韓國數學敎育學會誌〈數學敎育〉
1977. 12. Vol. XVI No. 1

Journal of the Korea Society of Mathematical Education
Dec. 1977. Vol. XVI No. 1

Piaget 의 自然數槪念 研究의 敎育的 解釋

——特히 數學的 認識論을 中心으로——

仁川敎育大學 禹 正 皓
(現在, 日本 廣島大學 大學院 留學中)

目 次

I. 序 言 : 現代 數學敎育 改善에 가장 큰 影響을 끼쳐 온 心理學者는 Piaget 이다. 그의 研究가 學習心理學的인 側面을 疎忽히 한 點은 아쉽지만, 數學的인 諸 槪念 形成의 mechanism 을 分析 提示한 그의 研究는 知的 形成 過程을 意識的이고 組織的인 方法으로 高揚시키는 目的을 가진 敎育學者들에게 크나큰 關心事가 아닐 수 없다. 따라서 數學敎育的인 解釋 및 適用에 關한 研究가 Piaget 自身[1]은 물론 B. Inhelder 女史[2], H. Aebli[3], K. Lovell[4], A. Fricke[5] 等에 依해 크게 進展되어, 過去 20年間에 걸쳐 數學敎育 改善에 매우 큰 貢獻을 해 왔다. 그러나 그의 老大한 研究는 基本的인 諸 槪念의 不明瞭, 陳述의

1) Piaget(1973), *Comments on Mathematical Education*, Developments in Mathematical Edcatioun, ed. A. G. Howson, pp. 79~87.
——(1971), *Psychologie et Pedagogie*, *Denoël/Gonthier*; Science of Education and the Psychology of the Child, trans. D. Coltman, Longman Group Limited, London.
——(1966) *L'intiation aux mathématiques, les mathématiques modernes et la psychologie de l'enfant*, L'Enseignement mathématique, XII.
——(1966), *How Children Form Mathematical Concepts*, Reading in the Psychology of Cognition, Anderson & Ausabel, Holt Rinehart & Winston, Inc., pp. 406~414.
2) B. Inhelder(1958), *Ein Beitrag der Entwicklungspsychologie zum mathematischen Unterricht*, Der Mathematische Unterricht für die sechs bis fünfzehnjarige Jugend in der Bundersrepublik Deutschland, ss. 87~100.
3) H. Aebli(1951), *Didactique Psychologique*, Delachaux et Niestlé, Neuchâtel, Switzerland.
4) K. Lovell(1961), *The Growth of Basic Mathematical and Scientific Concepts in Children*, University of London Press Ltd.
5) A. Fricke, H. Besuden(1969), *Mathematik in der Grundschule*, Ernst Klett Verlag Stuttgart; *Mathematik-Elemente einer Didaktik und Methodik*, Ernst Klett Verlag Stuttgart, (1970).

難解, 記述의 一貫性 缺如 等에 依해 그 適用에 크나큰 困難과 危險性을 가지고 있음에 留意하지 않으면 않된다.

自然數는 數學者, 哲學者, 心理學者, 數學敎育者들에게 끊임없이 問題를 提起해 왔다. 따라서 國民校學 數學敎育에서 自然數를 어떻게 다루는 것이 좋은가에 對한 滿足할만한 解答을 찾기란 매우 어려운 問題임에 틀림없다. 現在는 傳統的인 直觀主義, 세기主義를 完全히는 無視하지 않은 形態로서, J. Wittmann[6]에 起源을 가지며, the New Math 運動 期間以來 算數의 數學化라고 하는 精神에 따라 强調되어 온, 集合論에 따른 cardinal number 理論을 初等化한 SMSG 式의 方法이 主流를 이루고 있다. 그런데 이와같이 cardinal number를 强調하는 指導를 하게 된 心理學的 根據가 주로 Piaget의 研究 結果에 있는 것처럼 認識되어 있다.

그러나 自然數에는 cardinal number 以外에 counting number, measuring number, operator, ordinal number 等의 復雜한 여러 側面이 있고, 이들은 H. Freudenthal[7], A. Fricke[8]等의 主張처럼 數學的인 面에서 보나, 敎育學的인 面에서 보나, cardinal number 보다 큰 長點을 갖고 있는지도 모른다. cardinal number의 큰 長點은 transfinite cardinal number에의 擴張 可能性이지만 이는 初等數學과는 無關係한 것이다. 더구나 現在와 같은 指導를받은 兒童이 自然數를 對等한 集合의 共通性質이라든가 對等한 集合의 集合이라고 認識하고 있는지는 매우 의심스럽다. 그렇지는 못해도 對等한 集合은 要素의 數가 같다든가 數가 같은 集合은 對等하다는 것은 理解하고 있을것이라고 反問할 수도 있겠지만, Piaget에 依하면 따로 그와같은 指導를 하지 않아도 具體的 操作期에 들어서면(6.5~7歲頃) 自發的으로 自然數 槪念을 形成하여, 一對一對應에 의해 對等性을 發見하고 數의 保存을 理解한다고 한다.[9]

結局 現在의 自然數 槪念 指導의 根幹은 數學的으로 不完全 不充分하고 그에 對한 指導結果조차 의심스럽다고 하면 그 數學的 基礎面과 그 指導方法을 뒷받침하는 心理學的 理論은 再吟味 再檢討되지 않으면 않된다.

本稿는 이러한 動機를 갖고, Piaget의 數學的 認識論에 비추어, 그의 數學敎育理念을 考察하고, 그의 自然數 槪念 및 그 形成發達에 對한 觀點과 研究結果를 分析하여 그러한 理論에 근거한 自然數指導의 樣相을 檢討해 본 것이다.

Ⅱ. 操作的 構成主義: 一般的으로 Piaget의 發生的 認識論의 基本的 假說은 知識의 論理學的이고 合理的인 構造化의 進步와 이에 對應하는 形成的 心理 過程과의 사이에 平行性이 있다고 하는 것이다.[10] 그러면서 心理學的으로 認識의 順序는 發生의 順序의 逆이고 構成의 順序에서 最初의 것은 反省的 分析에서 最後에 나타난다고 하는것을 假定하고 있다.[11] 그의 數學的 認識論도 이러한 大前提에 따르는 것으로서, 그의 結論은, 모든 生命있는 主體에 共通인 universal한 基本的인 論理·數學的 構造가 있다고 하는 假定하에, 論理·數學的 槪念은 organs의 構造를 出發點으로하

6) J. Wittmann(1929), *Theorie und Praxis eines ganzheitlichen Unterrichts*. W. Grüwell Verlag, Dortmund.
7) H. Freudenthal(1973), *Mathematics as an Educational Task*, D. Reidel Publishing Co., pp. 170~197.
8) A. Fricke(1971. 5), *Die natürliche Zahl in mathematischen Anfangsunterricht*, Mathematik Unterricht, 5/71, ss. 67~87.
9) Piaget(1966), *op. cit.*, p. 406.
10) Piaget(1972), *Genetic Eqistemology*; J. ピアジェ發生的認識論, 芳賀純譯, 評論社, p. 17.
11) Piaget(1965), *Les structures mathématiques et les structures opératoires de l'intelligence*, L'enseignement des mathématiques, Delachaux & Niestlé S. A., Neuchatel, Suisse, pp. 11~33.

여, 感覺運動의 構造를 거쳐, 行動과 操作의 一般的 調整(co-ordination)으로부터 反映的 抽象化(reflective abstraction)에 依해 構成된다고 하는 것이다.[12] 結局 可能性의 framework가 주어져 있다고 보고 있으므로 一種의 apriorism이며, 抽象化에 依한 것이라고 보고 있으므로 Aristotle의 생각과 비슷하나, 可能性만으로서는, 다시말해 實際的인 構成이 없는 경우 實際的인 entity로서 볼 수 없다고 하는 點과, 對象으로부터의 單純한 抽象化와 對象에 對한 行動과 操作의 調整으로부터의 소위 反映的 抽象化를 區分하고 있는 點이 그의 novelty이다. 反映的 抽象化라고 하는 것은 主體 自身이 以前에 한 行動 혹은 操作의 存在를 認識하여 보다 抽象的인 組織化라고 하는 思考水準에 反映함으로써 새로운 構造속으로 統合되는 過程이나 그 結果를 말하는 것이다. 여기에서 무엇보다도 중요한 槪念이 調整이란 槪念이다. Piaget는 一般的으로 知能을 그 水準에서 可能한 全體 調整의 總合및, 보다 單純한 行爲에 介在하는 類似한 諸調整을 根據로한 反映的 抽象化로서 定義하고 있는 것이다.[13]

Piaget는 認知 發達에 影響을 주는 基本的 因子로서, 身體的 成熟, 實世界와의 直接的인 經驗, 社會的 傳達(交際, 敎育等) 이외에, 均衡 즉 自己調節 因子를 들고 있다. 이 가운데에서 Piaget가 깊이 研究하고 基本的으로 重要한 것이 均衡因子이다. Piaget는 知能의 發達은 個體와 環境과의 相互作用 즉 同化와 調節에 의해 새로운 均衡狀態에 達하는 繼續的인 不均衡의 連續이라고 보고, 이러한 不均衡은 앞의 3 因子에 依해서 일어난다고 생각하고 있다. 나는 行動의 調整은 이러한 一時的 均衡狀態에 到達하는 適應過程을 가리키는 것이고, 그 때 일어난 새로운 洞察을 反映的 抽象化라고 解釋하고 싶다.

一般的으로 Piaget는 思考에는 知覺, 模倣, 心像等에 顯著한 靜的인 圖式的 思考와, 一般的 行動 혹은 可逆的인 內面化된 行動에서 顯著한 狀態의 變換을 다루는 操作的 思考의 두 面이 있다고 보고 있다.[14] 그러나 圖式的 側面은 어떤 變換이 가해진 結果 혹은 다른 變換에 對한 出發點으로서 밖에 이해할 수 없으므로 思考의 本質的인 側面은 操作的 側面이라고 보고 있는 것이다. 어린 兒童에게는 이 두가지 面이 調和되어 있지 못하기 때문에 固定된 狀態에 執着하고 相對的으로 關連시킬 수가 없다는 것이며, 可動的인 水準까지 發達한 狀態가, 全體的 構造로서 統合된 內面化된 可逆的 行動 곧 操作이라는 것이다.

따라서 知能의 發達을 總體的 發達의 自發的인 過程이라고 보고, 受動的이 아닌 能動的인 內面化된 行動 즉 操作을 知識의 本質이라고 보고 있으므로 論理·數學的 經驗은 對象이 아닌, 對象에 對한 行動의 結果를 觀察하는 것이어야 한다. 그러면 어떤 경우에 行動의 調整이 일어나는 것인가. 보통 行動은, 知覺할 수도 없고 直接 內觀할 수도 없는 schema와 關係한다. 行動의 schema란 그 行動의 一般化할 수있는 一群의 特性 즉 같은 行動을 반복하고 새로운 內容에 適用할 수 있는 그러한 反復樣式을 말한다. 그런데 그의 理論에 依하면 操作의 形態로 內面化될 수 있는 行動의 경우에, 그 行動의 schema가 調整이란 特性을 가지며, 結合(分離), 順序짓기, 짝짓기 等 곧 classe와 關係의 基本的인 操作의 出發點을 이루는 行動의 schema가 이 調整의 特性을 포함한다고 하는 것이다.[15] 이 點이야말로 數學敎育 改善에 커다란 示唆를 주

---

12) E. W. Beth, J. Piaget(1976), *Mathematical Epistemology and Psychology*, tran. W. Mays, D. Reidel Pub. Co., Dordrecht-Holland, part Ⅱ.
13) Piaget(1971), *Biology and Knowledge*, Edinburgh University Press, p. 311.
14) Piaget, *Genetic Epistemology*; J. ピアジェ發生的認識論, *op. cit.*, pp. 18~19.
15) E. W. Beth, J. Piaget, *op. cit.*, p. 235.

는 매우 重要한 點이라고 생각한다. 그러한 行動의 結果 그 schema는 意識的인 操作으로 飜譯되고 經驗的인 것이 論理的으로 說明될 수 있게 된다는 것이다. 이 意識化 즉 反映的 抽映化는 Piaget의 한 假說이며, 核心的인 部分이지만 아직 그 mechanism까지는 이르지 못하고 있다. 이 內面化의 mechanism은 認識論에 있어서 現下 最大의 難問으로 科學的 認識論의 構築에 있어서 點睛에 相當하는 것이다.[16)]

現代 數學의 特徵은 크게 形式化와 公理化로 나누어 說明할 수 있다. 그런데 反映的 抽象化의 特性을 생각해 볼 때 形式化의 發達은 自然的 思考의 發達 樣狀이므로, 形式化는 細練된 反映的 抽象化의 變種이라고 볼수 있다. 또한 公理的 構成에서 重要한 것은 論證인데 이 論證은 同時에 前進 回歸的이므로 反映的 抽象化의 特性과 비슷하다. 따라서 現代數學의 構成은 自然的 思考의 擴張이고, 人間이 歷史的으로 탄생된 瞬間부터, 주어진 可能性을 차차로 確實히 實現하여 認識해 온 人間의 自然的 思考에 依한 오랜 期間에 걸친 構成物이라는 것이다.

以上이 Piaget의 數學的 認識論인 소위 操作的 構成主義의 要旨이다.

Ⅲ. Piaget의 數學敎育 理念: 操作的 構成主義란 그의 理論에 따른 數學敎育에 對한 理念을 整理해 본 結果는 다음과 같다.

操作的 構成主義에 따르면, 數學敎育의 根據가 되지 않을 수 없는 것은 形式的인 言語的 傳達, 혹은 知覺을 통한 靜的인 images의 形成이 아니라, 操作的인 自發的 構成이다. 따라서 對象에 행한 行動의 結果를 觀察하는 論理・數學的 經驗이 必須不可缺하다. 結局 敎師는 兒童의 行動을 思慮깊게 組織하고 經驗이 兒童 自身의 行動 調達의 機會가 되도록 해주지 않으면 안된다.

그런데 行動의 調整에 本質的인 役割을 하는 것이 結合(分離), 包含시키기, 順序짓기, 짝짓기等 classes와 關係에 對한 基本的인 論理的 操作에 對應하는 行動의 schema이므로 이러한 論理的 可法, 包攝, 順序짓기등의 基本的 操作을 包含하는 行動을 敎育의 初期에 强調할 必要가 있다는 結論에 이르게 된다. 이러한 論理的 操作은 모든 數學的 科學的 操作의 基礎로 되어 있음에 主目해야 할 것이다. 따라서 B. Inhelder[17)]의 主張처럼 國民學校 抵學年에서의 數學指導는 豫備段階로서 pre-curriculum에 依하는 것이 바람직한 것이다.

Piaget는 基本的인 論理數學的 構造의 自發的이고 漸進的인 構成이 存在하고, 이러한 自發的 構成과 現代數學 自體의 論理的 構成사이에 平行性을 主張하고 있다. 이는 數學的 思考를 하기 爲해서는 몇몇 사람만이 所有한 特別한 天賦的 素質이 必要하다고 하는 생각을 否定하는 것이며, 人間의 頭腦는 아주 一般的인 數學的 構造로써 自發的인 思考를 할 수 있다고 하는 解釋을 可能하게 한다. 또한 現代數學의 基本槪念은 自發的 思考에 보다 親近하므로 이를 早期 導入하려는 傾向은 正當하다는 解釋이 可能하다. 또한 心理的 發達 順序가 公理的 展開 順序에 가까우므로 歷史的 發達 順序보다 論理的 展開 順序에 따라 指導하는 것이 바람직하다는 解釋이 된다. 이는 Haekel의 再現의 法則을 擁護하여 數學敎育에서 歷史的 觀點의 重要性을 强調한 F. Klein의 主張[18)]과 反對되는 것이다.

그러나 한편 兒童의 自發的인 行動 및 操作의 構造는 論理數學的이며 어린나이일수록 數

16) Piaget(1975), *Introduction à l'épistémologie génétique*, tome 1, La pensée mathématique, 田邊振太郎, 島雄元譯, ジャン・ピアジェ發生的認識論序說, 第一卷, 數學思想, 三省堂, p. vii.
17) J. S. Bruner(1963), *The Process of Education*, Vintage Books, p. 46.
18) F. Klein(1928), *Elementormathematik vom höhreren Standpunkte aus*, Julius Springer.

學의 보다 基本的인 構造와 近似하나, 兒童은 이를 構造로서 意識하고 있지 못하다. 數學의 授業은 兒童을 數學的 構造에 대한 反省에로 誘導하는 過程에서 極히 特殊한 記號와 抽象的인 專門用語를 使用하고 있다. Piaget는 여기에 實際的인 問題가 있다고 보고 數學敎育의 中心問題는 知能에 固有한 自發的 操作의 構造와 指導되는 數學 領域에 關한 curriculum 및 方法과의 相互調整의 問題라고 말하고 있다.[19] 解決하기 어려운 實際的 問題는 敎師가 그 自身의 言語로 理解하고 있는 一般的인 形態의 觀念과 兒童이 自發的으로 構成하여 使用하지만 反映의 對象이나 一般化의 原泉이 되지 못하는, 같은 槪念의 特別한 경우를 어떻게 結合시키는가 하는 것이다.

이러한 問題와 關連해서 소위 操作的原理[20] 라고 하는 理論에 主目해 볼 수 있다. 이는 Piaget의 理論의 敎育에의 한 適用이며 H. Aebli에 의해 이끌어내져 A. Fricke가 特히 計算敎育에서 그 實現에 實際的 寄與를 한 理論이다. Piaget에 의하면 具體的 對象에 對한 論理數學的 活動은 知能의 밑을 이룬다. 이런 活動을 通해서 內面化된 活動 즉 具體的 操作이 생긴다. 그리하여 可動的인 操作體系 즉 groupement로 統合된다. 可動性은 合成可能, 可逆性, 結合性質 등으로 表示된다. 問題의 理解와 解決은 知識을 關係體系로 可動的으로 柔軟하게 組織하는 敎育을 通하면 自然스럽게 達成된다. 따라서 이러한 操作體系 즉 groupement의 諸特性을 兒童의 數學的 學習 活動의 構成 基準이 되도록 하는 敎育的 措置를 操作的 原理라고 하는 것이다.

Piaget의 發生的 認識論은 計劃的인 指導가 없는 狀態에서의 內的 成長에 依한 自發的인 成長 理論처럼 보인다. 또한 이러한 內的 成長의 자취를 따라서 可能하게 된 것을 指導하는 경우에만 意味가 있는 것처럼 보인다. 따라서 Piaget의 發達段階의 年齡區分을 敎育內容과 關連시키려고 하는 傾向이 있다. 그러나 이는 Piaget의 基本的인 觀點이 內的 成長은 主體와 客體사이의 同化와 調節이라고 하는 繼續的인 適應作用에 의해서 決定된다고 하는 것임을 忘覺한 所致이다. 敎育의 領域은 Piaget의 硏究結果에 依해 결코 작아지거나 威脅을 받지 않는다. 問題가 되는 것은 敎育方法과 手段이다. Piaget의 硏究는 兒童의 內的 成長 法則을 理解하고 그에따라 그를 指導案內하지 않으면 안된다고 하는 것을 보다 明確히 보여주고 있다. 그의 均衡理論에 依하면 知能의 發達은 同化와 調節을 通해 均衡을 達成하려고 하는 dynamic한 過程이므로, 一時的인 反應이 아닌 持續的이고 一般化가 可能하며 새로운 狀況에의 傳移 可能性을 가진 學習은 漸進的인 構成으로써만 達成될 수 있다. 그러나 知的 發達은 身體的 環境的 敎育的 條件의 函數로서 促進될 수도 遲延될 수도 있다고 하는 것이므로 受動的으로 기다리는 대신에 能動的으로 도와주지 않으면 안되는 것이다. 結局 指導하는 兒童의 論理를 考慮하면서 積極的으로 誘導해 나가는 發見學習法이 바람직하다는 結論이 된다.

Ⅳ. Piaget의 自然數槪念에 關한 硏究: 위에서 考察한 Piaget의 數學的 認識論에 비추어보면 그가 數槪念의 根據를 수세기나 image에 두지 않고 行動 및 操作과 關連된 心的 構成에 둔 것은 當然하다. 그는 自身의 硏究의 範圍를 論理的 操作과 關連된 數의 構成 問題에 限定했다고 하면서 數의 構成은 論理的 操作의 發達과 並行하며 數以前 時期는 論理的 操作 以前 水準에 對應한다고 하는 것이 그의 假說이라고 分明히 記述하고 있다.[21]

19) Piaget, *Science of Education and the Psychology of the Child, op. cit.*, p. 45.

20) A. Fricke, H. Besuden, *op. cit.*

21) Piaget(1965), *La genèse du nombre chez L'enfant*; *The Child's Conception of Numser*, W.W. Norton & Company, Inc., p. viii.

그는 먼저 自然數를 論理的 實體로부터 이끌어 내고 있는 여러가지 理論을 檢査하여, 自然數의 形式的 理論은 거의 전부가 classe와 順序關係에 呼訴하고 있음에 主目하고 特히 Russell의 理論을 批判하여 그의 獨特한 數槪念을 確立했다.[22] Russell은 自然數 槪念을 基數와 順序數로 區分하여 單一槪念으로 定義하고 있지 못하며, 數를 個別的으로 定義하는 結果가 되어 récurrence를 輕視함으로써 數列의 基本的인 性質을 疎忽히 다루었다고 批判하고 있다. 또한 一對一對應에는 要素의 性質의 類似性에 根據한 correspondences qualifiées와 非個性的인 correspondences quelconques의 두가지가 있음을 指摘하면서 心理學的 觀點에서 前者로부터 後者로 發達하기 爲해서는 要素의 性質을 抽象하지 않으면 안되는데, 그렇게 되면 各 要素는 單位로 되며 따라서 數 1을 假定하는 것이 되어 一對一對應에 依한 方法은 惡循環에 빠진다고 批判하고 있다.

classe에서 要素의 性質이 捨象될 때 各 要素가 區別되는 것은 空間的 時間的 順序에 依해서이다. 따라서 自然數를 classe와 非對稱推移關係의 綜合(synthése)라고 보지 않으면 안된다는 것이 그의 主張이다. 그리하여 그의 數學的 認識論에 따라 發生的 觀點에서 自然數體系는 classe의 加法 groupement와 非對稱推移關係의 加法 groupement가 要素의 性質을 捨象함으로써 可能하게 된 綜合이라고 解釋하고 있다. 이 때 要素는 相等하고 ordre vicariant에 의해서만 區別되는 單位가 되고, 그런 要素로 된 classe의 emboitements와 系列化의 綜合이 數系列이라는 것이다.[23] 여기서 特히 synthése라고 하는 觀念에 主目하지 않으면 안된다. 이는 論理的 演繹과 反對되는 것으로 그의 數槪念 定義의 核心的인 觀點이기 때문이다.

Piaget는 모든 경우에 數學的인 것의 理解에는 어떤 것의 保存이 必要한 條件으로서 假定되고 있다고 보고 數의 保存이라고 하는 獨特한 槪念을 導入하고 있다. 集合의 保存의 缺如는 수세기의 無意味性 및, 一對一對應이 必然性을 缺한 知覺的 圖像에 지나지 않는다는 것을 意味하므로 保存의 缺如는 진정한 數槪念의 缺如를 意味한다고 하는 것이다. 따라서 그는 數獲得의 最小限의 準據로서 2個의 集合(要素가 5~7個)을 一對一對應에 依해서 對等性 如否를 보일 수 있고, 一但 對等하다는 것을 알았을 때 對等性은 要素의 配列에 無關하게 保存된다고 생각하는 경우를 들고 있다.[24] 그리고 對等關係가 理解되면 보통 數槪念의 理解에 必要하다고 생각하는 對等關係의 推移性의 理解도 同時에 可能하게 된다고 主張한다. 그러나 참다운 數의 獲得은 單位의 反復에 依해서 새로운 數를 繼續 發生시키는 可能性 즉 récurrence를 理解하는 경우라고 말한다.

그런데 全體의 保存이 있다고 하는 것은 全體는 部分의 集合이고 그 部分은 任意로 配列할 수 있다는 觀念을 가지고 있는 것이므로 部分과 全體의 關係는 이 保存을 構成하는 論理的 關係이다. 따라서 單位 反復에 依한 數의 構成은 emboitements의 系列의 構成이므로 數가 構成되기 爲해서는 保存되는 全體내에 部分을 겹쳐 끼워넣는 것과 系列化라고 하는 두가지 條件이 만족될 必要가 있는 것으로 된다. 그런데 이런 classe의 包含關係, 系列化 및 保存을 可能하게 하는 要因이 思考의 可逆性 즉 操作의 達成이라고 主張한다.[25]

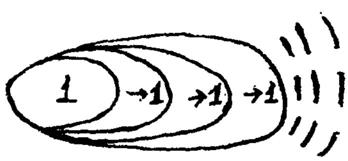
한편 自然數는 單位의 可法的 合成이다. 또

---

22) E. Beth. J. Piaget, *op. cit.*, pp. 259~280.

24) E. Beth, J. Piaget, *op. cit.*, pp. 259~260. Piaget(1953), *La genèse du nombre chez L'enfant,* Initiation au calcul, Editions Bourrelier, pp. 5~20. 25) Piaget, *Ibid.*

23)



한 $F_1 \sim V$, $F_2 \sim V$일 때 $F_1 \cup F_2$는 V와 2對1로 對應되며 $n(F_1 \cup F_2) = 2.n(V)$이므로 一對一對應 自體는 心理學的 觀點에서 보면 乘法을 隨伴한다고 하면서 加法的 操作과 乘法的 操作이 數에 이미 包含되어 있다고 主張하고 있다.

La genèse du nombre chez L'enfant(1941年)는 以上과 같은 그의 理論的 研究의 結果인 假說을 確認해 보이기 爲한 것으로서, 크게 나누어 保存實驗, 一對一對應과 順序對應에 關한 實驗, 基數와 順序數의 關係, 全體와 部分의 關係 및 推移性과 같은 論理的 關係에 關한 實驗, 數의 可法的 乘法的 構成에 關한 實驗으로 分類할 수 있다. 이러한 實驗을 통해서 그는 數, classe, 非對稱關係의 構成이 비슷한 三段階 즉 非形成期, 直觀的인 移行期 操作的 取扱期의 三段階를 서로 對應하면서 通過하며 同時的이고 相互 關連性을 갖는 相補的인 單一한 發達過程을 이룬다고 記述하고 있다.

그러나 이는 그의 性急한 主張이며 후에(1960年) problèmes de la construction du nombre에서, 그러한 同時性과 相互關連性 如否는 數 構成에 關한 研究의 中心的인 問題이지만 研究하기가 매우 困難한 問題로 아직 未解決인채 남아있다고 記述하고 있음에 主目해야 한다.[26)]

V. 自然數槪念 指導의 歷史와 Piaget의 研究의 位置 : Piaget의 自然數槪念 研究의 敎育的 意義를 확실히 하기 爲하여 獨逸을 中心으로 19世紀 以後의 數槪念 指導의 歷史를 간단히 살펴보기로 한다.[27)]

19世紀는 數槪念의 本質과 發達에 대한 극심한 見解의 差異로 많은 論爭이 있었고 그에 따라 計算指導의 方法論이 매우 多樣했던 시대였다.

直觀主義者(Anschauungsmethodiker)는 數槪念은 事物의 直觀으로부터 抽象을 통해 생긴다고 主張했다. 그들은 數의 把握은 몇개의 整列된 對象이 있을 때 한눈에 同時的(simultan)으로 일어난다고 보아 數圖(Zahlbilder)가 數槪念 指導에 適當하다고 主張했다.

數세기主義者(Zählmethodiker)는 數란 本質的으로 全體的으로 一列로 정돈 되어 있고 모든 各 數는 先行하는 數에 1을 더하여 생기며 정해진 位置를 갖고 있기 때문에 各數를 想像하려면 1로부터 그 位置까지 數列을 통해 마음속으로 달려야 한다고 보아 自然數 槪念은 數세기를 통해 系列的으로 把握된다고 主張했다.

結局 이 두 相反되는 主張은 數槪念의 發生에 있어서 集合數와 順序數 중 어느것이 優先的인가에 對한 見解의 差異에서 비롯된 것으로 볼 수 있다.

直觀主義에는 두가지 形態 즉 綜合的方法(synthetische Methode)와 個別的取扱法(monographische Methode)가 있었다. 綜合的方法은 1로부터 시작하여 1씩 첨부하면서 10까지 차례로 取扱한 후 計算을 다루는 方法이다. 個別的取扱法은 數를 個個의 獨立的인 것이라고 보고 또한 計算은 사물을 다룰 때 同時에 可能하다고 보아 一定한 數의 範圍內에서 數의 分割, 덧셈, 뺄셈, 빈자리채우기等을 따로따로 다루는 方法이다. 例를들어, 먼저 1, 그 다음에 2를 차례로 具體物, 손가락, 數圖순으로 바꾸어 抽象하여 數字로 나타낸 후 곧바로 $1+1$, $1-1$, $2-1$, $2=1+\square$, $2-2$, $1=2-\square$, $2-1-1$ 等을 다루는 것으로, 4까지 나가면 무려 40가지의 셈이 可能하게 되는 것이다.

1916年 J. Kühnel은 이 두 相反되는 主張의

26) Études d'épistémologie génétique, XI, problèmes de la construction du nombre, Presses Universitaires de France, (1960).

27) 이 內容은 K. Odenbach, (1970), *Zur Einführung*, Rechenunterricht und Zahlbegriff, Westermann Taschenbuch, ss. 7~17을 주로 參考했다.

調整을 試圖하였다. 數세기를 보다 基本的인 것으로 보아 數세기로 시작한 다음 數圖로써 數의 同時把握을 하게 하고, 數와 數字를 區分하여 數字는 數概念이 形成된 후 導入해야 한다고 主張했다. 또한 數와 計算을 區分하고 困難度를 이유로 計算式의 指導를 1學年末이나 2學年初로 연기할 것을 主張했다.

1929年 數學者이자 心理學者인 J. Wittmann은 全體的計算(ganzheitliches Rechnen)이란 方法을 提示했는데[28] 그의 提案은 많은 論議를 불러 일으키고 第2次 世界大戰以後 西獨의 數와 計算敎育에 至大한 影響을 끼쳤다. Wittmann은 數概念에 對해 다음과 같이 主張했다. 數概念은 要素의 性質과 無關係하며 要素의 空間的 時間的 配列과도 無關係한 集合과 關連된다. 要素가 保存되는 集合사이의 比較로부터 集合의 濃度(Mächtigkeit)가 區分된다. 比較가 확실하지 않을 때 많다 적다등의 濃度概念이 생긴다. 明確히 比較된 경우의 濃度概念이 集合數이다. 이 概念은 數詞, 數字를 통해 固定化된다. 따라서 Witmtann은 數가 단지 知覺에 依해 事物로부터 抽象된 集合의 性質이라는데 反對하고, 兒童의 自己活動을 통해 얻어지는 純粹한 思考의 構成物이라고 主張했다. 그리하여 數圖의 사용에 反對했다. 또한 數세기는 數概念을 前提로 하며, 數概念이 없는 數세기는 機械的인 言語的 行動에 지나지 않으므로, 數세기는 數概念이 形成되었을 때 比較的 늦게 導入될 수 있는 것이라고 하면서 數세기主義도 단호히 拒否했다. 그는 數概念의 指導 段階를 다음과 같이 提示했다. 要素의 性質 및 配列形態와 無關한 集合 즉 非個性的인 集合의 理解→不確定한 集合의 比較→一對一對應에 依한 明確한 濃度比較와 數概念 및 數詞, 數字에 依한 概念의 固定化→計算 및 十進記數法.

이러한 Wittmann의 硏究는 基本的으로 Cantor, Frege, Russell等의 影響을 받은 論理主義的 立場에 서는 것으로 the New Math의 모델로 提示된 SMSG 敎科書의 指導方法과 크게 일치하고 있어 오늘날의 數概念 指導의 根幹을 이루는 아이디어로 되어 있는 것은 매우 興味있는 일이다.

K. Odenbach는 Wittmann과 Piaget의 硏究를 比較하여 이들은 서로 交際가 전연 없었음에도 불구하고, 數概念은 靜的인 對象으로부터 抽象에 依해 얻어지는 것이 아니고 操作的 行爲에 依해서 構成되는 것이며, 數세기를 할 수 있는 入學期의 兒童은 保存概念을 갖고 있지 못하기 때문에 眞正한 數概念을 갖고 있지 않다는 等 많은 一致點이 있음을 指摘하고 있다. 그러나 Piaget의 硏究는, 學習心理學的인 Wittmann의 硏究와는 出發點부터 다른 것으로, 그의 發達心理學的 硏究結果로부터 兒童의 論理와 合致하는 學習을 위한 結論을 이끌어내는 問題는 그대로 存在하는 것이다.

Ⅵ. Piaget의 自然數概念에 對한 硏究結果의 敎育的 解釋: Piaget에 依하면 自然數系列은 具體的 操作期가 시작되는 6.5歲~7歲頃에 接近할 수 있는 classes의 加法 groupement와 系列化 groupement라고 하는 2가지 操作體系의 綜合이다. 즉 自然數列은 兒童 自身의 操作體系로부터 나오는 內生的인 自發的 構成이라고 하는 것이다. 바꾸어 말하면 自然數概念의 發達은 이 知的水準에서 接近할 수 있는 操作의 實現의 結果라고 보고 있으므로 敎育的으로 重要한 것은 論理·數學的 經驗을 시키는 것이다. 結局, 數概念의 指導는 原則的으로 自發的 構成에 重點을 두어야 할 것이며, 그 操作의 達成을 爲해 結合(分離), 包攝, 順序짓기, 짝짓기 等에 對한 活動을 pre-curriculum의 形態로서 시키는 것이 매우 必要하다고 하는 結論에 이른다. 現在의 指導方法과 그러한 指導의 主要한 差異는, 集合→짝짓기(corr. qualifiées→corr. quelconques)→

28) J. Wittmann, *Theorie und Praxis eines ganzheitlichen Unterrichts, op.cit.*

cardinal number→數系列→順序數→數의 加法的 分割의 順으로 意圖的으로 直接 指導하기 爲한 方法이냐 아니면 兒童에 依한 自發的 操作의 構成을 돕기 爲해서 前數的 活動으로서 集合의 比較, 結合, 分離, 짝짓기, 順序짓기 等의 活動을 長期間시키느냐의 問題이다.

Piaget는 classe 혹은 順序關係가 數의 構成에 先行한다고는 보고 있지 않다. 그는 自然數를 classe와 順序關係의 綜合이라고 假定하고 있다. 이는 論理主義者의 立場에서 出發했지만 그의 特有한 發想에 依해서 이끌어내린 結果이다. 따라서 그의 認識論은 一般的으로 數學의 論理的 展開順序에 따른 指導方法을 뒷받침하고 있지만, 이것은 自然數의 경우에는 들어맞지 않는다. 오히려 集合, 順序關係, 一對一對應 操作을 서로 關連시키면서 그 調整을 增進시키는 指導方法을 뒷받침하고 있는 것이다.

自然數에는, 現在 强調되고 있는 cardinal number 以外에 過去의 敎授法의 根據였던 counting number와 measuring number, 數의 構造的 側面인 reckoning number, 關係的 側面인 operator 等의 複雜한 側面을 갖고 있으므로 實際 敎育面에서 이들을 無視하여 어느 한 側面을 强調하는 것은 過去와 같은 論爭을 되풀이 할 危險性이 있으며 바람직하지 않다. 이러한 것은 Piaget의 數槪念 硏究의 敎育에의 適用에 있어서도 생각하지 않으면 안될 注目해야 할 觀點이다.

the New Math 運動以來 지금까지 cardinal number 理論을 初等化 하는 것이 自然數 槪念의 敎育的 問題를 解決하는 것이라고 믿어왔다. 數세기가 可能한 入學期의 兒童의 大部分이 數의 保存을 理解하고 있지 못한 것을 보인 Piaget의 硏究果結는 그러한 指導方法의 心理學的 根據로서의 役割을 해온 것으로 認識되고 있다. 그러나 Freudenthal의 主張과 같이[29] 入學期의 兒童이 counting number와 cardinal number와의 關連性을 理解할 수 없다해도 그다지 큰 問題는 아닐지도 모른다. 또한 van Hiele의 非難처럼[30] 一對一對應 아래에서의 不變性을 强調하는 것은 어른의 觀點에서의 解釋일런지도 모른다. 現在 cardinal number 槪念은 入學期의 兒童의 마음을 再構成하려고 하는 手段으로 되어 있지만, 實際 그러한 指導를 하여도 兒童은 數를 對等한 集合의 classe로서는 認識할 수 없다고 생각한다. 兒童이 一對一對應에 依해서 對等性을 發見하고, 對等한 集合의 數의 保存을 理解하게 되는 것은 Piaget에 依하면 兒童이 具體的 操作期에 들어갔기 때문이며, 그러한 指導의 結果라고 主張할 根據는 없다. 또한 Piaget는 그의 硏究의 어디에서도 cardinal number aspect를 强調하고 있지는 않으며, 오히려 自然數를 classe와 順序關係의 綜合이라고 하여 相異한 立場을 취하고 있는 것이다. 또한 récurrence(數學的歸納法의 原理)의 理解를 진정한 數의 理解라고 보고 있는 그의 觀點에서 볼 때, 數學的인 重要性에 비추어 數系列과 récurrence를 强調하는 것이 그의 硏究結果에 따르는 指導라고 볼 수가 있는 것이다. 結局 保存의 缺如라고 하는 것은 pre-curriculum에 依해 論理的 操作의 基礎를 마련함으로써 解決해야 할 問題이지, 그로 말미암아 Piaget의 數槪念에 對한 硏究 全體가 cardinal number를 强調하는 指導의 根據가 된다고 解釋할 수는 없는 것이다.

Piaget는 길이의 測定槪念은 數槪念보다 조금 늦게 構成되지만 같은 操作이라고 記述하고 있다.[31] 區間의 分割은 classe의 emboîtements와 對應하고, 單位의 轉寫는 系列化에 對應하며 數의 發生의 경우와 같이 이 두

29) H. Freudenthal, *op. cit.*, p. 191.

30) P. M. van Hiele(1970), *Piagets Beitrag zu unserer Einsicht in die kindliche zahlbegriffsbildung*, Rechenunterricht und Zahlbegriff, Westerman Taschenbuch, ss. 105～131.

31) Piaget, *La genèse du nombre chez L'enfant* L'enfant, *op. cit.*

操作이 하나로 融合된 것이 測定이라고 主張하고 있는 것이다. 이러한 그의 硏究 結果는 measuring number로서의 自然數 槪念에 對한 그의 立場을 나타내는 것으로 解釋된다. 그의 이러한 主張은 測定을 통해서 數槪念이 생긴다고 생각하여 數槪念形成의 手段으로서의 測定의 重要性을 論한 Dewey의 主張과 연결되는 것이다.[32]

Piaget는 加法的 操作과 乘法的 操作이 數에 包含되어 있다고 主張하고 있다. 그리고 數의 構成은 可逆的 思考의 發達과 함께 可能하게 된다고 主張하고 있다. 이러한 點은, 數槪念→數의 加法的分解→덧셈→뺄셈→곱셈이란 現在의 指導方法의 心理學的 妥當性에 疑問을 提起하는 것이다. 이러한 것은, pre-curriculum에서 集合의 加法的 結合과 分解, 및 乘法的 取扱을 한 後, 數의 導入과 거의 同時에 數의 加法的 乘法的 分解를 取扱하는 것과, 그 逆操作인 덧셈, 뺄셈, 곱셈을 될 수 있는 한 빨리 導入하는 것이 心理學的으로 보다 自然스런 方法임을 말해주는 것으로 解釋할 수 있다.

本人은 兒童의 數學學習에 있어서 敎具의 重要性을 생각하여, 이상과 같은 Piaget의 硏究 結果에 보다 忠實한 自然數 槪念 學習에, 보다 잘 들어맞는 敎具는 무엇인가를 생각해 보는 것으로 이 考察을 마치고자 한다. 本人은 다음과 같은 根據에서 cuisenaire rods가 Piaget의 硏究結果가 示唆하는 數槪念 指導를 위해 뛰어난 敎具라고 생각한다. 첫째 Piaget 自身이 말하고 있는 것처럼[33], 特히 色彩때문에 形象的側面(知覺, 模倣, 心像)을 優先시킬 危險이 있지만, 數의 操作과 同型인 實際的인 取扱을 쉽게 할 수 있기 때문에 兒童 自身에 依해 能動的 操作的 方法으로서 이용되는 경우 兒童의 自發的 操作을 發達시키는데 뛰어난 敎具이다. 둘째 cuisenaire rods를 취급하는 活動은 E. Wittman에 依하면[34] 이 水準에서의 兒童의 操作體系인 groupement를 이루고 있으므로, 소위 操作的 敎具로서 理想的이다. 셋째 自然數의 여러가지 側面 즉 cardinal number, ordinal number, counting number, measuring number, operator 等의 諸側面을 相互關連지우는 指導를 보다 훌륭히 할 수 있는 可能性이 있는 敎具이다. 끝으로 自然數의 四則計算 및 分數의 指導等에 매우 뛰어난 敎具란 長點을 갖고 있기 때문이다.

32) 平林一榮(1961), *The Place of Dewey's psychology of Number' in the History of Arithmetic Education,* Journal of Japan Society of Mathematical Education, Reports of Mathematical Education, I, pp. 57~67.

33) Piaget, *Science of Education and the Psychology of the Child, op. cit.,* p. 49, p. 73.

34) E. Wittman(1973), *The Concept of Grouping in Jean Piaget's Psychology-Formalization and Applications,* Educational Studies in Mathematics, **5**, pp. 125~146.