韓國數學敎育學會誌〈數學敎育〉
1977. 6, Vol. XV No. 2

Journal of the Korea Society of Mathematical Eucation
Jun. 1977. Vol. XV No. 2

원판과 영역

崇田大學校 전 종 서

I. 서 론

수열 $\{a_n\}$에서 $\Delta a_n = a_{n+1} - a_n$이라 하면 $\{\Delta a_n\}$을 $\{a_n\}$의 계차수열이라 한다. 수열 $\{a_n\}$에서 m계차수열 $\{\Delta^m a_n\}$이 등차수열이 되면

$$a_n = \binom{n-1}{0}a_1 + \binom{n-1}{1}\Delta a_1 + \cdots + \binom{n-1}{m+1}\Delta^{m+1}a_1.$$

$$S_n = \binom{n}{1}a_1 + \binom{n}{2}\Delta a_1 + \cdots + \binom{n}{m+2}\Delta^{m+1}a_1.$$

단, $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$.

직선상에 점이 n개가 있을때 직선상에 생성되는 영역의 개수를 $l_{(n)}$이라 하면 $l_{(n)} = n+1$이다. 평면상에 n개의 직선이 있어서 서로 다른 두 직선은 만나며 세 직선은 한 점에서 만나지 않는다고 할때, 평면에 생성되는 영역의 개수를 $\pi_{(n)}$이라 하면

$$\pi_{(n)} = 2 + 2\binom{n-1}{1} + 2\binom{n-1}{2}$$

공간상에 n개의 평면에 의하여 공간상에 생성될 수 있는 최대의 영역의 개수를 $\Gamma_{(n)}$이라 하면

$$\Gamma_{(n)} = 2 + 2\binom{n-1}{1} + 2\binom{n-1}{2} + \binom{n-1}{3}$$

원둘레상에 점이 n개가 있을때 서로 다른 두 점을 이어 생성되는 원판안의 영역의 개수를 $S_{(n)}$이라 하면,

$$S_{(n)} = 2 + (n-1) + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{24} + \frac{(n-2)(n-3)}{2}$$

단, 세 현은 한 점에서 만나지 않는다고 한다.

II. 수열과 조합과의 관계

정리 2—1

$$\binom{r+1}{q+1} = \binom{r}{q} + \binom{r-1}{q} + \cdots + \binom{q}{q} = \sum_{t=q}^{r}\binom{t}{q}$$

증 명

$$\binom{r+1}{q+1} = \binom{r}{q+1} + \binom{r}{q}.$$

$$\binom{r}{q+1} = \binom{r-1}{q+1} + \binom{r-1}{q}.$$

....

$$\binom{q+2}{q+1} = \binom{q+1}{q+1} + \binom{q+1}{q}.$$

$$\binom{q+1}{q+1} = \binom{q}{q}.$$

$$\therefore \binom{r+1}{q+1} = \binom{r}{q} + \binom{r-1}{q} + \cdots + \binom{q+1}{q} + \binom{q}{q} = \sum_{t=q}^{r}\binom{t}{q}.$$

정리 2—2

$$\sum_{(n-1)t=1}^{nt} \cdots \sum_{1t=1}^{2t} \sum_{0t=1}^{1t} 0t = \binom{nt+n}{n+1}.$$

증 명

$$\binom{nt+n}{n+1} = \sum_{(n-1)t=1}^{nt}\binom{(n-1)t+(n-1)}{n}$$

$$= \sum_{(n-1)t=1}^{nt}\sum_{(n-2)t=1}^{(n-1)t}\binom{(n-2)t+(n-2)}{n-1}$$

....

$$=\sum_{(n-1)t=1}^{nt}\cdots\sum_{1t=1}^{2t}\ \sum_{0t=1}^{1t}\binom{0t}{1}$$

$$=\sum_{(n-1)t=1}^{nt}\cdots\sum_{0t=1}^{1t}0t$$

정리 2—3 : 수열 $\{a_n\}$에서 $\Delta a_n=a_{n+1}-a_n$ 을 $\{a_n\}$의 계차라 하고, $\{\Delta a_n\}$을 계차수열이라 한다. 일반적으로 $\Delta^m a_n=\Delta^{m-1}a_n+1-\Delta^{m-1}a_n$ 을 $\{a_n\}$의 m 계차라 하고, $\{\Delta^m a_n\}$을 m 계차수열이라 한다. 우리는 다음표를 얻는다.

$$\begin{array}{cccc} a_1 & a_2 & a_3 & a_4\cdots \\ \Delta a_1 & \Delta a_2 & \Delta a_3 & \Delta a_4\cdots \\ \Delta^2 a_1 & \Delta^2 a_2 & \Delta^2 a_3\cdots & \\ \Delta^3 a_1 & \Delta^3 a_2 & \Delta^3 a_3\cdots & \end{array}$$

정리 2—4 : 수열 $\{a_n\}$에서 m 계차수열 $\{\Delta^m a_n\}$이 등차수열을 이루면

1. $a_n=\binom{n-1}{0}a_1+\binom{n-1}{1}\Delta a_1+\binom{n-1}{2}\Delta^2 a_1+\cdots+\binom{n-1}{m+1}\Delta^{m+1}a_1.$

2. $S_n=\binom{n}{1}a_1+\binom{n}{2}\Delta a_1+\binom{n}{3}\Delta^2 a_1+\cdots+\binom{n}{m+2}\Delta^{m+1}a_1.$

(증명) 1. $\{\Delta^m a_n\}$이 등차수열이므로

$$\Delta^m a_n=\Delta^m a_1+(n-1)\Delta^{m+1}a_1$$
$$=\Delta^m a_1+\binom{n-1}{1}\Delta^{m+1}a_1.$$

$$\Delta^{m-1}a_1=\Delta^{m-1}a_1+\sum_{i=1}^{n-1}\Delta^m a_i$$
$$=\Delta^{m-1}a_1+\sum_{i=1}^{n-1}\left(\Delta^m a_1+\binom{i-1}{1}\Delta^{m+1}a_1\right)$$
$$=\Delta^{m-1}a_1+\binom{n-1}{1}\Delta^m a_1+\binom{n-1}{2}\Delta^{m+1}a_1.$$

$$\Delta a_n=\Delta a_1+\binom{n-1}{1}\Delta^2 a_1+\cdots+\binom{n-1}{1}\Delta^{m+1}a_1$$

이라 가정하면

$$a_n=a_1+\sum_{i=1}^{n-1}\Delta a_i$$
$$=a_1+\sum_{i=1}^{n-1}\left\{\Delta a_1+\binom{i-1}{1}\Delta^2 a_1+\cdots+\binom{i-1}{m}\Delta^{m+1}a_1\right\}$$
$$=a_1+\binom{n-1}{1}\Delta a_1+\binom{n-1}{2}\Delta^2 a_1+\cdots+\binom{n-1}{m+1}\Delta^{m+1}a_1$$
$$=\binom{n-1}{0}a_1+\binom{n-1}{1}\Delta a_1+\cdots+\binom{n-1}{m+1}\Delta^{m+1}a_1.$$

수학적 귀납법에 의하여 증명된다.

2. $$S_n=\sum_{i=1}^{n}a_i$$
$$=\sum_{i=1}^{n}\left\{\binom{i-1}{0}a_1+\binom{i-1}{1}\Delta a_1+\cdots+\binom{i-1}{m+1}\Delta^{m+1}a_1\right\}$$
$$=\binom{n}{1}a_1+\binom{n}{2}\Delta a_1+\cdots+\binom{n}{m+2}\Delta^{m+1}a_1.$$

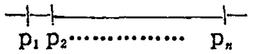
정리 2—5 : $\sum_{\alpha=1}^{n}\sum_{k=1}^{n-\alpha+1}\alpha k=\sum_{q=1}^{n}\sum_{p=1}^{q}\sum_{k=1}^{p}k=\binom{n+3}{4}$

(증명) $\sum_{\alpha=1}^{n}\sum_{k=1}^{n-\alpha+1}\alpha k=\sum_{\alpha=1}^{n}\alpha\sum_{k=1}^{n-\alpha+1}k$

$$=\sum_{\alpha=1}^{n}\alpha\binom{n-\alpha+2}{2}$$
$$=1\binom{n+1}{2}+2\binom{n}{2}+3\binom{n-1}{2}+\cdots+n\binom{2}{2}$$
$$=\binom{n+1}{2}$$
$$+\binom{n}{2}+\binom{n}{2}$$
$$+\binom{n-1}{2}+\binom{n-1}{2}+\binom{n-1}{2}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$+\binom{2}{2}+\binom{2}{2}+\binom{2}{2}+\cdots+\binom{2}{2}$$
$$=\sum_{i=1}^{n}\binom{i+1}{2}+\sum_{i=1}^{n-1}\binom{i+1}{2}+\cdots+\sum_{i=1}^{1}\binom{2}{2}$$
$$=\binom{n+2}{3}+\binom{n+1}{3}+\cdots+\binom{4}{3}+\binom{3}{3}$$
$$=\binom{n+3}{4}=\sum_{q=1}^{n}\sum_{p=1}^{q}\sum_{k=1}^{p}k.$$

Ⅲ. 공간과 영역

정리 3—1 직선상에 n개의 점이 놓여 있을 때 영역의 개수를 $l_{(n)}$이라 하면 $l_{(n)}=n+1$이다.

(증명) 

정리 3—2 평면상에 n개의 직선이 있고, 서로 다른 두 직선은 만나며 세 직선은 한 점에서 만나지 않는다고 할때, 평면상의 영역의 개수를 $\pi_{(n)}$이라 하면

$$\pi_{(n)}=2+2\binom{n-1}{1}+\binom{n-1}{2}\text{이다.}$$

(증명) 직선 $l_1, l_2, \cdots, l_n$이 평면상에 놓여 있다고 하자. 지금 l_{n+1} 직선을 평면위에 그으면 직선 l_{n+1}은 $l_1, \cdots l_n$ 직선들과 만난다. 즉 직선 l_{n+1}위에 n개의 점이 생성된다. 이 교점 n개에 의해서 l_{n+1}에 생성되는 영역의 개수는 $l_{(n)}$개 이다. 이 영역 하나 하나는 평면상에 영역 하나 하나를 생성하게 된다. 그러므로 다음 표를 얻을 수 있다.

$\pi_{(1)}$ $\pi_{(2)}$ $\pi_{(3)}$……

$l_{(1)}$ $l_{(2)}$ $l_{(3)}$

1 1 1

$$\therefore\ \pi_{(n)}=\pi_{(1)}+l_{(1)}\binom{n-1}{1}+\binom{n-1}{2}$$
$$=2+2\binom{n-1}{1}+\binom{n-1}{2}$$

정리 3—3 공간상에 n개의 평면이 가장 많은 영역을 생성할때, 공간상에 생성된 영역의 개수를 $\Gamma_{(n)}$이라 하면

$$\Gamma_{(n)}=2+2\binom{n-1}{1}+2\binom{n-1}{2}+\binom{n-1}{3}\text{이다,}$$

(증명) 공간상에 $\pi_1, \pi_2, \cdots, \pi_n$ 평면이 있다고 하자. 지금 π_{n+1} 평면을 공간상에 만들면 π_{n+1}은 $\pi_1, \pi_2, \cdots \pi_n$ 평면과 만난다. π_{n+1} 평면에는 $\pi_1, \cdots \pi_n$과 만난 직선 $l_1, l_2, \cdots, l_n$이 생성된다. $\pi_{(n)}$ 영역 하나 하나에 대응해서 공간에 영역이 하나씩 생성되므로 $\Gamma_{(n+1)}-\Gamma_{(n)}=\pi_{(n)}$이다.

우리는 아래와 같은 표를 얻을 수 있다.

$\Gamma_{(1)}$ $\Gamma_{(2)}$ $\Gamma_{(3)}$……

$\pi_{(1)}$ $\pi_{(2)}$ $\pi_{(3)}$

$l_{(1)}$ $l_{(2)}$ $l_{(3)}$

1 1 1

그러므로

$$\Gamma_{(n)}=\Gamma_{(1)}+\pi_{(1)}\binom{n-1}{1}+l_{(1)}\binom{n-1}{2}+\binom{n-1}{3}$$
$$=2+2\binom{n-1}{1}+2\binom{n-1}{2}+\binom{n-1}{3}.$$

Ⅳ. 원판과 영역

정리 4—1 원둘레상에 n개의 점이 있다고 하자. 서로 다른 두점을 이어 생성되는 원판안에 영역의 개수를 $S_{(n)}$이라 하면

$$S_{(n)}=2+(n-1)+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{24}+\frac{(n-2)(n-3)}{2}$$

단, 세 현은 한 점에서 만나지 않는다고 한다.

(증명) 원둘레상에 $p_1, p_2, \cdots, p_n$점이 놓여 있다고 하자. 우선 $p_1p_2, p_2p_3, \cdots, p_np_1$인 현을 긋고 다각형 $p_1p_2\cdots p_n$을 만든다. $p_1p_2, p_2p_3, \cdots, p_np_1$인 현을 긋고 다각형 $p_1p_2\cdots p_n$을 만든다. $p_1p_2, \cdots, p_np_1$ 현으로서 다각형 밖에 원판 안에 생성된 영역은 n개이다. p_1과 이어진 현들은 $p_1p_3, p_1p_4, \cdots p_1p_{n-1}$이다. $p_1p_3, p_1p_4, \cdots, p_1p_{n-1}$로서 다각형내에 생성된 영역은 $(n-3)+1$이다. p_2p_n현을 생각하면 p_2p_n은 $p_1p_3, p_1p_4, \cdots, p_1p_{n-1}$현과 만나므로 $n-3$개의 점이 p_2p_n에 생성된다. 그 점들에 의하여 p_2p_n에는 $(n-3)+1$개의 영역이 생성된다. p_2p_n의 한 영역 하나 하나에 대응해서 다각형내에 영역이 하나씩 더 생성되므로 p_2p_n에 의하여 생성되는 영역의 개수는 $(n-3)+1$이다. p_2p_{n-1}현은 $p_1p_3, p_1p_4, \cdots, p_1p_{n-2}$현과 만나고 p_2p_{n-1}현에 $n-4$개의 점이있다. p_2p_{n-1}현에 의하여 다각형내에 생성되는 영역은 $(n-4)+1$이다. 우리는 다음과 같은 표를 얻을 수 있다.

$p_1p_2, p_2p, \cdots, p_np_1$	n
$p_1p_3, p_1p_4, \cdots, p_1p_{n-1}$	$(n-3)+1$
p_2p_n	$(n-3)+1$
p_2p_{n-1}	$(n-4)+1$
⋮	
p_2p_3	$1+1$

p_3p_n 현을 그으면 p_3p_n은 p_1p_4, $p_1p_5, \cdots$, p_1p_{n-1}, p_2p_4, $p_2p_5 \cdots$, p_2p_{n-1} 현과 만난다. p_3p_n의 현위에는 $2(n-4)$의 점이 생성된다. 그러므로 p_3p_n에는 $2(n-4)+1$개의 영역이 생성되고 이 영역은 다각형 $p_1p_2\cdots p_n$ 위에 $2(n-4)+1$개의 영역을 생성시키게 된다. p_3p_{n-1}은 $p_1p_4, \cdots$, p_1p_{n-2}, $p_2p_4, \cdots$, p_2p_{n-2} 현과 만나고 $2(n-5)$개의 점이 p_3p_{n-1} 현위에 생성된다. 그러므로 p_3p_n-1에 의하여 다각형 안의 영역은 $2(n-5)+1$개 더 생성이 된다. 우리는 다음과 같은 표를 얻을수 있다.

p_1p_2, $p_2p_3, \cdots$, p_np_1	n
p_1p_3, $p_1p_4, \cdots$, p_1p_n	$(n-3)+1$
p_2p_n	$(n-3)+1$
$\vdots$	
p_2p_3	$1+1$
p_3p_n	$2(n-4)+1$
$\vdots$	
p_3p_4	$2.1+1$
$\vdots$	
$p_{n-2}p_n$	$(n-3)\cdot 1+1$

그러므로

$$S_{(n)}=n+(n-3)+1+\sum_{\alpha=1}^{n-3}\sum_{k=1}^{n-2-\alpha}(\alpha k+1)$$

$$=2(n-1)+\sum_{\alpha=1}^{n-3}\sum_{k=1}^{n-2-\alpha}\alpha k+\sum_{\alpha=1}^{n-3}\sum_{k=1}^{n-2-\alpha}1$$

$$=2(n-1)+\sum_{\alpha=1}^{n-3}\alpha\binom{n-1-\alpha}{2}+\sum_{\alpha=1}^{n-3}\binom{n-2-\alpha}{1}$$

$$=2(n-1)+\binom{n}{4}+\binom{n-2}{2}$$

$$=2(n-1)+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{24}$$

$$+\frac{(n-2)(n-3)}{2}.$$