韓國數學敎育學會誌〈數學敎育〉
1977.6, Vol. XV No. 2

Journal of the Korea Society of Mathematical Education
Jun. 1977. XV No. 2

實數 e 및 π의 超越性에 關한 小考

明知專門學校 金 智 翼

1. 序 論

整係數 方程式을 滿足하는 複素數를 代數的 數라 하고, 代數的 數가 아닌 複素數를 超越數라 한다. 有理數는 適當한 整係數 一次方程式을 滿足하므로 모든 有理數는 分明히 代數的 數이다. 따라서 超越數인 實數는 반드시 無理數이어야 한다.

超越數에 關하여 論한 것은 最初로 Liouville가 1851年에

$$10^{-1!}+10^{-2!}+\cdots\cdots+10^{-m!}+\cdots\cdots$$
$$=0.101001000000100\cdots10\cdots\cdots$$

이 超越數임을 證明함으로써 超越數의 存在性을 例示하였다.

다음에 Hermite가 1873年에 e가 超越數임을 證明하였고, Lindemann은 1882年에 Hermite의 方法을 擴張하여 π가 超越數임을 證明하였다. 이어서 Gelfond와 Schneider는 獨立的으로 1934年에 a, b가 代數的 數이고, 또한 b가 無理數일 때 a^b은 超越數임을 보였다.

그러나 주어진 複素數가 超越數인지 아닌지를 判別하는 一般方法은 알려져 있지 않다. 例를 들어 Euler의 常數

$C=\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{2}+\cdots\cdots+\frac{1}{n}-\log n)$에 對해서는, 이것이 無理數인지 아닌지 조차 알려져 있지 않다.

이 論文에서는 e 및 π를 超越數임을 평이하게 證明하기 爲하여 2節에서 이 두 數가 無理數임을 보이고, 3節에서는 超越數임을 證明하고저 한다. 그리고 이 事實을 利用하여 주어진 圓과 同一한 面積을 갖는 正四角形을 자와 콤파스로 作圖하는 問題는 不可能임을 보이려 한다.

2. e 및 π의 無理性

이 節에서는 e와 π가 無理數임을 證明하겠다.

定理 1. e는 無理數이다.

證明 數 e를 無限級數로 나타내면

$$e=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\cdots\cdots$$

이다. 이제 e를 有理數라 假定하면, 適當한 k, h에 對하여 $e=\frac{h}{k}$ 이다. 이때

$$k!(e-1-\frac{1}{1!}-\frac{1}{2!}-\cdots\cdots\frac{1}{k!})$$

는 整數이다 한편 윗式에 e의 값을 代入하면, 이 數는

$$\frac{1}{k+1}+\frac{1}{(k+1)(k+2)}+\frac{1}{(k+1)(k+2)(k+3)}+\cdots\cdots$$

와 같으므로 이 數는 다음 數보다 작다.

$$\frac{1}{k+1}+\frac{1}{(k+1)^2}+\frac{1}{(k+1)^3}+\cdots\cdots$$
$$=\frac{1}{k}\leq 1$$

이로써 矛盾을 얻은 셈이다. 따라서 e는 無理數이다.

補助定理 2. 整係數 多項式 g(x)에 對하여

$f(x)=\frac{x^n g(x)}{n!}$ 이라 하면 모든 $i=0, 1, 2, \cdots\cdots$ 에 대하여 $f^{(i)}(0)$은 整數이다. 더욱기 $i=n$인 경우를 除外하면, $f^{(i)}(0)$은 $n+1$로 나누어 떨어진다.

證明 多項式 $x^n g(x)$의 x^i의 係數를 C_i라 하면 C_i는 假定에 依하여 整數이고

$$f^{(i)}(0)=C_i\frac{i!}{n!}$$

이다. 분명히 $i<n$이면 $C_i=0$이고, $i>n$이면 $f^{(i)}(0)$은 $n+1$로 나누어 떨어지는 整數이다.

定理 3. 모든 有理數 $r\neq 0$에 對하여 $\cos r$은 無理數이다.

證明 코싸인 函數의 性質에 依하여 $\cos(-r)=\cos r$이므로, 양의 有理數 r에 對해서만 證明하겠다.

有理數 r을 두 양의 整數 a, b의 몫 $r=\frac{a}{b}$로 나타내고, 임의의 홀수 素數 p에 對하여

$$f(x)=\frac{x^{p-1}(a-bx)^{2p}(2a-bx)^{p-1}}{(p-1)!}$$
$$=\frac{(r-x)^{2p}\{r^2-(r-x)^2\}^{p-1}b^{3p-1}}{(p-1)!} \quad (1)$$

라 하자, 모든 $0<x<r$에 對하여

$$0<f(x)<\frac{r^{2p}(r^2)^{p-1}b^{3p-1}}{(p-1)!}=\frac{r^{4p-2}b^{3p-1}}{(p-1)!} \quad (2)$$

이다. 多項式 $f(x)$의 짝수次 導函數를 利用하여

$$F(x)=f(x)-f^{(2)}(x)+f^{(4)}(x)-f^{(6)}(x)+\cdots-f^{(4p-2)}(x) \quad (3)$$

라 하면

$$\frac{d}{dx}\{F'(x)\sin x-F(x)\cos x\}$$
$$=F^{(2)}(x)\sin x+F(x)\sin x=f(x)\sin x$$

임을 알 수 있다. 따라서

$$\int_0^r f(x)\sin x dx=F'(r)\sin r-F(r)\cos r+F(0) \quad (4)$$

이다. 多項式 $f(x)$는 $(r-x)^2$에 關한 多項式이므로 모든 홀수 i에 對하여 $f^{(i)}(r)=0$이다. 라서 (3)에 依하여, $F'(r)=0$임을 얻는다. 한편 補助定理 2에 依하여 모든 i에 대하여 $f^{(i)}(0)$은 整數이고, 특히 $i\neq p-1$이면 $f^{(i)}(0)$은 p의倍數이다. 定義式 (1)로부터

$f^{(p-1)}(0)=a^{2p}(2a)^{p-1}$이므로

$p>a$인 홀수 素數 p에 對하여 $f^{(p-1)}(0)$은 p로 나누어 떨어지지 않는다. 따라서 $F(0)=q$은 p로 나누어 떨어지지 않는 整數이다.

定義式 (1)에 依하여

$$f(r-x)=\frac{x^{2p}\{r^2-x^2\}^{p-1}b^{3p-1}}{(p-1)!}$$
$$=\frac{x^{2p}\{a^2-b^2x^2\}^{p-1}b^{p+1}}{(p-1)!}$$

이고, 補助定理 2에 依하여 모든 i에 對하여 $f^{(i)}(r)$은 p로 나누어 떨어진다. 그러므로 적당한 m에 對하여, $F(r)=p^m$이다.

이제 $\cos r$이 有理數라 假定하면, 적당한 두 整數 d와 $k(>0)$에 對하여 $\cos r=\frac{d}{k}$로 表示된다. 式 (4)를 다시 한번 쓰면,

$$k\int_0^r f(x)\sin x d x=-pmd+kq \text{ 이다.} \quad (5)$$

이때 $p>a$이고, $p>k$인 p를 잡으면, kq는 p로 나누어 떨어지지 않으므로 $-pmd+kq$는 0이 아닌 整數이다.

한편 (2)에 依하여

$$\left|k\int_0^r f(x)\sin xdx\right|<kr\frac{r^{4p-2}b^{3p-1}}{(p-1)!}$$
$$=kr^3b^2\frac{(r^4b^3)^{p-1}}{(p-1)!}$$
$$=\frac{c_1c_2{}^{p-1}}{(p-1)!}$$

여기서 $c_1=kr^3b^2$와 $c_2=r^4b^3$는 無關한 數이다.

이제 $p\to\infty$이면, $\frac{c_1c_2{}^{p-1}}{(p-1)!}\to 0$이므로 充分히 큰 p에 對하여 (5)의 左邊은 그 절대값이 1보다 작아진다. 이로써 矛盾을 얻은 셈이다. 따라서 $\cos r$은 無理數이다.

따름定理 4. π는 無理數이다.

證明 만일 π가 有理數라면 定理 3에 依하여 $\cos\pi$는 無理數이다. 그러나 $\cos\pi=-1$

이므로 이는 矛盾이다. 따라서 π는 無理數이다.

이제 좀 더 쉬운 證明을 보이기로 하겠다.

실제로 π^2이 無理數임을 보일 수 있다. 自然數 n에 대하여,

$$f(x)=\frac{x^n(1-x)^n}{n!} \tag{1}$$

이라 하면 $0<x<1$인 모든 x에 對하여,

$$0<f(x)<\frac{1}{n!} \tag{2}$$

이다. 또 補助定理 2에 依하여 모든 $i=0,1,2,\cdots\cdots$에 對해 $f^{(i)}(0)$은 정수이다. 한편

$f(1-x)=f(x)$이므로, $f^{(i)}(1)=f^{(i)}(0)$

도 또한 정수이다.

만일 π^2이 有理數라 假定하면, 적당한 두 自然數 a, b가 存在하여 $\pi^2=\frac{b}{a}$로 표시된다.

이때

$$F(x)=b^n\{\pi^{2n}f(x)-\pi^{2n-2}f^{(2)}(x)+\pi^{2n-4}f^{(4)}(x)-\cdots+(-1)^n f^{(2n)}(x)\}$$

라 놓으면, F(0)과 F(1)은 정수이다.

이제

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dx}\{F'(x)\sin\pi x-\pi F(x)\cos\pi x\}\\&=\{F^{(2)}(x)+\pi^2F(x)\}\sin\pi x\\&=b^n\pi^{2n+2}f(x)\sin\pi x\\&=\pi^2a^nf(x)\sin\pi x\end{aligned}$$

임을 利用하면

$$\begin{aligned}&\pi a^n\int_0^1 f(x)\sin\pi x dx\\&=\left(\frac{F'(x)\sin\pi x}{\pi}-F(x)\cos x\right)_0^1\\&=F(1)-F(0)\end{aligned} \tag{3}$$

이므로 $\pi a^n\int_0^1 f(x)\sin\pi x\,dx$는 整數이다.

한편 (2)에 依하여 充分히 큰 n에 對하여

$$0<\pi a^n\int_0^1 f(x)\sin\pi xdx<\frac{\pi a^n}{n!}<1$$

이므로 $\pi a^n\int_0^1 f(x)\sin\pi xdx$는 정수일 수가 없다. 이로써 矛盾을 얻은 셈이다. 따라서 π^2은 無理數이다.

이로부터 π가 無理數임을 알 수 있다.

3. 實數 e 및 π의 超越性

定義 1. 一次 以上의 整係數 方程式

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots\cdots+a_n=0$$

을 만족하는 複素數를 代數的 數라 한다.

定義 2. 代數的 數가 아닌 複素數를 超越數라 한다.

定義 3. 記號 h^r는 $h^0=1$, $h^r=r!(r\geq1)$을 뜻한다. 또 多項式

$$f(x)=\sum_{r=0}^{n}a_rx^r$$

에 對하여

$$f(h)=\sum_{r=0}^{n}a_rh_r=\sum_{r=0}^{n}a_rr!.$$

$f(x+h)=\sum_{r=0}^{n}f^{(r)}(x)$이라 定義한다.

定義 4. 函數

$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots\cdots$$

을 利用하여, $r=0,1,2,\cdots$에 對해 $u_r(x)$와 $\varepsilon_r(x)$를

$$\begin{aligned}u_r(x)&=\frac{x}{r+1}+\frac{x^2}{(r+1)(r+2)}+\cdots\cdots\\&=e^{|x|}\varepsilon_r(x)\end{aligned}$$

로 定義한다. 이때 $|u_r(x)|<e^{|x|}$이므로, 모든 x에 대하여 $|\varepsilon_r(x)|<1$이다.

補助定理 1. $\phi(x)$가 多項式일 때

$$\phi(x)=\sum_{r=0}^{s}c_rx^r,\quad \psi(x)=\sum_{r=0}^{s}c_r\varepsilon_r(x)x^r$$

이라 놓으면

$e^x\phi(h)=\phi(x+h)+\psi(x)e^{|x|}$이다.]

證明 定義 2에 依하여

$$\begin{aligned}(x+h)^r&=h^r+rxh^{r-1}+\frac{r(r-1)}{1.2}x^2h^{r-2}+\cdots+x^r\\&=r!+r(r-1)!x\\&\quad+\frac{r(r-1)}{1.2}(r-2)!x^2+\cdots+x^r\\&=r!\left(1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^r}{r!}\right)\end{aligned}$$

$$=r!e^x-u_r(x)x^r=e^x h^r-u_r(x)x^r$$

따라서

$$e^x h^r=(x+h)^r=u_r(x)x^r=(x+h)^r$$
$$=e^{|x|}\varepsilon_r(x)x^r$$

이 식에 c_r을 곱한 다음 모두 합하면 구하는 등식을 얻는다.

補助定理 2. $m\geq 2$이고 $f(x)$가 整係數多項式일 때,

$$F_1(x)=\frac{x^{m-1}}{(m-1)!}f(x),$$

$$F_2(x)=\frac{x^m}{(m-1)!}f(x)$$

이라 하면 $F_1(h)$와 $F_2(h)$는 정수이고

$$F_1(h)\equiv 0 \pmod m,\ F_2(h)\equiv 0 \pmod m)$$

이다.

證明 정수 $a_0, a_1, \cdots a_L$을 係數로 하는 多項式

$$f(x)=\sum_{l=0}^{L} a_l x^l \text{ 이라 하면}$$

$$F_1(x)\equiv\sum_{l=0}^{L} a_l \frac{x^{l+m-1}}{(m-1)!}$$

$$F_1(h)=\sum_{l=0}^{L} a_l \frac{(l+m-1)!}{(m-1)!} \text{ 이다.}$$

한편

$$\frac{(l+m-1)!}{(m-1)!}=(l+m-1)(l+m-2)\cdots m$$

는 $l\geq 1$일 때 m의 倍數인 정수이므로

$$F_1(h)\equiv a_0=f(0) \pmod m$$

이다. 마찬가지로

$$F_2(x)=\sum_{l=0}^{L} a_l \frac{x^{l+m}}{(m-1)!}$$

$$F_2(h)=\sum_{l=0}^{L} a_l \frac{(l+m)!}{(m-1)!}\equiv 0 \pmod m$$

定理 3. e는 超越數이다.

證明 만일 e가 超越數가 아니라면,

$$\sum_{t=0}^{n} c_t e^t=0 \text{ 이다.} \tag{1}$$

따라서 $n>1$, $c_0(\neq), c_1\cdots\cdots c_n$은 정수이다. 이제 p를 $\max(n, |c_0|)$ 보다 큰 素數라 하고,

$$\phi(x)=\frac{x^{p-1}}{(p-1)!}\{(x-1)(x-2)\cdots(x-p)\}^p$$

이라 하자.

式 (1)에 $\phi(h)$를 곱하고, 補助定理 2를 利用하면,

$$\sum_{t=0}^{n} c_t\phi(t+h)+\sum_{t=0}^{n} c_t\phi(t)e^t=0 \tag{2}$$

을 얻는다. 補助定理 2에 依하여($m=p$로 놓고) $\phi(h)$는 정수이고,

$$\phi(h)\equiv(-1)^{pn}(n!)^p \pmod m)$$

이다. 또한 $1\leqq t\leqq n$에 對하여

$$\phi(t+x)=\frac{(t+x)^{p-1}}{(p-1)!}\{(x+t-1)\cdots\cdots x(x-1)$$

$$\cdots\cdots(x+t-n)\}^p=\frac{x^p}{(p-1)!}f(x)$$

을 만족하는 整係數 多項式 $f(x)$가 存在한다. 다시 補助定理 2에 依하여 $\phi(t+h)$는 p로 나누어 떨어지는 정수이다. 따라서

$c_0\neq 0$이고 $p>\max(n, |c_0|)$이므로

$$s_1=\sum_{t=0}^{n} c_t\phi(t+h)\equiv(-1)^{pn}c_0(n!)^p\not\equiv 0$$
$$\pmod p)$$

이다. 그러므로 s_1은 0이 아닌 정수이고, 즉

$$|s_1|\geq 1 \tag{3}$$

이다. 한편 定義 3에 依하여 $|\varepsilon_t(x)|<1$이므로 $p\to\infty$일 때

$$|\phi(t)|<\sum_{r=0}^{s}|c_r|t^r$$

$$\leq\frac{t^{p-1}}{(p-1)!}\{(t+1)(t+2)\cdots\cdots$$

$$\cdots(t+n)\}^p\to 0$$

임을 알 수 있다. 따라서 (2)의 둘째 項을 s_2라 하면, $p\to\infty$일 때 $s_2\to 0$이다. 즉 充分히 큰 p에 대하여

$$|s_2|<\frac{1}{2} \tag{4}$$

으로 된다. 式 (1)에 依하여

$$s_1+s_2=0$$

이므로 (3)과 (4)에 依하여 矛盾을 얻는다. 따라서 e는 超越數이다.

定理 4. π는 超越數이다.

證明 만일 π가 代數的數이라면 $i\pi$도 代數的 數이므로 정계수 방정식

$$d_0x^m+d_1x^{m-1}+\cdots\cdots+d_m=0$$

의 근이다. 여기서 $m\geq1$이고 $d\neq0$이다. 이 방정식의 모든 근을

$$\omega_1,\ \omega_2,\cdots\cdots,\ \omega_m$$

이라 하면, 적당한 한 근 ω에 對하여

$$1+e^{\omega}=1+e^{i\omega}=0$$

이므로

$$(1+e^{\omega_1})(1+e^{\omega_2})\cdots\cdots(1+e^{\omega_m})=0$$

이 성립한다. 이제 2^m-1의 數

$$\omega_1,\cdots\cdots,\omega_m,\omega_1+\omega_2,\omega_1+\omega_3,\cdots\cdots,$$
$$\omega_1+\omega_2+\cdots\cdots+\omega_m \text{ 를}$$

$$\alpha_1,\alpha_2,\cdots\cdots,\ \alpha_{2m-1} \tag{1}$$

라 할 때 윗식의 左邊을 展開하면

$$1+\sum_{t=1}^{2m-1}e^{\alpha t}=0 \tag{2}$$

을 얻는다.

이제 (1) 중에서 $c-1$개는 0이고, 나머지 $n={}^m-1-(c-1)$은 0이 아니다. 假定하여, 番號를 再配列해서

$$\alpha_1,\cdots\cdots,\ \alpha_n,\ 0,\ 0,\cdots\cdots,\ 0$$

이라 놓기로 하자.

$$d\alpha_1,\cdots\cdots d\alpha_n \tag{3}$$

에 관한 정계수 對稱多項式은

$$d\alpha_1,\cdots\cdots,\ d\alpha_m,\ 0,\ 0,\cdots\cdots0$$

즉 $d\alpha_1,\ d\alpha_2,\cdots\cdots d\alpha_{2m-1}$

에 관한 정계수 對稱多項式이다. 따라서 이러한 多項式은

$$d\omega_1,\ d\omega_2,\cdots\cdots,\ d\omega_m$$

에 관한 정계수 對稱多項式이므로, 이는 정수이다. 式 (2)는

$$c+\sum_{t=1}^{n}e^{\alpha t} \tag{4}$$

로 쓸 수 있다. 素數 p를

$$p>\max\ (d,c,|d^n\alpha_1\cdots\cdots\alpha_n|) \tag{5}$$

만족하도록 잡고 $\phi(x)$를

$$\phi(x)=\frac{d^{np+p-1}\ x^{p-1}}{(p-1)!}\{(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\cdots\cdots\cdots(x-\alpha_n)\}^p \tag{6}$$

이라 定義하자. 式 (4)에 $\phi(h)$를 곱한 다음, 補助定理 1을 利用하면

$$s_0+s_1+s_2=0 \tag{7}$$

을 얻는다. 여기서

$$s_0=c\phi(h) \tag{8}$$

$$s_1=\sum_{t=1}^{n}\phi(\alpha_t+h) \tag{9}$$

$$s_2=\sum_{t=1}^{n}\phi(\alpha_t)e^{|\alpha_t|} \tag{10}$$

한편

$$\phi(x)=\frac{x^{p-1}}{(p-1)!}\sum_{l=0}^{np}g_lx^l$$

이다. 여기서 g_l은 (3)의 數들에 관한 정계수 多項式이고, 따라서 정수이다. 補助定理 2에 依하여 $\phi(h)$는 정수이고

$$\phi(h)\equiv g_0=(-1)^{pn}d^{p-1}(d\alpha_1,d\alpha_2,\cdots\cdots d\alpha_n)^p \pmod p \tag{11}$$

이다. 따라서 s_0는 정수이며, 또한 (5)에 依하여

$$s_0\equiv cg_0\equiv0 \pmod p$$

임을 알 수 있다.

이제

$$f_{l,t}=f_l(d\alpha_t\ :\ d\alpha_1,d\alpha_2,\cdots\cdots d\alpha_{t-1},d\alpha_{t+1},\cdots\cdots\cdots,\ d\alpha_n)$$

이라 할 때

$$\phi(\alpha_t+x)=\frac{x^p}{(p-1)!}\sum_{l=0}^{np-1}f_{l,t}x^l$$

으로 된다. 이때, $f_{l,t}$는 (3)의 數들에 관한 整係數 多項式이고, $d\alpha_t$를 제외한 數들에 관한 對稱式이다. 따라서

$$F_l=\sum_{t=1}^{n}f_{l,t}=\sum_{t=1}^{n}f_l(d\alpha_t : d\alpha_1,d\alpha_2,\cdots\cdots d\alpha_{t-1},\ d\alpha_{t+1},\cdots\cdots,\ d\alpha_n)$$

이라 놓으면

$$\sum_{t=1}^{n}\phi(\alpha_t+x)=\frac{x^p}{(p-1)!}\sum_{l=0}^{np-1}F_lx^l$$

이다. 이때 F_l은 (3)의 모든 數들에 관한 整係數 對稱多項式이므로 F_l은 정수이다. 그러므로, 補助定理 2에 依하여

$s_1=\sum_{t=1}^{n}\phi(\alpha_t+h)$는 정수이며,

$s_1 \equiv 0 \pmod p$이다. (13)

式 (12)와 (13)으로부터 s_0+s_1은 p로 나누어 떨어지지 않는 정수임을 알 수 있고, 따라서,

$$|s_0+s_1| \geq 1 \tag{14}$$

이다. 한편 任意의 固定된 數 x에 對하여 $p\to\infty$

$$|\psi(x)| < \frac{|d|^{np+p-1}|x|^{p-1}}{(p-1)!}\{(|x|+|\alpha_1|)\cdots(|x|+|\alpha_n|)\}^p \to 0$$

이므로 充分히 큰 p에 對하여

$$|s_2| < \frac{1}{2} \tag{15}$$

이다. 세 公式 (7), (14), (15)는 서로 矛盾이 된다. 따라서 π는 超越數이다.

定理 5. 자와 콤파스로 주어진 圓과 같은 面積을 갖는 正四角形을 作圖하는 것은 不可能하다.

證明 주어진 圓과 반지름을 단위 길이로 잡으면, 위의 작도 문제는 $x^2=\pi$를 만족하는 x, 즉 $x=\sqrt{\pi}$를 작도하는 문제에 귀착된다. 한편 자와 콤파스를 유한번 사용하여 작도할 수 있는 선분의 길이는 代數的數이다. 그러나 定理 4에 依하여 π는 超越數이므로 $\sqrt{\pi}$ 또한 超越數이기 때문에 작도는 不可能하다.

References

1. Hardy, G.H. and wright, E.M. The theory of numbers, Oxford, 3rd ed, 1954.
2. Herstein, I.N. Topics in algebra, Blaisdell pub. Co. London, 2nd ed, 1974.
3. Niven, I. Irrational numbers, Carus monographs, no. 11, John Wiley & Sons I Nc,, New York., 1956.