rnw \sin^3 \alpha} \cdot P \quad (33)$$

으로 된다. 여기에 n 은 코오드를 박은數, w 는 프라이 枚數이다. 코오드張力은 式(33)으로부터 알수있는 바와 같이 크라운센터에서 最大로 되며 그값은

$$t_0 = \frac{(r_0^2 - r_m^2)}{2r_0 n_0 w \sin^3 \alpha_0} P \quad (34)$$

이다.

3.2 코오드가 伸張할 境遇

3.1 에서는 코오드의 伸張을 考慮치 않고서 純粹하게 幾何學的 關係로부터 斷面形狀을 求했다. 實際는 膜의 張力에 依해서 코오드는 伸張한다.

코오드의 伸張을 考慮하면 式(27)의 cosine 法則은 式(35)와 같이 修正된다.

$$\frac{\cos \alpha}{r(1+\epsilon)} = \frac{\cos \alpha_0}{r_0(1+\epsilon_0)} = \text{const} \quad (35)$$

여기서 ϵ 는 코오드의 伸張歪이다. 式(33)에 表示하는 바와같이 코오드張力은 r 에 依해서 相異하기 때문에 ϵ 는 r 의 關數로 되며 따라서 嚴密하게 形狀을 求하려고 하면 r 의 各點에서 ϵ 를 求해서 補正하는 反復計算을 必要로하나 簡便하게는 平均의 코오드張力으로부터 平均의 코오드歪 $\bar{\epsilon}$ 를 求해 그것에 依해서 修正하면 좋다.

3.3 其他의 平衡形狀

3.1 에 있어서 판타그래프 變形을 假定해서 平衡形狀을 導出했으나 판타그래프 變形 以外의 原理를 導入하면 그에따른 平衡形狀이 얻어진다.

3.3.1 코오드박은數 一定 cosine 法則의 平衡形狀에선 비이드部 및 크라운센터 附近에서 판타그래프의 菱形이 乍부러져서 코오드를 박은數가 높아진다. 實際의 코오드는 假想的인 線은 아니고서 어느굽이를 갖고 있으므로 그直徑을 D 로하면 $n_{max} = 1/D$ 以上으로 박은數를 올리는 것은 物理的으로 不可能하다. 그곳까지 안가드라도 菱形이 相當히 乍부러져오면 속의고무가 妨害를 해서 變形을 妨害하려고 한다. 여기서부터 變形에 際해서 코오드의 박은數가 不變이라고하는 原理가 생겨나온다. 이原理는 式으로쓰면 cosine 法則에 對應하는 것으로서

$$r \sin \alpha = \text{const} \quad (36)$$

으로 된다. Leibe, Schaffers²⁴)는 實際로 바이어스타이어의 코오드角度를 調査하여 판타그래프 變形보다도 오히려 박은數 一定으로 變形해있다고 말하고 있다. 平衡形狀은 式(36)을 使用해서 H 를 計算하여 式(22)에 代入하면 좋다.

3.3.2 等傾線形狀(Loxodromic Line) 變形에 際하여 프라이層間에 스틱프가 일어나서 變形後에도 코오드角

도가 변화안한다고 생覺하면 等傾線形狀이 얻어진다. 이境遇에는 周方向과 코오드가 이룩하는 角이 一定하므로

$$\alpha = \alpha_0 = \text{const} \quad (37)$$

가 基本式으로 된다.

3.3.3 測地線形狀 (Geodestic Line) 曲面上에 따라서 2點을 最短거리로 連結하는 線을 測地線이라고하나 타이어의 한便의 비이드上的 一點으로부터 他方의 비이드上的 一點까지 코오드가 測地線의 라인을 따른다고 하는것이 이경우의 原理이다. cosine 則에서의 코오드 파스는 測地線으로는 되어 있지않다. 따라서 프라이間에 相互作用이 없으며 고무에 依한 剪斷力도 發生하지 않고 自由로이 코오드가 움직일수가 있으면 充分內壓이 높은 경우에 코오드가 測地線 파스를 取하는 것이 에너지적으로 보아도 安定이다. 測地線으로 되는 條件은⁵⁾⁶⁾

$$r \cos \alpha = \text{const} \quad (38)$$

로 부여 된다. 形狀을 부여하는 식은

$$z = \int_r^r \frac{G \sin \alpha_0}{\sqrt{G^2 \sin^2 \alpha - G^2 \sin^2 \alpha_0}} dr \quad (39)$$

로 되나, 코오드角度는 cosine 則의 경우와는 反對로 비이드側에 감에따라져 작아진다.

3.3.4 라디알形狀 (Radial path) cosine 則의 特別한 경우로서 코오드角度가 90°로된 경우인데 이것은 또 測地線形狀, 等傾線形狀의 特別한 경우라고 볼수도 있다. 3.1의 各式에서 $\alpha_0 = 90^\circ$ 로 하면 以下の 各式이 나오게 된다.

$$\text{形狀} : z = \int_r^r \frac{r^2 - r_m^2}{\sqrt{(r_0^2 - r_m^2)^2 - (r^2 - r_m^2)^2}} dr \quad (40)$$

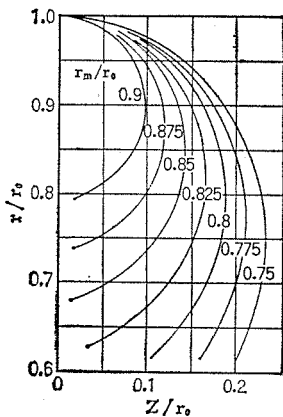


圖 8 라디알타이어의 노모그램의 一例¹³⁾

$$\text{曲率半徑} : R_1 = \frac{r_0^2 - r_m^2}{2r} \quad (41)$$

$$\text{코오드張力} : t = \frac{r_0^2 - r_m^2}{2r_0^2 w} \cdot P = \text{const} \quad (42)$$

라디알의 平衡形狀은 圖 8에 表示하는 것처럼 相當

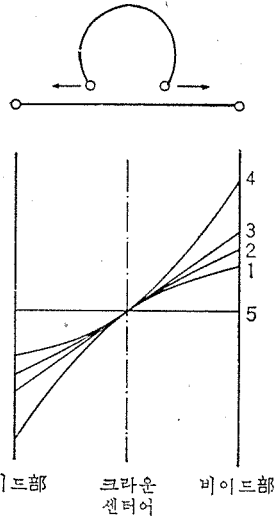


圖 9 各種平衡形狀의 코오드파스

1. 판타크래프變形 $\cos \alpha / r = \text{const}$
2. 박은 數一定 $r \sin \alpha = \text{const}$
3. 等傾線 $\alpha = \text{const}$
4. 測地線 $ar \cos \alpha = \text{const}$
5. 라디알 $\alpha = 90^\circ$

히 세로 길게 된다. 이대로의 形狀의 타이어는 存在하지 않으나 라디알 타이어의 사이드部에 對해서는 이 생각이 適用된다. 以上 몇 개인가의 平衡形狀에 對해서 말했으나 各形狀의 코오드파스를 模式的으로 比較하면 圖 9와 같이 된다. 타이어를 圓筒型드럼上에서 成型할 경우에는 거의 cosine 則에 따르나 部分的으로는 박은 數一定 또는 測地線등의 파스를 取하고있다.

4. 積層材의 力學

網目理論에 依해서도 充分히 쓸모있는 結果가 얻어지나 고무의 存在를 完全히 無視하고 있으며 반드시 타이어를 忠實하게 모델化하고 있다고는 말할수가 없다. 좀더 現實에 가까운 모델로서는 카아카스나 브레에카를 고무와 코오드가 冾맞추어진 積層材로서 剛性을 評價하고 이것을 使用해서 形狀을 求하려고하는 것이다.

고무와 코오드로 부터되는 複合材料의 力學的性質은 타이어 其他 고무製品의 基礎問題로서 옛부터 興味를 모아 理論 實驗 兩面으로부터 許多한 研究가 行해져오고 있다^{8~12)}. 最近 FRP等 一般의 複合材料의 發達과 함께 複合材料에 對한 思考方式이나 解析의 取扱도 發達되어 왔으나²⁵⁾ 고무以外的 複合材料의 경우에는 一般的으로 微小變形이 前提로 되므로 고무系 複合材料에 應用할 경우에는 그 限界를 알아둘 必要가 있다.

4.1 코오드·고무補强材의 彈性的 性質

于先 圖 10에 表示하는 바와같이 코오드가 고무속에 平行으로 排列된 一層의 補强材를 생각한다⁹⁾ 코오드가 X軸에 對하여 α의 角度로 排列되어 있는것으로 할것 같으면 x,y方向의 歪를 ε_x, ε_y, 剪斷歪를 γ로 했을 때에 코오드의 歪 ε_c는

$$\epsilon_c = \epsilon_x \cos^2 \alpha + \epsilon_y \sin^2 \alpha + \gamma \sin \alpha \cos \alpha \quad (43)$$

으로 表示된다. 코오드張力은 ε_c에 比例한다고하고 코오드박은數를 n

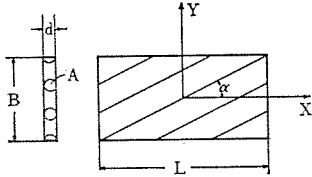


圖 10 一層의 고무-코오드 複合體

코오드 1本當의 모둘러스를 E_c로 두면 코오드에 依한 x,y方向의 力 및 剪斷力은

$$\begin{aligned} F_{cx} &= E_c n (\epsilon_x \cos^2 \alpha + \epsilon_y \sin^2 \alpha + \gamma \sin \alpha \cos \alpha) \cos^2 \alpha \\ F_{cy} &= E_c n (\epsilon_x \cos^2 \alpha + \epsilon_y \sin^2 \alpha + \gamma \sin \alpha \cos \alpha) \sin^2 \alpha \\ F_{cs} &= E_c n (\epsilon_x \cos^2 \alpha + \epsilon_y \sin^2 \alpha + \gamma \sin \alpha \cos \alpha) \sin \alpha \cos \alpha \end{aligned} \quad (44)$$

한便 고무쪽은 普通的 2次元 彈性體의 關係式으로 부터

$$\begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{\sigma_{rx}}{E_r} - \nu \frac{\sigma_{ry}}{E_r} \\ \epsilon_y &= \frac{\sigma_{ry}}{E_r} - \nu \frac{\sigma_{rx}}{E_r} \\ \gamma_r &= \tau_r / G_r \end{aligned} \quad (45)$$

가 成立한다. ν는 고무의 포아손比이다. 式(45)를 反對로 풀어서

$$\begin{aligned} \sigma_{rx} &= \frac{E_r}{1-\nu^2} (\epsilon_x + \nu \epsilon_y) \\ \sigma_{ry} &= \frac{E_r}{1-\nu^2} (\epsilon_y + \nu \epsilon_x) \end{aligned} \quad (46)$$

$$\tau_r = G_r \gamma_r$$

따라서 全體의 應力은 d를 層의 두께로해서

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{E_r}{1-\nu^2} (\epsilon_x + \nu \epsilon_y) + \frac{E_c n}{d} (\epsilon_x \cos^2 \alpha + \epsilon_y \sin^2 \alpha + \gamma \sin \alpha \cos \alpha) \cos^2 \alpha \\ \sigma_y &= \frac{E_r}{1-\nu^2} (\epsilon_y + \nu \epsilon_x) + \frac{E_c n}{d} (\epsilon_x \cos^2 \alpha + \epsilon_y \sin^2 \alpha + \gamma \sin \alpha \cos \alpha) \sin^2 \alpha \end{aligned} \quad (47)$$

$$\tau_r = G_r \gamma_r + \frac{E_c n}{d} (\epsilon_x \cos^2 \alpha + \epsilon_y \sin^2 \alpha + \gamma \sin \alpha \cos \alpha) \sin \alpha \cos \alpha$$

로 된다. 코오드가 對稱으로 드러간 二層 積層材 (圖 11)의 경우에는 式(47)에서 α→-α로 한것을 加해서

平均하면 좋다.

마트릭스表示를 해서

$$\begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma \end{pmatrix} \quad (48)$$

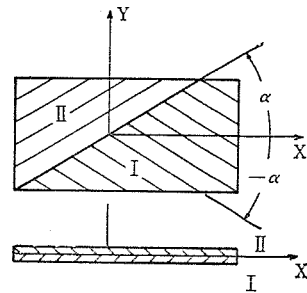


圖 11 二層 고무-코오드 複合積層材

로 하고 고무의 포아손 比를 ν=0.5로 하면 cij는

$$\begin{aligned} c_{11} &= \frac{3}{4} E_r + \frac{n}{d} E_c \cos^4 \alpha \\ c_{12} = c_{21} &= \frac{2}{3} E_r + \frac{n}{d} E_c \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha \\ c_{22} &= \frac{4}{3} E_r + \frac{n}{d} E_c \sin^4 \alpha \\ c_{13} = c_{31} = c_{23} = c_{32} &= 0 \\ c_{33} &= G_r + \frac{n}{d} E_c \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha \end{aligned} \quad (49)$$

로 된다.

普通的 多層積層材의 경우에는 式(49)의 各式의 第 2 項目을 層의 枚數의 折半에 對해서 Σ를 取하면 좋다. 이 積層材의 X 軸方向에 一軸伸張한 경우의 所謂 영그 率은

$$\begin{aligned} E_x &= c_{11} - \frac{c_{12}^2}{c_{22}} \\ &= \frac{4}{3} E_r + \frac{1}{d} \Sigma E_c n \cos^4 \alpha \\ &\quad - \frac{\left(\frac{2}{3} E_r + \frac{1}{d} \Sigma E_c n \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha \right)^2}{\frac{4}{3} E_r + \frac{1}{d} \Sigma E_c n \sin^4 \alpha} \end{aligned} \quad (50)$$

그때의 포아손比는

$$\nu_x = \frac{c_{21}}{c_{22}} = \frac{\frac{2}{3} E_r + \frac{1}{d} \Sigma E_c n \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha}{\frac{4}{3} E_r + \frac{1}{d} \Sigma E_c n \sin^4 \alpha} \quad (51)$$

Tangora²⁰⁾가 提案하고 있는 X軸方向과 Y軸方向의 剛性的 異方性比 (Anisotropic Ratio) ζ은

$$\zeta = \frac{c_{11}}{c_{22}} = \frac{\frac{4}{3} E_r + \frac{1}{d} \Sigma E_c n \cos^4 \alpha}{\frac{4}{3} E_r + \frac{1}{d} \Sigma E_c n \sin^4 \alpha} \quad (52)$$

로 된다.

ζ는 積層材의 異方性的 程度를 表示하는 指數이다. 圖 12에 영그率과 코오드 角度의 關係의 一例를 表示

한다.

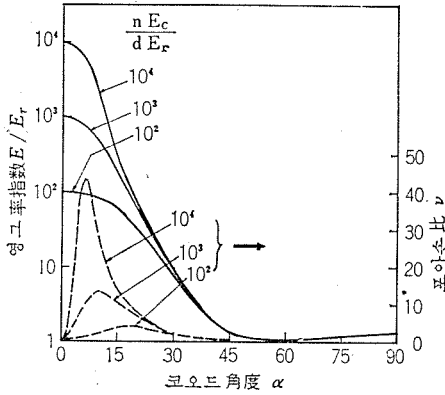


圖 12 二層積層材의 코오드角度와 영그률의關係

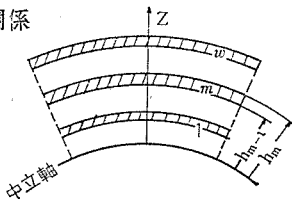


圖 13 積層材의 屈曲

4.2 積層材의 屈曲

타이어의 形狀을 膜理論으로 取扱하는限 膜의 屈曲 剛性은 問題되지 않고 카아카스의 屈曲剛性까지 考慮할 경우는 殼理論(Shell Theory)로 된다. 카아카스의 두께 方向의 歪를 無視하고 Euler-Bernoulli의 假定이 成立하여 屈曲에 依해서 中立軸으로부터의 距離에 比例하는 歪를 發生하는 것으로서 取扱할수 있을때 特別히 薄肉殼理論(Thin Shell Theory)이라고 부른다. 薄肉殼에 作用하는 張力, 屈曲모멘트와 歪, 曲率變化의 사이에는 線型性을 假定해서 マト릭스表示로서

$$\begin{pmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{xx} & A_{xy} & A_{xs} & B_{xx} & B_{xy} & B_{xs} \\ A_{xy} & A_{yy} & A_{ys} & B_{xy} & B_{yy} & B_{ys} \\ A_{xs} & A_{ys} & A_{ss} & B_{xs} & B_{ys} & B_{ss} \\ B_{xx} & B_{xy} & B_{xs} & D_{xx} & D_{xy} & D_{xs} \\ B_{xy} & B_{yy} & B_{ys} & D_{xy} & D_{yy} & D_{ys} \\ B_{xs} & B_{ys} & B_{ss} & D_{xs} & D_{ys} & D_{ss} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \\ \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{pmatrix} \quad (53)$$

의 關係가 있다²⁵⁾

여기에 $\kappa_x, \kappa_y, \kappa_{xy}$ 는 x軸周, y軸周, 비틀의 曲率變化이다. 式(53)은 簡略化해서

$$\begin{pmatrix} N \\ M \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ B & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \epsilon \\ \kappa \end{pmatrix} \quad (54)$$

로 쓸수 있으나 マト릭스의 要素

$$(A_{ij}, B_{ij}, D_{ij}) = (A_{ij}, B_{ij}, D_{ij}) = \sum_{m=1}^w \int_{h_{m-1}}^{h_m} (1, z, z^2) E_{ij}^m dz \quad (55)$$

로 부여된다. 여기에 w는 圖 13에 表示하는바와 같이

積層材의 枚數, h_{m-1} 는 中立軸으로부터 m枚제의 層까지의 거리이다.

マト릭스 $\begin{bmatrix} A & B \\ B & D \end{bmatrix}$ 를 알면 積層材의 力學特性을 알수가 있게되나 Walter¹⁶⁾ 등은 바이어스타이어나 各種의 라디알構造 타이어의 크라운部에 對해서 マト릭스의 具體的 數値를 計算에 依해서 求하고 있다.

5. 積層모델(Laminar Model)

카아카스를 屈曲剛性이 없는것으로 해서 膜理論에서 면서 그 膜의 剛性을 4.에서 말한 積層材로서의 計算으로 求해서 타이어 形狀을 解析하는 方法을 Robecchi¹⁴⁾ 등이 提出했다. 2.에서 周·徑方向의 膜力의 比 $\beta (= N_\theta/N_\varphi)$ 가 徑의 關數로서 부여되면 式(22)로 求解됨을 알았다. 2次元 彈性體의 關係式으로 부터

$$\sigma_\theta = c_{11}\epsilon_\theta + c_{12}\epsilon_\varphi \quad (56)$$

$$\sigma_\varphi = c_{21}\epsilon_\theta + c_{22}\epsilon_\varphi$$

膜의 경우에는 $\sigma_\theta, \sigma_\varphi$ 는 그대로 膜力 N_θ, N_φ 에 對應하는 것으로 생각해서 좋다. 이로부터

$$\begin{aligned} \beta &= \frac{N_\theta}{N_\varphi} = \frac{c_{11}\epsilon_\theta + c_{12}\epsilon_\varphi}{c_{21}\epsilon_\theta + c_{22}\epsilon_\varphi} \\ &= \frac{c_{12}}{c_{22}} + \left(c_{11} - \frac{c_{12}^2}{c_{22}} \right) \frac{\epsilon_\theta}{N_\varphi} \\ &= \nu_\varphi + E_\theta \cdot \frac{\epsilon_\theta}{N_\varphi} \end{aligned} \quad (57)$$

ν_φ, E_θ 는 先般의 積層材의 計算으로 얻어지며 N_φ 는 式(11)로 얻어진다. ϵ_θ 는 變形後의 徑을 r' 로 해서

$$\epsilon_\theta = \frac{r' - r}{r} \quad (58)$$

로 된다.

式(58)로부터 알수있는바와 같이 ϵ_θ 를 얻는데는 內壓을 加하기前의 初期形狀이 必要하게 된다. 따라서 이 모델로서는 初期形狀이 부여되었을 때에 內壓이 加해져서 어떠한 形狀으로 되느냐하는 問題로 된다. 特別한 경우로써 고무의 寄與를 無視할수있을 때에는 $\beta = \cot^2 \alpha$ 로 되며 網目理論으로 還元되어서 初期形狀은 不必要하게 된다. 初期形狀을 부여해서 內壓充전後의 形狀을 求하는데는 式(57), (58) 그것에 2.에서 말한 各式을 짜맞추어서 풀지않으면 안되나 變數가 서로 關係하고 있으므로 反復法으로 求할 必要가 있다.

一般的으로 式(57)의 右邊 第2項은 第1項에 比해서 작으므로 網目理論으로 第1近似를 求해서 以下 反復法으로 近似의 程度를 높일수가 있다. 코오드張力은 平衡形狀이 求해진 後에

$$t = E_c \left\{ \frac{\zeta}{c_{11}} N_\varphi \cos^2 \varphi + \epsilon_\theta (\sin^2 \varphi - \nu_\varphi \cos^2 \varphi) \right\} \quad (59)$$

으로 計算된다. 이 모델로서는 材料의 彈性的 性質과 應力歪의 關係로부터 平衡形狀이 定해지며 그 意味에서 自然形狀과는 相異해 있다.

Robecchi 등은 例題로서 몇箇인가의 타이어에 對해서 풀어서 實測이나 網目理論으로 求한形狀과 比較하고 있으나 바이어스타이어의 境遇에는 3者는 相當히 좋은 近似로 一致하고 있다. 이 모델은 바이어스타이어보다도 오히려 라디알 타이어의 경우에 有效하게 되어 온다.

6. 라디알타이어의 形狀

라디알타이어는 周知하는바와 같이 圖 14에 表示하는 바와같이 카아카스의 코오드가 거의 徑方向($\alpha=90^\circ$)에 드러가 있으며 그것을 크라운部の 強固한 벨트層에서 통테를 끼우게끔 되어 있다. 이때문에 內壓充塡時의 形狀은 本質적으로 타이어 各部의 剛性和 힘의 발란스에 依해서 決定되어 온다.

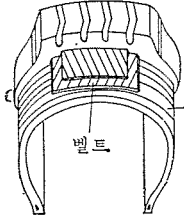


圖 14 라디알타이어의 構造

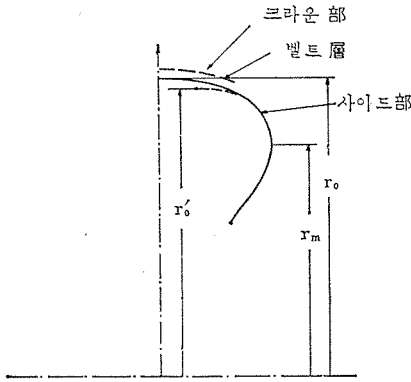


圖 15 라디알타이어의 形狀

라디알타이어의 形狀을 생각할경우 벨트가있는 크라운 카아카스단의 사이드部로 나누어서 생각하는 것이 普通이다.

사이드部에 對해서는 두께도 薄고 3. 3. 4에서 말한 網目理論의 式이 良好한 近似로 成立함이 알려져 있다.

따라서 사이드部에 對해서는 카아카스의 코오드張力은 一定하며 曲率半徑은 回轉軸으로부터의 距離에 反比例한다. 但 式(40)~(42)의 타이어外徑은 實際의 타이어 外徑은 아니고서 크라운部와 形狀이 連續되게끔 補正한 徑으로된다. (圖 15)

Böhm²⁷⁾은 크라운部는 카아카스와 벨트의 2層으로부터 이룩되며 各各 內壓의 一部를 分擔한다고 생각했다

$$p = p \cdot g(s) + p[1 - g(s)] = p_B + p_C \quad (60)$$

$g(s)$ 는 크라운센터로부터 사이드에 向해서의 벨트의 內壓分擔率이다. 이렇게 하면

$$\frac{g(s) \sin^2 \alpha_B}{\cos^2 \alpha_B \cos \varphi + \frac{\sin^2 \alpha_B}{R_1}} + \frac{[1 - g(s)] \sin^2 \alpha_C}{\cos^2 \alpha_C \cos \varphi + \frac{\sin^2 \alpha_C}{R_1}} = \frac{r^2 - r_m^2}{2r \sin \varphi} \quad (61)$$

가 導出되어 $g(s)$ 를 부여하면 形狀을 求할수가 있다.

여기서 添字 B, C는 各各 벨트, 카아카스에 對해서의 것이다. Böhm은 $g(s)$ 에 拋物線分佈를 假定해서 形狀을 求하고 있다(圖 16). 이 方法은 便宜의인 取扱이며 $g(s)$ 에 어떠한 分佈를 부여하느냐에 任意性이 남겨져 있어서 妥當한 形狀을 얻기爲해서는 實驗과의 對應으로서 實効의 $g(s)$ 를 求해줄 必要가 있다.

5. 에서 말한 積層모델은 라디알 構造에도 有效하게 適用된다.

사이드部에 對해서는 實質적으로 $E_\theta = 0$ 로 되므로 網目理論과 同一하게되나 크라운部에 對해서도 벨트, 카아카스 그것이 트렛드코오드도 包含해서 剛性을 評價하여 5. 에서 말한 方法으로 形狀을 求하면 좋다.

Robecchi¹⁴⁾등은 165SR13에 對해서 計算하고 있다. 타이어의 構造는 圖 17과 같으며 카아카스는 레이용 1840d/2의 2프라이, 벨트는레이용 1220d/2의 4프라이 벨트코오드角은 $\pm 16^\circ$ 로 되어있다. 이 構造에 對해서 剛性을 計算하면 表 1과 같이된다. 初期形狀과 內壓充塡時 形狀의 比較는 圖 18과 같다.

그때의 $\beta, \epsilon_\theta/\epsilon_\varphi, N_\varphi$ 는 圖 19에, $\epsilon_\theta, \epsilon_\varphi$ 는 圖 20에 또 實効性定數는 圖 21에 表示하는 바와 같이된다.

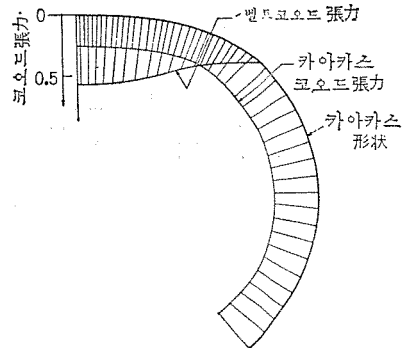


圖 16 라디알타이어의 形狀과 코오드 張力²⁷⁾
벨트內壓 分擔率 $g(s) = 0.815(1 - (s/\epsilon_0)^2)$

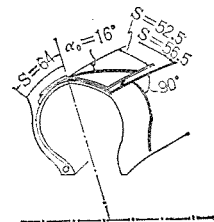


圖 17 165 SR13타이어의 構造¹⁴⁾

카아카스레이용 1840d/2 2p
벨트 레이용 1220d/2 4p

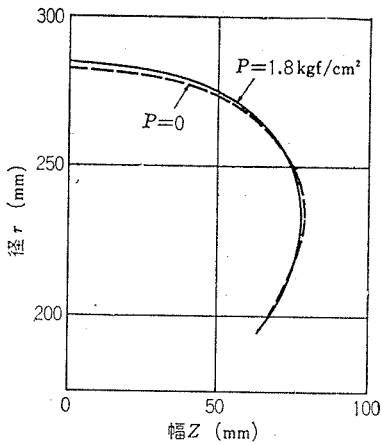


圖 18 165 SR 13의 初期 및 內壓充填時 形狀의 比較¹⁴⁾

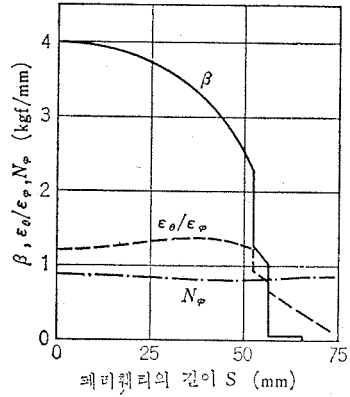


圖 19 165 SR 13타이어 內壓充填時의 $\beta, \epsilon_0/\epsilon_\phi, N_\phi$ 의 分布¹⁴⁾

表 1 165SR13 라디알타이어의 彈性的 性質¹⁴⁾

| 部 材 | E_c (kgf/本) | n (mm ⁻¹) | α_0 (deg) | G (kgf/mm) | w (枚) | ν | ζ | E (kgf/mm) |
|-------|------------------|----------------------------|---------------------|-----------------|------------|-------|---------|-----------------|
| 벨 트 | 171.0 | 1.095 | 16 | 0.65 | 4 | 3.92 | 44.1 | 423.1 |
| 카아카스 | 80.5 | 0.743 | 90 | 0.32 | 2 | 0.01 | 0.021 | 2.6 |
| 트 랫 드 | | | | 0.75 | | 0.50 | 1.0 | 2.2 |
| | | | | | | 0.43 | 4.68 | 629.3 |

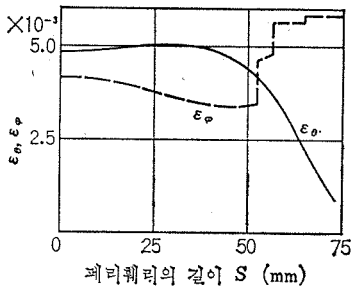


圖 20 165SR13 타이어內壓 充填時의 $\epsilon_0, \epsilon_\phi$ 의 分布¹⁴⁾

라디알타이어는 強한 벨트로 통데가 結여있으므로 一般的으로 初期形狀으로 부터의 變化는 僅少하다. 積層모델에서는 如何한 構造의 타이어라도 同一한 節次로 取扱이되므로 一般性이 있다고 할수 있다.

7. 回轉時의 타이어形狀

지금까지는 타이어에 內壓를 加했을때의 平衡形狀에 對해서 論해왔다. 以外에 타이어가 高速回轉할때의 形狀도 高速의 問題로서 重要하다. 回轉時의 타이어 形狀의 計算은 原理的으로는 簡單하며 타이어에 作用하는 힘으로써 內壓에 遠心力의 寄與 mrv^2 가 加하게 되면 좋다¹⁴⁾¹⁸⁾²⁸⁾

따라서 外力의 式(4)에 遠心力의 項을 添加해서 $F_\theta = 0$

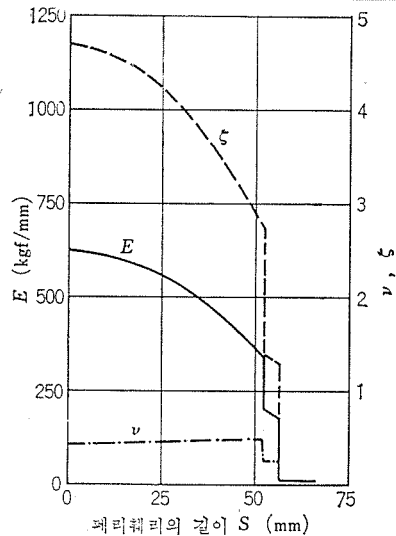


圖 21 165SR 13 타이어의 實効彈性率 E , 포 아손비 ν 및 異方性比 ζ 의 分布¹⁴⁾

$$F_\phi = mrv^2 \cos \phi \tag{62}$$

$$F_n = P + mrv^2 \sin \phi$$

로 된다. 膜理論의 平衡方程式 (1)~(3)은

$$\frac{d(N_\phi r)}{dr} - N_\theta + mrv^2 \omega^2 = 0 \tag{63}$$

$$\frac{N_\phi}{R_1} + \frac{N_\theta}{R_2} = P + mrv^2 \sin \phi \tag{64}$$

로 되며 兩式으로부터

$$N_\varphi = \frac{r^2 - m^2}{2r \sin \varphi} P \quad (65)$$

$$N_\theta = \frac{2R_1 \sin \varphi - (r^2 - r_m^2)}{2R_1 \sin^2 \varphi} P + mr^2 \omega^2 \quad (66)$$

이 얻어진다. 網目理論에 對 境遇에는 式(26)이 成立하며 또 曲率半徑의 式

$$R_1 = \frac{(1+z'^2)^{3/2}}{z''} \quad (67)$$

를 使用해서 N_θ , N_φ 를 消去하면 形狀을 規定하는 微分方程式

$$z'' + z'(1+z'^2) \left(\frac{r \sin^2 \alpha_0}{r_0^2 - r^2 \sin^2 \alpha_0} - \frac{2r}{r^2 - r_m^2} \right) - \frac{2mr^2 \omega^2 z'^2 (1+z'^2)^{3/2}}{P(r^2 - r_m^2)} = 0 \quad (68)$$

가 얻어져²⁸⁾ 또는 1回 積分해서

$$\frac{d(\sin \varphi)}{dr} + \left(\frac{r \sin^2 \alpha_0}{r_0^2 - r^2 \sin^2 \alpha_0} - \frac{2r}{r^2 - r_m^2} \right) \sin \varphi - \frac{2mr^2 \omega^2}{P(r^2 - r_m^2)} \sin^2 \varphi = 0 \quad (69)$$

로 된다. 質量 m 은 正確하게는 r 의 複雜한 關數로 되므로 이것을 푸는대는 普通 數值解法에 依하는수 밖에 없으나 Walter²⁸⁾는 트렛드部와 사이드部로 나누어서 各各에서는 m 은 一定하다 고해서 解釋을 부여하고있으며 또 Zorowski¹⁸⁾는 Walter의 하는 方式을 若干修正한 것과 같은 方法으로 議論하고 있다.

한편 一般의 膜理論에 있어서는 式(65), (66)으로부터 β 를 求해서 式(7), (8)의 關係를 使用해서 計算하면 式(16)에 對應하는 式으로써

$$\sin \varphi = \frac{r^2 - r_m^2}{r_0^2 - r_m^2} \exp \left\{ \int_r^r \left(\frac{\beta}{r} - m\omega^2 \frac{r}{N_\varphi} \right) dr \right\} \quad (70)$$

또 式(23)에 對應하는 것으로서

$$R_1 = \frac{(r_0^2 - r_m^2)r}{2r^2 - (r^2 - r_m^2) \left(\beta - \frac{mr^2 \omega^2}{N_\varphi} \right)} \exp \left\{ - \int_r^r \left(\frac{\beta}{r} - m\omega^2 \frac{r}{N_\varphi} \right) dr \right\} \quad (71)$$

이 얻어진다.

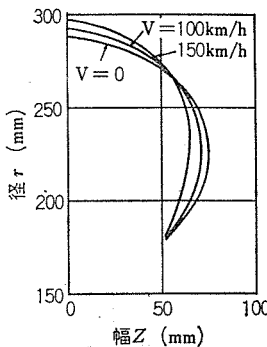


圖 22 165S13 바이어스 타이어의 回轉時의 形狀變化¹⁴⁾

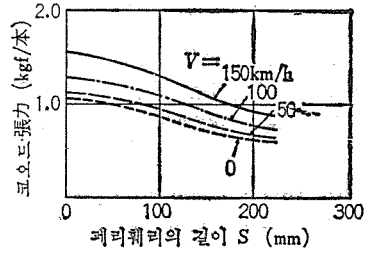


圖 23 165S13 바이어스 타이어의 回轉時 코오드張力 變化¹⁴⁾

式(70), (71)을 기초로 形狀이 求해지나 兩式共히 右邊 積分中에 N_φ 가 드러있으므로 關係式을 짜맞추어서 反復計算이 必要하게 된다. 積層 모델에서는 β 에 式(58)을 使用해서 式(70)을 풀면 좋다.

回轉時의 形狀變化는 라디알타이어보다도 바이어스 타이어의 쪽이 현저하다.

Robecchi¹⁴⁾ 등은 165S13으로 積層 모델에 依해서 圖 22와 같은 結果를 얻고있으며 그때의 코오드 張力은 圖 23과 같이 되었다.

8. 薄肉殼理論(Thin Shell Theory)

膜理論에서는 카아카스의 屈曲剛性を 無視했으나 屈曲剛性を 考慮에 넣으면 殼理論으로 된다. Brewer¹⁵⁾ 등은 殼理論에 依해서 形狀問題를 論했다.

殼理論에서의 平衡條件 式은

$$r \frac{dN_\varphi}{d\varphi} + (N_\varphi - N_\theta)R_1 \cos \varphi - Qr - r\omega_\varphi N_\varphi + rR_1 F_\varphi = 0 \quad (72)$$

$$-r \frac{dQ}{d\varphi} - QR_1 \cos \varphi - N_\varphi r - N_\theta R_1 \sin \varphi + \frac{d}{d\varphi} (r\omega_\varphi N_\varphi) + rR_1 F_r = 0 \quad (73)$$

$$-r \frac{dM_\varphi}{d\varphi} - (M_\varphi - M_\theta)R_1 \cos \varphi + QrR_1 = 0 \quad (74)$$

여기서 Q 는 殼에 垂直方向의 剪斷力이며 ω_φ 는 殼의 回轉이다. 變位와 徑의 關係式은

$$\varepsilon_\varphi = \frac{1}{R_1} \left(\frac{du}{d\varphi} + v \right) + \frac{\omega_\varphi^2}{2} \quad (75)$$

$$\varepsilon_\theta = \frac{1}{r} (-u \cos \varphi + v \sin \varphi) \quad (76)$$

$$\omega_\varphi = \frac{1}{R_1} \left(u + \frac{dv}{d\varphi} \right) \quad (77)$$

$$\kappa_\varphi = -\frac{1}{R_1} \frac{d\omega_\varphi}{d\varphi} \quad (78)$$

$$\kappa_\theta = -\frac{\omega_\varphi \cos \varphi}{r} \quad (79)$$

로 된다.

여기서 u, v 는 各各 徑方向 및 殼에 垂直方向의 變位,

κ_ϕ , κ_θ 는 徑, 周方向의 曲率變化이다. 以上の各式에 殼의 剛性으로부터 定해지는 힘과 歪의 關係式(53)을 加한것이 薄肉殼에서의 基本關係式으로 되나 式(53)에서 實際로는 $[B] \approx 0$ 으로 되므로 $[B]=0$ 으로 하면 式(53)은 式(80), (81)로 表示된다. 回轉對稱體의 條件으로부터 剪斷, 비틀어지는 成分은 共히 0으로 된다.

$$\begin{pmatrix} N_\phi \\ N_\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \epsilon_\phi \\ \epsilon_\theta \end{pmatrix} \quad (80)$$

$$\begin{pmatrix} M_\phi \\ M_\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_{11} & D_{12} \\ D_{21} & D_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \kappa_\phi \\ \kappa_\theta \end{pmatrix} \quad (81)$$

위의 關係式은 一層의 非線型 連立微分 方程式이며 適當한 境界條件下에서 逐次 反復積分에 依해서 풀 수가 있다.

Brewer¹⁵⁾는 航空機타이어의 形狀을 計算하여 實測과 좋은 一致를 보았다 (圖 24)

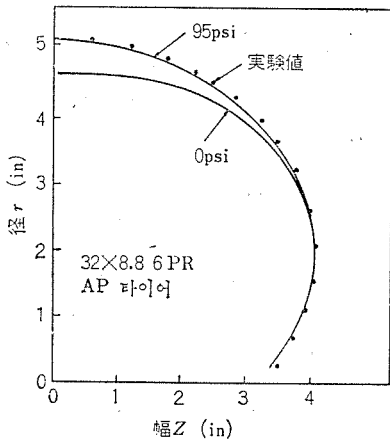


圖 24 殼理論에서 求한 AP타이어의 形狀과 實驗의 比較¹⁵⁾

한편 Clark¹⁷⁾등은 薄肉殼의 形狀을 에너지法에 依해서 풀것을 試圖하여 實測과 잘맞는 結果를 얻고 있다. 殼理論은 膜理論보다 現實에 가까운 모델로 되어있으며 그만큼 實際에 가까운 結果가 얻어져야 할터이지만 한 便 歪表示式(75)~(79)는 微少變形을 前提로 한것으로서 타이어처럼 歪가 작아도 變位는 相當히 커지는 경우에는 誤差가 커지기때문에 妥當한 結果를 얻는에는 內壓을 조금씩 增加 시켜서 形狀을 逐次 追隨해가는 등의 工夫가 必要하며 展望도 그다지 좋지 않다. 目的에 따른 使用이 必要할 것이다.

9. 有限要素法(FEM法)

構造解析을 行하는 有力한 手段으로서 有限要素法이 컴퓨터技術의 發達과 함께 登場해왔다. 이方法의 思考法은 連續物體를 有限의 要素로 分割하여 이要素間의 變位와 힘의 關係를 求하고 그것으로서 連續體 內部의 變位와 힘을 代表하는 것으로서 近似케 하려고 하는것

으로서 要素의 分割을 適當한 數로 잘 行하면 굉장히 좋은 近似가 얻어짐이 알려져있다. 또 解析의 由로 풀 경우와 달라서 形狀이 複雜한 場合에도 何等支障은 없 으나 他方 要素數가 增加하면 加速度의 由로 計算量이 붓기때문에 컴퓨터의 使用이 不可缺하게 된다.

FEM手法의 解説은 別途의 冊²⁰⁾에 讓步키로하고 타 이어에 FEM을 應用하는 試圖는 몇 個人가 있으며 Zorowski¹⁸⁾는 薄肉殼理論에 基해서 FEM으로 타이어 回轉時의 形狀을 追跡해서 圖 25와 같은 結果를 얻고 있다. 또 Ridha¹⁹⁾는 타이어 斷面을 圖 26과 같이 分割 하여 물드形狀으로부터 加疏後의 타이어形狀을 求하 여 圖 27과 같은 結果를 얻었다.

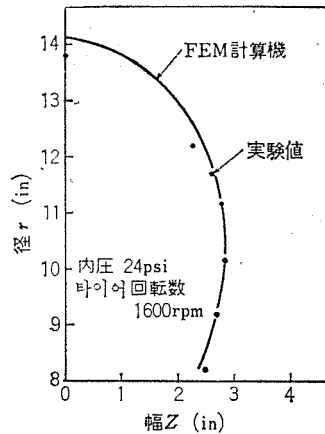


圖 25 FEM에 依한 타이어 回轉時 形狀과 實驗의 比較¹⁸⁾



圖 26 타이어 斷面의 FEM要素分割¹⁹⁾

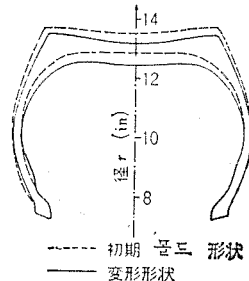


圖 27 FEM에 依한 初期물드形狀과 收縮力에 依한 變形形狀¹⁹⁾

FEM은 單只 內壓充塡時의 타이어 形狀을 求하는데

끝이지않고 타이어가 接地한 경우의 變形狀態나 變形時에 타이어內部에 發生하는 歪, 應力의 解析등 넓은 應用性이 있으며 今後 漸漸 使用이 增加해 간다고 생각된다.

10. 後 記

前章까지 主로 內壓充塡時의 타이어形狀에 對해서도 古典的인 網目理論으로부터 最近의 殼理論, FEM까지 紹介했다. 內壓充塡時의 形狀問題로서 다음의 段階는 타이어를 厚肉殼이라고 생각해서 形狀을 求함과 同時에 타이어의 構成部材의 各各에 對해서 應力, 歪를 求하는 것일것이다. 이것은 아마도 FEM에 依해서 可能하다고 생각된다. 大型 컴퓨터의 活用과 더불어 殼理論, FEM 解析이 今後的 趨勢일 것이나 타이어의 경우 變形이 크기때문에 荷重増分法이 必要하다든가 幾何學의 非線型이나 材料非線型을 어떻게 채용해서 나가느냐가 問題로서 남아있다.

타이어의 形狀을 論할경우 內壓充塡時에 못지않게 重要한 것은 타이어가 接地한 경우의 變形形狀및 그때의 코오드張力, 타이어各部の 歪등이다. 타이어는 使用時에 是 恒常 接地回轉해서 使用되어 타이어各부에 發生하는 應力, 歪도 接地時의 쪽이 一般의으로 크게 타이어의 耐久力을 支配하는 要因으로서 重要하다.

타이어의 接地時의 形狀解析에 對해서는 他機畵로 미루겠으나 二, 三의 解析^{20~22)}은 行해지고 있기는 해도 아직 充分하다고는 할수없다. FEM은 이경우에도 充分한 可能性을 갖고있다고 생각된다.

또한 타이어를 取扱하는者에 있어서는 타이어에 各種의 外力이 加해지고 또 감바이나 스텝프角이 붙었을 경우의 變形形狀이 問題로되나 理論에는 勿論 實驗의 으로도 充分 解明되었다고는 말하기 어려운 現狀이다.

文 獻

- 1) E.C. Woods; Pneumatic Tire Design, W. Heffer, Cambridge (1955)
- 2) W. Hofferberth; *Kaut, u Gummi*, 8 WT124(1955)
- 3) W. Hofferberth; *ibid* 9, WT225(1956)
- 4) H.G. Lauterbach, W.F. Ames; *Textile Res. J.*, 29, 890(1959)
- 5) W.H. Walston, W.F. Ames; *ibid* 35, 1078(1965)
- 6) W.H. Walston, W.F. Ames; *ibid* 35, 1087(1965)
- 7) R.B. Day, S.D. Gehman; *Rubber Chem, Technol.*, 36, 11(1963)
- 8) S.K. Clark; *ibid* 37, 1365(1964)
- 9) V.E. Gough; *ibid* 41, 988(1968)
- 10) S.K. Clark; *Textile Res. J.*, 33, 295(1963)
- 11) S.K. Clark; *ibid* 33, 935(1963)

- 12) 赤坂 隆; 中央大學工學部研究報告, B-4, 1(Apr 1959)
- 13) E.Robecchi, L. Amici; *Tire Sci. Technol.*, 1, 290 (1973)
- 14) E.Robecchi; *ibid*, 1, 382(1973)
- 15) H.K. Brewer; *ibid*, 1, 47(1973)
- 16) J.D. Walter, G.N. Avgeropoulos, M. L. Janssen, G.R. Potts; *ibid*, 1, 210(1973)
- 17) S.K. Clark, C.B. Budd, J.T. Tielking; *Kautschuk Gummi-Kunststoffe*, 25, 587(1972)
- 18) C.F. Zorowski; *Tire Sci, Technol.*, 1, 99(1973)
- 19) R.A. Ridha; *ibid*, 2, 195(1974)
- 20) S.K. Clark, I.K. McIvor; *Rubber Chem, Technol.*, 43, 1055(1970)
- 21) S.D. Gehman; *ibid*, 41, 977(1968)
- 22) W.F. Ames, H.G. Lauterbach; *Proc. Int Rubber Conf.*, 50, (Nov. 1959)
- 23) J.F. Purdy; *Mathematics Underlying the Design of Pneumatic Tires*, Edwards Bros, Inc., Michigan(1963)
- 24) J.B. Leabee, W.J. Schaffers; *Rubber Chem, Technol.*, 42, 1079(1969)
- 25) 林 毅綱; 複合材料工學, 日科技連(1971)
- 26) G. Tangorra; *Int. Rubber Conf. Moscow*(1969)
- 27) F. Böhm; *ATZ* 69, 255(1967)
- 28) J.D. Walter; *Textile Res. J.*, 40, 1(1970)
- 29) O. C. Zienkiewicz, Y. K. Cheung; 마트릭스有有限要素法(譯) 培風館(1970)

〔附表〕 記號의 說明

- r ; 타이어의 半徑方向의 座標
 z ; 타이어의 幅方向의 座標
 r_0 ; 타이어의 最大半徑
 r_m ; 타이어의 最大幅位置의 半徑
 φ ; 타이어 斷面의 接線이 徑方向을 이룩하는角
 θ ; 타이어의 回轉角
 α ; 코오드角度(周方向을 이룩하는角)
 α_0 ; 크라운센터어에서의 코오드角度
 R_1 ; 타이어徑方向 主曲率半徑
 R_2 ; 타이어周方向 主曲率半徑
 N_φ, N_θ ; 徑, 周方向膜力
 T ; 膜面剪斷力
 F_φ, F_θ, F_n ; 膜要素에 作用하는 外力의 徑, 周, 垂直方向成分
 P ; 內壓
 β ; $=N_\theta/N_\varphi$
 H ; $=\exp\left(\int_r^r \frac{\beta}{r} dr\right)$

$G; =r^2-r_m^2$
 $G_0; =r_0^2-r_m^2$
 t : 코오드張力
 n ; 코오드 박은數
 ϵ : 歪 添字 x x 方向
 y y 方向
 c 코오드歪
 φ 徑方向
 θ 周方向
 γ : 剪斷歪
 κ : 曲率變化 添字 x x 軸周
 y y 軸周

xy 비틀어짐
 φ 徑方向
 θ 周方向
 E_c : 코오드 1本當 모듈러스
 $(\sigma_{rx}, \sigma_{ry}, \tau_r)$; 고무의 x 方向, y 方向, 剪斷의 應力
 E_r ; 고무의 彈性率
 G_r ; 고무의 剪斷剛性率
 ν ; 포아손比
 ζ ; 異方性比 ($=c_{11}/c_{22}$)
 ω ; 回轉角速度
 (77. 3. 日本 고무協會誌)

<7 p 에서>

- 18) 듀폰트社카달로쿠
- 19) E.L. Latos and A.K. Sparks; *Rubber J.*, 151, No. 618(1969)
- 20) R.B. Spacht, W.S. Hollingshead, H.L. Bullard and D.C. Wills; *Rubber Chem, Technol*; 38, 134 (1965)
- 21) G.J. Van Amerongen; *Rubber Chem, Technol.*, 37, 1165(1964)
- 22) J. Brooke gardiner; *Rubber Chem, Technol.*, 41, 1312(1968)
- 23) J. E. Lewis, M.L. Devinery, JR., and L.E. Whittington; *Kautschuk Gummi, Kunststoffe* 22, No. 7359 (1969); *Rubber Chem Technol.*, 42, 892 (1969)
- 24) 第4 特別研究委員會 第3 小委員會: 日고무協誌, 45, 745(1932)
- 25) 棚谷篤志郎: 日고무協誌, 43, No. 3 212, 217 (1970)
- 26) M.L. Devinery, J.R., L.E.; Whittington and B. G. Cormann; *Rubber Chem. Technol.*, 44, 87 (1971)
- 27) J.E. Lewis and M. L. Devinery, Jr.; *Rubber Chem, Technol.*, 40, 1570(1976)
- 28) J.E. Lewis, M.L. Devinery, Jr., and B.G. Corman; *Rubber Chem, Technol.*, 42, 474(1969)
- 29) B.G. Corman, M.L. Devinery, Jr., and L.E. Whittington; *Rubber Chem. Technol*, 43, 1349 (1970)
- 30) K. Hummel and H. Eberharot; *Kautschuk Gummi Kunststoffe*, 28, 9 (1975)
- (1976. 5. 日本 고무協會誌)

◎ 會誌活用 案内

會員社에서는 今月號本誌中 下記事項에 變動部分이 있을 때에는 12月10日限 알려주시고 其他 PR 事項이나 새消息도 있을 때는 함께 자료를 보내주시면 掲載해 드리겠습니다. 期限까지 回報가 없을 때에는 該當事項이 없는것으로 看做 處理 하겠습니다.

- ① 會員社의 營業所 및 代理店-覽表
- ② 廣告
- ③ 表紙 4面 記載事項

◎ 廣告를 掲載해 드립니다

本誌는 國內唯一의 타이어 專門誌로서 各界各層에 讀者를 確保하고 있습니다.

더우기 輓近 타이어에 對한 認識度가 漸高하는 傾向에 따라 本誌를 읽고자하는 希望者數 또한 漸增趨勢에 있어 그 普及網이 더욱 擴張되었습니다.

그리하여 本誌는 企業發展과 製品宣傳에 寄與할 수 있는 各種有料廣告를 실어 드리고자 하오니 많은 利用있으시기 바랍니다.

急發進 急브레이크 때엔

想起하여 주십시오

타이어 原料의 70%는

石油라는 것을!