韓國數學敎育學會誌〈數學敎育〉
1977. 6. Vol. XV No. 2

Journal of the Korea Society of Mathematical Education
Jun. 1977, Vol. XV No. 2

# 圖形의 位相性 指導를 爲한 基礎資料에 對하여
## —— Euler의 定理를 中心으로 ——

清州敎育大學 黃 秉 德

### I. 序 言

論理的으로나 實踐的으로 어려운 位相幾何 分野의 一部槪念을 中學生에게 指導할 必要性에 對하여 한때 우리 敎員들은 懷疑的이기도 하였다. 그러나 어디까지나「數學의 本質은 그 自由性에 있다」고 한 Georg Cantor(1848～1918)의 말과 같이 位相의 槪念을 指導함으로서 圖形에 關한 直觀性이나 自由性도 길러진다고 하는 意味에서 位相을 新敎育課程에 넣었다고 본다. 그러나 여기서 留意할 點은 位相 그 自體를 指導하는 것이 아니고 그것이 갖는 直觀性과 自由性을 養成하는 것으로서 그 延長에 位相이 있다고 생각하는 것이 妥當할 것이다. 그런데 現行 敎科書에서 取扱하고 있는 것은 紙面과 時間의 制限 等을 받겠지마는 이 點에 對하여 多少 未洽함을 느낀다. 가령 中學校 三學年의 Leonhard Euler(1707～1789)의 定理 指導 過程을 보면 多面體의 꼭지點(vertex), 모서리(edge), 面(face)數 사이의 關係를 처음에는 樹形圖에서 $v-e=1$인 關係가 있음을 보이고 線形圖形에서 $v-e+f=1$이 成立함을 指導하고 끝으로 Euler의 多面體定理 $v-e+f=2$를 簡略히 誘導해기 때문에 位相性에 對한 槪念定着이 未洽할 것으로 여겨진다. 이에 對한 指導方法은 敎員에 따라 多樣한 方法이 構想될 수 있겠으나, 本稿에서는 直觀的이며 簡單한 指導資料를 몇가지 構想해 보았다.

### II. 線系에 關한 Euler의 定理

#### A. 一般的 考察

**定理 1.** 樹形圖에서 끝 點의 數를 $v$, 線의 數를 $e$라고 하면 $v-e=1$인 關係가 成立한다.

**證明.** $e=1$일 때는 하나의 線이므로 $v=2$로 $v-e=1$은 成立한다.

$e=n$일 때 成立한다고 假定하고

$e=n+1$일 때도 成立함을 보이자.

n個의 線分에서 또 하나의 線을 벗어 $n+1$個의 線을 만들면 그 線은 어느 點에서 그어도 點은 1個 增加하므로 $e=n+1$일 때 $v=(n+1)+1=n+2$가 된다. 이 때 $v-e=(n+2)-(n+1)=1$이 되어 等式은 成立한다. 따라서 $v-e=1$은 恒常 成立한다.

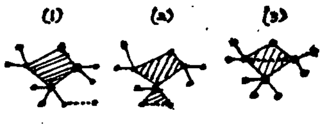
**定理 2.** 線形圖形의 點의 數를 $v$, 線의 數를 $e$, 面의 數를 $f$라고 하면 $v-e+f=1$은 成立한다.

**證明.** $e=1$일 때 $v=2$, $f=0$이므로 $v-e+f=1$은 成立한다.

$e=n$일 때 成立한다고 假定하고

$e=n+1$일 때 成立함을 보이자

$e=n$일 때 線을 하나 더 그어 $e=n+1$을 만들면 다음 그림과 같이 3가지 方法을 생각할 수 있다.




-----은 追加한 것

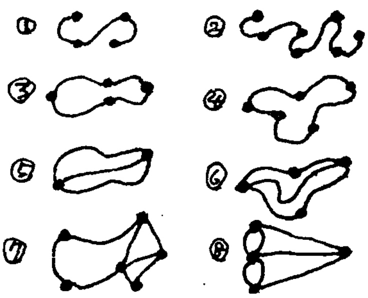
(1)은 多角形을 하나 增加하지 않은 境遇로 이때는 e, v가 하나씩 增加하므로 v−e+f의 값은 變하지 않는다.

(2)는 多角形을 하나 더 만든 것으로 이 境遇는 e, f가 各各 하나씩 增加하므로 v−e+f의 값은 變하지 않는다.

(3)의 境遇는 多角形을 두 個의 多角形으로 分割한 것으로 이 때는 e, f가 各各 하나씩 增加하므로 v−e+f의 값이 變하지 않는다. 어느 것이나 e=n+1일 때 위의 法則은 成立한다. 따라서 v−e+f는 線形圖形에서 恒常 成立한다.

B. 指導資料

위와 같이 證明하지 않더라도 다음과 같은 樹形圖와 線形圖形에서 생각하면 位相的으로 v−e+f의 값이 變하지 않는다는 것이 쉽게 理解되리라고 생각한다.




위 그림에서 點과 線의 數 사이에는 어떤 關係가 있는가를 調査한다. 點과 線의 數를 各各 a, b라 하고 그 關係를 나타낼 때 ①, ②는 點의 數가 線의 數보다 하나 많다. 卽 a=b+1과 같이 나타낼 것이며 어떤 學生은 線의 數가 點의 數보다 하나 적다. 卽 b=a−1로 나타낼 것이다. 또 ③, ④의 境遇는 點의 數와 線의 數가 같다. 卽 a=b로 나타낼 것이다.

이와 같이 自由스럽게 表現시킨 뒤에 學生들은 式의 整理 方法으로 文字는 左邊에, 常數는 右邊에 쓰는 것이 익숙되어 있으므로 그 方法에 着案하여 위의 結果를 다음과 같이 整理한다.

| | 가 | 나 | 다 | 라 | 마 |
|---|---|---|---|---|---|
| 問題 | ① ② | ③ ④ | ⑤ ⑥ | ⑦ | ⑧ |
| 關係 | a−b=1 | a−b=0 | a−b=−1 | a−b=−2 | a−b=−3 |

위 表의 關係에서 常數 1, 0, −1, −2, −3의 差異는 무엇과 關係가 있을 까를 充分히 생각시킨 뒤에 常數의 差異는 둘러쌓인 數의 差異에서 關係가 있지 않나 하는데로 觀心을 갖도록 한다. 쉽게 생각되지 않는 境遇에는 ①, ②의 圖形과 ③, ④의 圖形의 差異點이 무엇이냐는 等과 같이 하여 ①, ②는 닫혀있지 않은 線 ③, ④는 닫혀 있는 것이 差異가 있음을 想起시킨다. 이와 같이 하여 差異點을 發見하면 ⑤, ⑥, ⑦, ⑧의 差異點을 發見하기란 쉬울 것이다. 다음에 單一閉曲線의 內部는 面이므로 그 面의 數를 c라 하고 위 表의 밑의 란에 c의 값을 다음과 같이 記入시킨다.

(i) a−b=1, a−b=0, a−b=−1, a−b=−2, a−b=−3

(ii) c=0, c=1, c=2, c=3, c=4

(i)과 (ii)를 各各 더하면 어느 것이나 a−b+c=1과 같이 統合되어 文字만 바꾸면 v−e+f=1이 된다.

## Ⅲ. 多面體에 關한 Euler의 定理

### A. 定理의 誘導

敎科書와 같이 하여 Euler의 定理를 얻을 수 있으나 위에서 求한 a−b+c=1과 定理 2를 利用하여도 얻을 수 있다. 平面圖形을 位相的으로 잘 變形하여 밑에 面을 하나 더 붙이면 多面體가 된다. 이때 이 多面體의 꼭지점, 모서리의 數는 처음 平面圖形의 꼭지점,

모서리의 數와 같다. 또 多面體의 面의 數는 처음 平面圖形의 面의 數보다 하나 많다. 여기서 꼭지점, 모서리, 面의 數를 各各 v, e, f 라고 하면

$$a=v,\ b=e,\ c=f-1$$

과 같은 關係가 된다. 따라서 $a-b+c=1$에서 $v-e+(f-1)=1$

$$\therefore\ v-e+f=2$$

와 같이 되어 Euler의 多面體定理가 얻어진다. 또 $a-b+c=1$에서 $v-e+f=2$를 誘導할 때 위와 같은 方法이 아니더라도 多面體는 平面圖形보다 面이 하나 더 많으므로 $v-e+f$ 全體로서 常數 1보다 하나 增加하여 2가 된다는 指導方法도 생각할 수 있다.

## B. 指導資料

Euler의 定理의 應用으로서 正多面體의 種類를 생각할 수 있는데 그 一般的인 方法은 正多面體의 各面이 正 m角形이고 또 한 꼭지點에 모이는 面의 數를 n이라고 하면

$$mf=nv=2e$$

$f=\frac{2e}{m}$, $v=\frac{2e}{n}$ 를 $v-e+f=2$에 代入하면

$$\frac{2e}{n}-e+\frac{2e}{m}=2$$

$$\frac{1}{m}+\frac{1}{n}=\frac{1}{e}+\frac{1}{2}$$

인 否定 方程式에서 正多面體는 五種類 밖에 없음을 證明할 수도 있으나 中學生으로서는 程度가 지나치므로 省略하고 正多面體의 特徵을 알아보고 定理를 利用하여 正多面體의 面의 數를 求하는 方法을 생각해 보자.

### 1. 正多面體의 特徵

正多面體에 對해서 그 性質을 明確히 해 보면,

a. 正多面體의 各面은 合同인 正多角形

b. 各 꼭지點에 모이는 面의 數는 같다.

正多角形으로 邊의 數가 가장 적은 것은 正三角形이다. 各面이 正三角形인 正多面體는 正三角形의 한 角의 크기가 60°이므로 하나의 꼭지點에 모이는 正三角形의 數는 3個, 4個, 5個의 3種類이다.

다음에 各面이 正四角形인 正多面體에 對해서 調査하면 한 角의 크기는 90°이므로 하나의 꼭지점에 모이는 正四角形의 數는 3個로 한 가지이다.

또 各面이 正五角形인 正多面體는 한 角의 크기가 108°이므로 하나의 꼭지점에 모이는 正五角形의 數는 3個로 한 가지이다.

다시 各面이 正六角形인 正多面體가 存在하는가를 생각케 한다. 正六角形의 한 角의 크기는 120°이므로 正六角形 3個를 1點에 모이면 平面이 되어 正多面體가 만들어지지 않음을 알 수 있다.

### 2. 定理의 利用

위에서 본 바와 같이 한 꼭지點에 모이는 正三角形이 3個일 때는 바로 正四面體가 됨을 알 수 있어 Euler의 定理를 利用할 必要感을 느끼지 않을 것이다. 따라서 正五角形이 한 꼭지點에 3個 모이는 境遇, 이 多面體의 面의 數를 求해 보자. 面의 數를 求하는 것이므로 이것을 x라고 할 때 邊의 數와 꼭지點의 數도 x로 나타낼 수 없을까를 생각케 한다. 正五角形의 邊의 數는 5이므로 面의 數를 x라 할 때 모두 5x가 된다. 그런데 正五角形의 各邊은 2個씩 포개져 있으므로 正多面體의 모서리의 數는 $\frac{5x}{2}$로 나타낼 수 있다. 같은 方法으로 正五角形의 꼭지點의 數는 $\frac{5x}{3}$이다. 卽 面, 모서리, 꼭지點의 數는 各各 x, $\frac{5x}{2}$, $\frac{5x}{3}$이다. 이것을

$v-e+f=2$에 代入하여

$$\frac{5x}{3}-\frac{5x}{2}+x=2 \text{에서}$$

$x=12$를 얻는다.

이와 같이 하여 이 正多面體는 正十二面體임을 알 수 있다. 이 方法은 一次方程式의 簡

單한 應用問題程度로 쉽게 理解되리라고 생각한다. 같은 方法으로 다른 네 境遇의 正多面體의 面의 數도 求할 수 있어 學生들이 興味롭게 받아들일 수 있겠다.

## Ⅳ. 結 論

圖形의 位相的인 性質을 中學校에서 指導하는 것은 多樣한 空間槪念을 기르고 또 數學的인 思考力을 기르기 爲한 한 分野로 抽象化의 過程을 理解시키는데 있을 것이다. 왜냐하면 抽象化는 數學에 있어서 本質的인 것으로 數學을 深化하고 發展시켜 왔으며 이 抽象化로 多方面의 諸問題를 數學의 構造에 올려 놓을 수 있는 것이 可能하게 되어 課題解決에 도움을 주었다고 할 수 있다. 이런 意味에서 圖形의 位相槪念을 學生들 周圍에서 흔히 볼 수 있는 것으로부터 Euler의 定理까지 大體로 位相的 性質에 關한 發祥的인 側面에서 直觀的이고 初期的인 單純한 性質을 把握하여 보다 다른 空間에 對한 認識을 새롭게 함은 매우 意義있는 일이라 하겠다. 以上 本稿에서는 線系에 對한 位相的 性質의 考察과 指導資料를 構想하였고 多面體에서의 Euler의 定理를 살피고 指導資料를 마련해 보았다. 끝으로 位相槪念이 數學에서 차지하는 比重을 勘案할 때 우리 敎員들은 보다 多樣한 指導資料를 開發하는데 注力하여야 할 것이다.

## 參 考 文 獻


1. 朴乙龍外 : 數學大辭典, 서울, 創元社, 1975.
2. 한국 수학 교과서 편찬 위원회 : 중학 수학, 서울, 한국 중등 교과서 주식회사, 1977.
3. 全國敎育大學 數學硏究會 : 數學, 서울, 東明社 1977.
4. 全國敎育大學 數學硏究會 : 算數敎育, 서울, 同和文化社, 1977.
5. 石谷 茂 : 數學の 位相構造, 東京, 明治圖書, 1967.
6. 數學敎育 No. 154, 東京, 明治圖書, 1973.
7. 數學敎育 No. 160, 東京, 明治圖書, 1973.