

<技術論文>

單純支持 및 固定된 直四角形平板의 非線型振動

李 樂 周\* · 金 凡 洙\*\*

(1977年 11月 15日 接受)

Large Amplitude Nonlinear Vibration of Rectangular Plates with Simply Supported and Fixed Edges

Nack Joo Lee, Beom Soo Kim

Abstract

In this paper, approximate solutions of the von Karman equations for the free flexural vibration of a transversely isotropic thin rectangular plate with two simply supported edges and two clamped edges are obtained. Applying one term Ritz-Galerkin procedure, the spatial dependent part of the equations is separated and time dependent function is found to be the Duffing's equation. Then the relation between nonlinear period and amplitude of the vibration is obtained by using averaging method which is a method of the perturbation procedure. It can be seen that averaging method is easy and agrees well with prior results.

1. 緒 論

얇은 平板의 진동을 연구할 때, 진동의 진폭이 판의 두께보다 적을 경우에는 비선형 항인 中央面에서의 인장력, longitudinal inertia, rotary inertia, shear deformation 등을 무시하고 선형이론으로 풀 수가 있다. 그러나 진폭이 판의 두께보다 커질 경우에는 보다 복잡한 진동현상, 예를 들어 진동수와 진폭의 함수관계, jumping 현상등이 나타나며 비선형 진동해석이 필요하다. 평판의 large deflection theory는 1910년 von Karman에 의해 처음으로 만들어졌다. 그는 비선형 요인중 stretching에 의한 영향을 고려하여 이른바 von Karman 방정식을 세웠다. 이 식은 여러 사람에 의해 差分法, 級數解法, double Fourier expansion, per-

turbation procedure 등의 방법으로 간단한 경계조건과 하중조건의 평판의 처짐을 계산하는데 이용되었다. 필선 후에 이 식은 Herrmann<sup>1)</sup>에 의해 판의 진동해석에 이용되었으며 그는 이 비선형 평판진동방정식을 單純支持된 사각평판에 적용하여 perturbation 方法과 에너지法의 두가지로 풀 결과가 일치함을 보였다. 그러나 이 비선형 미분방정식은 coupled되어 있기 때문에 풀기가 어려워 간단한 경계조건을 가진 판의 진동해석에만 이용되었다. Yamaki<sup>2)</sup>는 모든 변이 固定 및 單純支持된 사각평판의 자유진동과 강제진동에 관해 一項近似解를 구했고, Eisley<sup>3)</sup>도 같은 경계조건을 가진 판에 처음부터 인장력이 가해진 상태하의 진동을 연구했다. Crose와 Ang<sup>4)</sup>은 원판의 비선형진동에 대하여, Bauer<sup>5)</sup>는 충격에 의한 강제진동을 사각평판과 원판의 여러가지 경계조건에 대해 연구했다.

한편, Berger<sup>6)</sup>는 von Karman 방정식에서 coupled되어 있는 항이 평판의 中央面에서의 變形度의 2次不變量의 first variation항을 무시함으로써 없앨 수 있다는 사실을 발견하고, 두개의 quasi-linear한 방정식을 세웠다. 그는 이 새로운 방정식으로 원판과 사각평판의

\* 正會員, 서울大學校 工科大學

\*\* 서울大學校 大學院

本 論文에 대한 討論은 1978年 2月 15日까지 本學會 事務所로 送付하여 주십시오.

저점을 계산하여 von Karman식의 다른 사람의 결과 비교하였다. 그후 Berger의 식은 Nash와 Modeer<sup>7)</sup>에 의해 사각평판의 진동에 이용되었고 그들은 그 결과를 Chu와 Herrmann의 결과와 비교하였다. Wah<sup>8)</sup>와 Gajender<sup>9)</sup>는 원형평판의 진동을 연구하였다.

도 非線型項중에서 지금까지 무시된 transverse shear와 rotary inertia의 영향을 고려해서 더욱 복잡한 방정식을 만든 Mindlin<sup>10)</sup>이 있고, Berger의 방정식에 transverse shear와 rotary inertia의 영향을 고려한 Wu와 Vinson<sup>11)</sup>이 있다. 이들 방정식은 너무 복잡하여 아직 실용적인 해를 못구했다.

여기에서는 마주보는 변끼리 單純支持되어 있고 또 다른 변끼리 固定되어 있는 사각평판의 von Karman 진동 방정식을 Ritz-Galerkin 방법을 사용하여, Duffing 방정식으로 나타나는 시간에 관한 함수로 공간좌표에 관한 함수와 분리하고 perturbation procedure의 하나인 averaging method로써 주기와 진폭과의 함수관계를 이끌어 내었다.

### 2. 基本方程式

완전히 탄성적이고 균질, 등방성인 얇은 균일두께  $h$ 인 평판의 변에 수직인 방향의 진동에 관한 von Karman 방정식은

$$\nabla^4 F = E \left\{ \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 - \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right\} \quad (1)$$

와

$$D \nabla^4 F + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = h \left( \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \right) \quad (2)$$

이다. 여기서

$$\nabla^4 = \frac{\partial^4}{\partial x^4} + \frac{\partial^4}{\partial y^4} + 2 \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2}$$

$$D = \text{판의 굽힘 강성} = E h^3 / 12 (1 - \nu^2)$$

이다.

이 식에서는 longitudinal inertia와 rotary inertia의 영향은 무시되었다. 이제 폭과 길이가 각각  $a, b$ 인 사각 평판이 한쌍의 변은 固定되어 있고, 다른 쌍의 변은 單純支持되어 있다. 좌표는 그림과 같이  $x, y$  좌표의 원점은 판의 중심에 있고  $x, y$  평면은 판의 中央面에 있다.

지금 그림과 같이  $x = \pm a/2$ 에서 固定되어 있고  $y = \pm b/2$ 에서 單純支持되어 있는 문제를 생각하기로 한다.

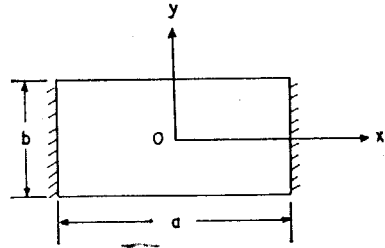


Fig. 1. Coordinate System

이와 같은 지지조건에 따른 경계조건식은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} x = \pm a/2 \text{에서 } w = 0 \text{이고 } \frac{\partial w}{\partial x} = 0, \\ y = \pm b/2 \text{에서 } w = 0 \text{이고 } \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0. \end{aligned} \quad (3)$$

한편 지지대가 자유로이 움직일 수 있는 stress-free인 경우와, 고정되어 있는 immovably constrained인 경우의 두가지가 있다. 조건식은

stress-free인 경우는

$$\begin{aligned} x = \pm a/2 \text{에서 } N_x = 0, N_{xy} = 0, \\ y = \pm b/2 \text{에서 } N_y = 0, N_{xy} = 0, \end{aligned} \quad (4)$$

이고 immovably constrained인 경우에는

$$\begin{aligned} x = \pm a/2 \text{에서 } u = 0, N_{xy} = 0, \\ y = \pm b/2 \text{에서 } v = 0, N_{xy} = 0, \end{aligned} \quad (5)$$

이다. 여기서  $N_x, N_y, N_{xy}$ 는 판의 應力  $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_{xy}$ 를 판의 두께에 관해 적분한 stress intensity이다.  $u$ 와  $v$ 는 각각  $x, y$  방향의 변위를 나타낸다. (4)식과 (5)식은 Airy stress function  $F$ 로 표시할 수 있으며 다음과 같다.

stress-free일 때

$$\begin{aligned} x = \pm a/2 \text{에서 } \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = 0, \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = 0, \\ y = \pm b/2 \text{에서 } \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = 0, \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = 0, \end{aligned} \quad (6)$$

이고 immovably constrained인 경우에

$$\begin{aligned} x = \pm a/2 \text{에서 } u = 0, \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = 0, \\ y = \pm b/2 \text{에서 } v = 0, \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = 0, \end{aligned} \quad (7)$$

이다. (5)식과 (7)식에서 변위  $u, v$ 는 다음 식으로 표시된다.

$$\begin{aligned} u = \int_0^x \left\{ \frac{1}{E} \left( \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} - \nu \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \right) - \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right\} dx, \\ v = \int_0^y \left\{ \frac{1}{E} \left( \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - \nu \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \right) - \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right\} dy, \end{aligned} \quad (8)$$

3. 近似解

(1)식과 (2)식의 von Karman 방정식을 만족하는 해를 구하고자 (3)식의 경계조건을 만족하는  $w$ 를

$$w(x, y, t) = hf(t) \cos^2\left(\frac{\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{\pi y}{b}\right) \quad (9)$$

와 같이 가정한다. 이 식에서  $f(t)$ 는 아직 미지인 시간에 관한 함수이다. 그리고  $hf(t)$ 는 진폭을 의미한다.  $w$ 와 마찬가지로 Airy stress function  $F$ 도 시간과 공간에 관한 항으로 분리하여

$$F(x, y, t) = F^*(x, y) f^2(t) \quad (10)$$

로 가정한다. 이와같이 가정된  $w$ 와  $F$ 를 (1)식에 대입, 정리하면,

$$\begin{aligned} \nabla^4 F^* = & -\frac{\pi^4 E h^2}{2a^2 b^2} \left\{ \cos\left(\frac{2\pi x}{a}\right) + \cos\left(\frac{2\pi y}{b}\right) \right. \\ & + \cos\left(\frac{2\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{2\pi y}{b}\right) \\ & \left. + \cos\left(\frac{4\pi x}{a}\right) \right\} \quad (11) \end{aligned}$$

이 된다. 이 식의 해  $F^*$ 는 식 (11)과 경계조건 (6)과 (7)에서 구할 수 있다. 그 결과는

stress-free인 경우,

$$\begin{aligned} F^*(x, y) = & -\frac{E h^2}{32} \left\{ \frac{a^2}{b^2} \cos\left(\frac{2\pi x}{a}\right) \right. \\ & + \frac{b^2}{a^2} \cos\left(\frac{2\pi y}{b}\right) \\ & + \frac{a^2/b^2}{(1+a^2/b^2)^2} \cos\left(\frac{2\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{2\pi y}{b}\right) \\ & \left. + \frac{a^2}{16b^2} \cos\left(\frac{4\pi x}{a}\right) \right\} \quad (12) \end{aligned}$$

이고 immovably constrained 경우에

$$\begin{aligned} F^*(x, y) = & \frac{\pi^2 E h^2}{16(1-\nu^2)} \left\{ \left(\frac{\nu}{a^2} + \frac{3}{4b^2}\right) x^2 \right. \\ & + \left(\frac{1}{a^2} + \frac{3\nu}{4b^2}\right) y^2 \left. \right\} \\ & - \frac{E h^2}{32} \left\{ \frac{a^2}{b^2} \cos\left(\frac{2\pi x}{a}\right) \right. \\ & + \frac{b^2}{a^2} \cos\left(\frac{2\pi y}{b}\right) \\ & + \frac{a^2/b^2}{(1+a^2/b^2)^2} \cos\left(\frac{2\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{2\pi y}{b}\right) \\ & \left. + \frac{a^2}{16b^2} \cos\left(\frac{4\pi x}{a}\right) \right\} \quad (13) \end{aligned}$$

이다. 이들은 Yamaki<sup>12)</sup>의 결과와 같다. 위에서 구한  $F$ 와  $w$ 가 (2)식을 만족하는지는 아직 모른다. 이제 operator  $L$ 을 다음과 같이

$$\begin{aligned} L[w, F] = & D\nabla^4 w + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \\ & - h \left( \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right. \\ & \left. - 2 \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) \end{aligned}$$

로 표시하고 Ritz-Galerkin method를 사용하면 (2)식을 만족하는 해  $w$ 와  $F$ 에 대해 다음 식을 얻는다.

$$\int_0^{a/2} \int_0^{b/2} L[w, F] \cos^2\left(\frac{\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{\pi y}{b}\right) dx dy = 0. \quad (14)$$

이 식에  $w$ 와  $F$ 를 대입하고 적분하면 stress-free인 경우에

$$\begin{aligned} \rho h^2 \ddot{f} + \frac{16}{9} \frac{\pi^4 D h}{a^4} \left( 3 + \frac{3}{2} \frac{a^2}{b^2} + \frac{9}{16} \frac{a^4}{b^4} \right) f \\ + \frac{\pi^4 E h^4}{12a^2 b^2} \left( \frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{a^2} + \frac{a^2/b^2}{2(1+a^2/b^2)^2} \right. \\ \left. + \frac{a^2}{16b^2} \right) f^2 = 0 \quad (15) \end{aligned}$$

immovably constrained 경우에

$$\begin{aligned} \rho h^2 \ddot{f} + \frac{16}{9} \frac{\pi^4 D h}{a^4} \left( 3 + \frac{3}{2} \frac{a^2}{b^2} + \frac{9}{16} \frac{a^4}{b^4} \right) f \\ + \frac{\pi^4 E h^4}{12a^2 b^2} \left( \frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{a^2} + \frac{a^2/b^2}{(1+a^2/b^2)^2} \right. \\ \left. + \frac{9a^2}{16b^2} + \frac{3\nu + 2 \frac{b^2}{a^2} + \frac{9a^2}{8b^2}}{1-\nu^2} \right) f^2 = 0 \quad (16) \end{aligned}$$

의 식을 얻는다. 여기서  $\ddot{f}$ 는 시간에 대해 두번 미분한 것을 나타낸다. 이 식은 Duffing equation인  $\ddot{f} + \omega_0^2 f + \epsilon \omega_0^2 f^2 = 0$

의 꼴을 갖고 있고, 이 방정식들의 근사해를 구하기 위해서 averaging method의 한 방법인 Krylov-Bogolynov의 방법을 적용하여 얻을 수 있는 진폭과 각속도와 의 관계식<sup>13)</sup>

$$\omega = \omega_0 \left( 1 + \frac{3}{8} \epsilon A^2 - \frac{15}{256} \epsilon^2 A^4 \right) \quad (17)$$

을 이용한다. (15)식과 (16)식의 방정식에서  $\omega_0^2$ 과  $\epsilon$ 를 각각 구하면

stress-free인 경우

$$\begin{aligned} \omega_0^2 = & \frac{4}{9} \frac{\pi^4 E h^2}{a^4 (a-\nu^2) \rho} \left( 1 + \frac{1}{2} r^2 + \frac{3}{16} r^4 \right), \\ \epsilon = & \frac{3}{16} (1-\nu^2) \left( \frac{1 + \frac{1}{r^4} + \frac{1}{2(1+r^2)^2} + \frac{1}{16}}{1 + \frac{1}{2} r^2 + \frac{3}{16} r^4} \right) \quad (18) \end{aligned}$$

이고, immovably constrained인 경우

$$\omega_0^2 = \frac{4}{9} \frac{\pi^4 E h^2}{a^4 (1-\nu^2) \rho} \left(1 + \frac{1}{2} r^2 + \frac{3}{16} r^4\right)$$

$$\epsilon = \frac{3}{16} \left\{ (1-\nu^2) \left(1 + \frac{1}{r^4} + \frac{1}{2(1+r^2)^2} + \frac{1}{16}\right) \right.$$

$$\left. + \left(3\nu + \frac{1}{2r^2} + \frac{9}{8}r^2\right) \right.$$

$$\left. \times \left(1 + \frac{1}{2}r^2 + \frac{3}{16}r^4\right)^{-1} \right. \quad (19)$$

이다. 여기에서  $r = a/b$ 이다. (18)식과 (19)식을 (17)식에 대입하면 각각의 非線型진동의 角速度를 진폭의 함수로 얻을 수 있고, 주기  $T = 2\pi/\omega$ 의 식을 이용해서 선형주기  $T_0$ 와 비선형주기  $T$ 의 관계식

$$T/T_0 = \left(1 + \frac{3}{8}\epsilon A^2 - \frac{15}{256}\epsilon^2 A^4\right)^{-1} \quad (20)$$

을 얻을 수 있다.

4. 考 察

여기에서 사용한 averaging method의 적합성을 고려하기 위해 정사각형 평판의 모든 변이 單純支持되어 있고 immovably constrained되어 있는 경우에 계산한 Bauer<sup>5)</sup>의 결과

$$\omega_0^2 = \frac{\pi^4 E h^2}{3\rho(1-\nu^2)a^4}$$

$$\epsilon = \frac{3}{8}(3-\nu)(1+\nu)$$

에 averaging method를 사용하여 얻은 결과를 Herrmann<sup>1)</sup>의 결과와 비교하였다. 여기서 Herrmann과 같이  $\nu = 0.318$ 을 대입하면  $\epsilon = 1.3256$ 이다. 이때 선형주기와 비선형주기의 관계를 도식한 것이 그림 2이다. 또 이 논문에서 생각한 바와 같이 한쌍의 마주보는 변이 單純支持되어 있고 다른 한쌍의 변이 固定되어 있는 사각평판에 대한 주기 관계식을 모든 변이 固定되어 있는 사각평판의 경우와 모든 변이 單純支持된 사각 평판의 경우와 비교하기 위해 정사각형 평판( $r=1$ )인 경우에 (18), (19)식을 계산하여 (20)식의 관계식을 역시 그림 2에 도식했다.

stress-free인 경우

$$\omega_0^2 = \frac{3}{4} \frac{\pi^4 E h^2}{\rho(1-\nu^2)a^4}$$

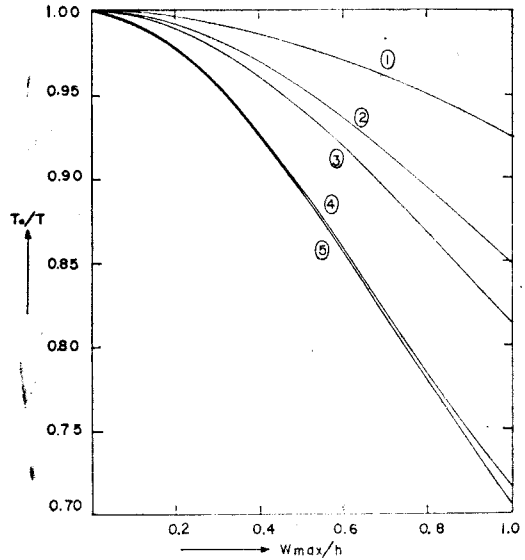
$$\epsilon = \frac{35}{144}(1-\nu^2)$$

immovably constrained인 경우

$$\omega_0^2 = \frac{3}{4} \frac{\pi^4 E h^2}{\rho(1-\nu^2)a^4}$$

$$\epsilon = \frac{35}{144}(1-\nu^2) + \frac{1}{3}(1+\nu) + \frac{1}{72}$$

이고,  $T/T_0$ 는 위의 결과를 (20)식에 대입해서 구하였다.



- ① CS Stress Free
- ② CC Immovable (Bauer-average)
- ③ CS Immovable
- ④ SS Immovable (Bauer-average)
- ⑤ SS Immovable (Herrmann)

Fig. 2. Numerical Results

그림에서 비선형 주기는 진폭이 증가함에 따라 감소하고, 曲線 ①, ③을 보면 stress-free인 경우보다 immovably constrained인 경우가 더욱 심하다. 이는 immovably constrained인 경우에 membrane force의 영향이 더욱 크게 미치기 때문인 것으로 생각된다. 또 曲線 ②, ③, ④를 비교하면 예상한 대로 CS(clamped simply supported)인 경우가 CC(all edges clamped)인 경우와 SS(all edges simply supported)인 경우의 것의 가운데에 위치하고 있다. 그러나 CC쪽에 더욱 가깝다. 또 SS인 경우가 CC인 경우보다 급히 감소하는데 이는 非線型項인 membrane force에 의한 영향이 모멘트에 의한 영향보다 SS일 때가 CC경우보다 더욱 크기 때문인 것으로 사료된다. 曲線 ④, ⑤에서는 averaging method의 적합성을 보기 위해 Bauer의 결과에 averaging method를 적용한 결과와 Herrmann이 구한 주기 관계 曲線을 볼 수 있으며 둘이 거의 일치함을 알 수 있다. 따라서 (18), (19), (20)식을 이용하여 CS인 경우에도 충분히 정확하고 간단히 비선형 주기를 계산해 낼 수 있음을 보여준다.

마지막으로 von Karman 방정식에 strained coordinate method를 적용하여 보았지만 보다 쉬운 방정식을 얻지 못하였음을 첨언해 둔다.

## 參 考 文 獻

1. Chu, H., and Herrmann, G., "Influence of Large Amplitude on Free Flexural Vibrations of Rectangular Elastic Plates", *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 23, *Trans ASME*, Vol. 78, 1956, p. 532.
2. Yamaki, N., "Influence of Large Amplitude on Flexural Vibrations of Elastic Plates", *Zeit. Angew. Math. Mech.*, Vol. 41, 1961, p. 501.
3. Easley, J., "Nonlinear Vibration of Beams and Rectangular Plates", *Zeit. Angew. Math. Phys.*, Vol. 15, 1964, p. 167.
4. Crose, J.G., and Ang, A.H.S., "Nonlinear Analysis Method for Circular Plates", *Journal of the Engineering Mechanics Division, Proceedings of the ASCE*, Vol. 95, EM4, 1969, p. 979.
5. Bauer, H.F., "Nonlinear Response of Elastic Plates to Pulse Excitations", *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 35, *Trans ASME*, Vol. 90, Series E, 1968, p. 47.
6. Berger, H.M., "A new Approach to the Analysis of Large Deflections of Plates", *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 22, *Trans ASME*, Vol. 77, 1955, p. 465.
7. Nash, W.A., and Modeer, J.R., "Certain Approximate Analysis of Nonlinear Behavior of Plates and Shallow Shells", *Proceedings of the Symposium on the Theory of Thin Elastic Shells*. Delft, The Netherlands, Aug., 1959.
8. Wah, T., "Vibration of Circular Plates at Large Amplitudes", *Journal of the Engineering Division, Proceedings of the ASCE*, EM5, Oct., 1963, p. 1.
9. Gajendar, N., "Large Amplitude Vibrations of Plates on Elastic Foundations", *International Journal of nonlinear Mechanics*, Vol. 2, 1967, p. 163.
10. Mindlin, R.D., "Influence of Rotary Inertia and Shear on Flexural Motions of Isotropic, Elastic Plates", *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 18, *Trans ASME*, Vol. 73, 1951, p. 31.
11. Wu, C.I., and Vinson, J.R., "Influences of Large Amplitudes, Transverse Shear Deformation, and Rotary Inertia on Lateral Vibrations of Transversely Isotropic Plates", *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 36, *Trans ASME*, Vol. 91, 1969, p. 254.
12. Yamaki, N., and Nagai, K., "Nonlinear Vibration of Rectangular Plates Under Periodic Lateral Loads", *Rep. Inst. High Speed Mech.*, Vol. 30, 1974, No. 273, p. 31.
13. Nayfeh, A.H., *Perturbation Methods*, John Wiley & Sons, New York, 1973.
14. Timoshenko, S., and Woinowski-Krieger, S., *Theory of Plates and Shells*, McGraw-Hill, New York, 1959.