設備交替의 最適時期 決定에 관하여

崔 恩 在**

Abstract

There are some factors which cause the profits from the production to be decreased or increased.

They are, for example, the rise in efficiency of production facilities resulting from the development of the scientific technique, the changes of purchase price of those, and the drop in efficiency of those owing to there long-term operation.

In this connection, an manager can get the highest profit by deciding the proper time of new facilities replacement for those in operation or in being planned, which leads to good management planning of his manufactaring business for a given period or a long time.

Main purpose of this is the study of how we decide the optimal time or facilities replacement in order to maximize the total profits for a given period by considering them as continous function as to the time in the case where a machineng is set.

The results are follwing:

1. The definition of profit function is in duced in consideration of the breakdowns caused from continous operation of the machinery.
2. The necessary conditions are obtained for the optimal time of replacement and find out the methods of its solution.
3. Comparing between the "Short cut" method and method in this paper, we obtained that our method is more realistic.

1. 서 론

현대과학의 발달에 따른 생산설비의 성능 상승과 설비의 구입가격변동 및 생산설비의 장기간 사용에 따르는 성능의 저하로 생산품으로부터 얻는 이익은 변화현상을 나타낸다.

이에 경영자는 현재 신설한 설비나 혹은 생산 가동중인 설비의 적절한 교체시기를 결정하므로써 최대 이익을 얻을 수 있고 또 일정기간이나 장기간의 생산업체에 대한 경영계획 수립에 도움을 줄 수 있다.

이에 관하여 1946년 G. Terborgh[3]는 "Short cut"방법을 이용하여 해결을 시도하였고 1967년 G.R. Antelman, C.B. Russel, I.R. Savage[1]는 Markov 과정을 이용하여 해결을 얻었지만 모두 시간에 대한 이익을 연속함수로 보지 않고 이산적으로 취급하여 최적교환시기 혹은 최적교환정책을 구하고 있다.

* 이 論文은 서울대학교 產業工學科에 碩士學位 論文으로 제출된 것임.
** 陸軍士官學校

이에 대하여 본 논문은 한대의 기계를 신설, 물가변동에 따른 이윤의 변동을 고려하지 않고 일정한 기간동안 설비의 성능에 차이가 있는 설비를 축차적으로 교체할 경우에 일정 기간 동안 얻는 총이익을 시간에 관한 연속함수로 간주하여 이를 최대로 하는 각 설비의 최적교환시기(사용시간)을 1절에서는 이익밀도함수를 정의하고 잔존가격 및 구입가격에 관하여 고찰함으로써 기본가설 및 모델을 형성하고 이 모델을 통하여 2절에서는 최적교환시기(사용기간)의 결정을 위한 필요조건과 그 해법을 고찰하며 3절에서는 간단한 모델의 예제를 통하여 실제 2절의 해법을 보충하며 4절은 쇼트카트법과 본 논문과 비교분석을 통하여 결론을 얻고저 한다.

2. 기본가설 및 모델형성

어떤 기능을 발휘하는데 필요한 1대의 설비를 순차적으로 시설비를 구입하여 교체하면서 이익을 추구하여가는 경우의 최적교환시점(사용기간)에 관하여 생각하여 보자.

보통 설비는 작업의 미숙현상, 성능의 저하, 고장의 발생 등의 원인으로 생산비용, 수익성이 사용기간에 따라 변동된다.

그래서 설비의 교체 모델을 다음과 같이 정립할 수 있다:

T; 생각하는 전기간(유한)

t_i; 설비의 교체시기

$i=1, 2, \cdots\cdots n-1$

$t_0=0,\ t_n=T$

$I(t_i)$; 시점 t_i에서 신설비의 구입가격

$f(t_i, x_i)$; t_i 시점에 구입, x_i 기간동안 사용할 때 얻는 이익 밀도 함수

$x_i=t_{i+1}-t_i$

$\sum_{i=0}^{n-1} x_i=T$

$Q(t_i, x_i)$; t_i 시점에 구입한 설비의 x_i 기간 사용후 처분할 때 얻을 수 있는 가격(殘存가격)

라 하고 생각하는 전기간[0, T]동안 n회(유한회수) 교체한다고 가정한다.

그 때 T기간동안 얻어지는 총이익 S는 다음과 같이 모델화 할 수 있다.

$$(2.1)\quad S=\sum_{i=0}^{n-1}\left\{\int_0^{x_i} f(t_i, x)\,dx+Q(t_i, x_i)+I(t_i)\right\}$$

단 $I(t_i)$는 음의 값을 취한다.

여기서 문제는 S를 최대로 하는 교체시점 t_i 혹은 사용기간 $x_i(i=1, 2\cdots\cdots, n-1)$을 구하는데 있다.

그러면 우선 이익평균함수에 대하여 생각해 보자.

2.1 이익밀도함수

이익평균함수는 설비의 종류에 따라 차이가 나며 또한 계속 사용시 기계성능의 저하에 따라 생산량의 감소를 가져오게 되며 사용기간 중 고장에 의하여 생산의 일시 중단에 의하여도 영향을 받게 된다.

그래서

x : 한설비를 교체없이 사용하는 시간

c : 기계가동단위 시간당 이익금

K : 고장 발생시 단위시간당 수리비

E : x 기간 동안 기대되는 기계의 가동시간

라 하면

단위시간당 평균이익함수 $f(x)$는 다음과 같이 정의할 수 있다.[2]

$$(2.2)\quad f(x)=\frac{\text{생산에 의한 수익금}-\text{고장수리비}}{\text{사용기간}}=\frac{CE-K(x-E)}{x}$$

여기서 기계가 가동될 기대가동시간에 관하여 좀 더 구체적으로 살펴보기로 한다.

t 시점에서 기계가 가동될 확율밀도함수를 $P(t)$라 하면 t가 증가함에 따라 $P(t)$는 감소함은 일반적으로 타당하게. 그래서

$$P(t)=\lambda e^{-\lambda\cdot t}\quad (\lambda : \text{상수},\ t\geqq 0)$$

로 간주하여도 무방할 것이다.[2]

물론 여기서 λ는 기계의 종류에 따라 변한다.

그러면

$$P(t\geqq T)=\int_T^{\infty}\lambda e^{-\lambda\cdot t}dt=e^{-\lambda\cdot t}$$

가 된다.

$[0, T]$ 기간동안 고장이 일어나지 않았다는 조건하에서 $[0, T+x]$ 기간동안 고장이 일어나지 않을 조건부 확률의 값을 구하면

$$\frac{\int_{T+x}^{\infty}\lambda e^{-\lambda\cdot t}dt}{\int_{T}^{\infty}\lambda e^{-\lambda\cdot t}dt}=\frac{e^{-\lambda\cdot(T+x)}}{e^{-\lambda\cdot T}}=e^{-\lambda\cdot x}$$

된다.

이 확률의 값은 다만 x에 의하여 결정된다. 고로 x기간동안 고장없이 기계가 가동될 확률은 $e^{-\lambda\cdot x}$로 주어지기 때문에 x기간동안 기계의 가동할 시간의 기대값을 E로 나타내면 E는

(2.3) $\quad E=xe^{-\lambda\cdot x}$

로 주어진다.

(2.3)을 (2.2)에 대입하여 단위시간당 이익함수 $f(x)$를 구하면

(2.4) $$f(x)=\frac{cxe^{-\lambda\cdot x}-K(x-xe^{-\lambda\cdot x})}{x}=(c-K)e^{-\lambda\cdot x}-K$$

을 얻는다. 다시 말해서 (2.4)로부터 이익함수 $f(x)$는

(2.5) $\quad f(x)=ae^{-\lambda\cdot x}+b \quad (a, b$상수$)$

인 일반꼴을 얻을 수 있다.

단 λ가 아주 적을 때

$$e^{-\lambda\cdot x}=-\lambda x+\frac{(-\lambda x)^2}{2!}+\frac{(-\lambda x)^2}{3!}+\cdots\cdots$$

이므로

$e^{-\lambda\cdot x}\fallingdotseq 1-\lambda x$로 할 때 (2.5)식은

$$f(x)=-a\lambda x+(a+b)$$

인 간단한 꼴로 얻을 수 있다. 그러면,

$t_i(i=1, 2\cdots\cdots, n-1)$ 시점에 교체될 설비의 성능변화에 따라 이익평균함수도 영향을 받게 되며 따라서 이익함수는 t_i와 x를 각각 변수로 갖게 된다.

여기서 t_i시점에서 교체될 설비의 기계 가동단위시간당 이익금을 $c(t_i)$라 하고 고장발생시 단위수리비를 $K(t_i)$라 하면 t_i시점에 구입한 설비의 평균이익함수 $f(t_i, x)$는 식 (2.2)에 의하여

(2.6) $$f(t_i, x)=\frac{c(t_i)E-K(t_i)(x-E)}{x}=\{c(t_i)+K(t_i)\}e^{-\lambda\cdot x}-K(t_i)$$

로 주어진다.

물론 여기서 $c(t_i)$, $K(t_i)$는 t_i시점에서 시장에 나타나는 제품의 성능에 의하여 결정되므로 일반적으로 예측하기 어려운 점을 내포하고 있다.

다음은 잔존가격 및 구입가격에 대하여 생각하여 보기로 하자.

2.2 잔존가격 및 구입가격

t_i시점에 시장에 나타나는 구입가격 $I(t_i)$를 예측한다는 것은 상당히 어려운 사실이나 일반적으로 대별한다면 t_i가 변함에 따라 $I(t_i)$가 증가하는 경우, $I(t_i)$가 일정한 경우와 $I(t_i)$가 감소하는 경우로 나눌 수 있다.

이 때 어떤 경우나 t_i가 변함에 따라 $I(t_i)$가 영(零) 혹은 무한대의 값을 가지지 않는다는 것은 분명하다. 그 뿐만 아니라 T기간중 총이익에 포함된 $I(t_i)$값은

$$0>I(t_i)>I \quad (I\text{는 유한, } 0\leqq t_i\leqq T)$$

을 취하게 되며 $t_i=t_0$일 때 최초에 투자된 설비의 구입비가 되는 셈이다. (구입비에는 설비 설치시 사용되는 가격을 포함한다.)

장비의 잔존가격 $Q(t_i, x)$는 장비의 성격에 따라 현저한 차이가 나타나게 된다. 예를 들어 장비자체의 가격보다 장비 설치비에 소요되는 가격이 클 경우는 t_i시점에서 교체시 $Q(t_i, x_i)$는 상대적으로 무시해도 좋은 작은 값을 가진다.

3. 최적 교환시기(사용기간) 결정

(2.1)식에서 S가 최대값이 존재하기 위한 필요조건은 $\frac{\partial s}{\partial t_k}=0$이다.

그 조건을 좀 더 구체적으로 나열하면 다음과 같다.

(3.1) $$\frac{\partial s}{\partial t_k}=\frac{\partial}{\partial t_k}\sum_{i=0}^{n-1}\{\int_0^{x_i}f(t_i, x)dx+Q(t_i+x_i)+I(t_i)\}=0$$

여기서

(3.2) $$S(t_i, x_i)=\int_0^{x_i}f(t_i, x)dx+Q(t_i, x_i)+I(t_i)$$

라 두고 (3.1)식에 (3.2)식을 대입하면

(3.3) $$\frac{\partial s}{\partial t_k}=\frac{\partial}{\partial t_k}\sum_{i=0}^{n-1}S(t_i, x_i)$$

$$=\sum_{i=0}^{n-1}\frac{\partial}{\partial t_k}S(t_i, x_i)$$

$$=\sum_{i=0}^{n-1}\left(\frac{\partial s(t_i, x_i)}{\partial t_i}\cdot\frac{\partial t_i}{\partial t_k}+\frac{\partial s(t_i, x_i)}{\partial x_i}\cdot\frac{\partial x_i}{\partial t_k}\right)$$

(3.3)식에서

$$(3.4)\quad \frac{\partial t_i}{\partial t_k}=\begin{cases}1 : i=k\\ 0 : i\neq k\end{cases}$$

가 되고 $x_i=t_{i+1}-t_i$이므로

$$(3.5)\quad \frac{\partial x_i}{\partial t_k}=\begin{cases}-1 : i=k\\ 1 : i=k-1\\ 0 : i\neq k,\ k-1\end{cases}$$

이다.

여기서 (3.4), (3.5)식을 (3.3)에 대입하면

$$(3.6)\quad \frac{\partial s}{\partial t_k}=\sum_{i=0}^{n-1}\left(\frac{\partial s(t_i, x_i)}{\partial t_i}\cdot\frac{\partial t_i}{\partial t_k}+\frac{\partial s(t_i, x_i)}{\partial x_i}\cdot\frac{\partial x_i}{\partial t_k}\right)$$

$$=\frac{\partial s(t_k, x_k)}{\partial t_k}+\frac{\partial s(t_{k-1}, x_{k-1})}{\partial x_{k-1}}-\frac{\partial s(t_k, x_k)}{\partial x_k}$$

을 얻는다. (3.6)식에서

$$(3.7.1)\quad \frac{\partial s(t_k, x_k)}{\partial t_k}=\int_0^{x_k}\frac{\partial}{\partial t_k}f(t_k, x)\,dx+\frac{\partial}{\partial x_k}Q(t_k,\ x_k)+\frac{\partial}{\partial t_k}I(t_k)$$

$$(3.7.2)\quad \frac{\partial s(t_{k-1},\ x_{k-1})}{\partial x_{k-1}}=f(t_{k-1},\ x_{k-1})+\frac{\partial}{\partial x_{k-1}}Q(t_{k-1},\ x_{k-1})$$

$$(3.7.3)\quad \frac{\partial s(t_k,\ x_k)}{\partial x_k}=f(t_k,\ x_k)+\frac{\partial}{\partial x_k}Q(t_k,\ x_k)$$

이므로 (3.7.1~3)을 (3.6)식에 대입하면

$$(3.8)\quad \frac{\partial s}{\partial t_k}=\int_0^{x_k}\frac{\partial}{\partial t_k}f(t_k, x)\,dx+\frac{\partial}{\partial t_k}Q(t_k,\ x_k)+\frac{\partial I(t_k)}{\partial t_k}+f(t_{k-1},\ x_{k-1})+\frac{\partial}{\partial x_{k-1}}Q(t_{k-1}, x_{k-1})-f(t_k, x_k)$$

$$-\frac{\partial}{\partial x_{k-1}}Q(t_{k-1}, x_{k-1})-f(t_k, x_k)$$

$$-\frac{\partial}{\partial x_{k-1}}Q(t_{k-1}, x_{k-1})-f(t_k. x_k)$$

$$-\frac{\partial}{\partial x_k}Q(t_k, x_k)=0$$

을 얻게 된다.

여기서 최적사용기간 $x_k(k=1,2,\cdots,n-1)$을 얻을 수 있는 방법을 생각하여 보기로 하자.

(3.8)식의 좌변은 x_k, x_{k-1}, t_k, t_{k-1}만의 함수이므로 x_k를 x_{k-1}, t_k, t_{k-1}의 함수로 표시할 수 있고 $x_{k-1}=t_k-t_{k-1}$이므로 x_k를 t_{k-1}과 x_{k-1}의 함수로 표시할 수 있다.

즉 $x_k=\phi(t_{k-1},\ x_{k-1})$이라 두면

$$\begin{aligned}&x_1=\phi(t_0, x_0) : \text{단 } t_0=0\\ &x_2=\phi(t_1, x_1)=\phi(x_0, x_1)\\ (3.9)\quad &x_3=\phi(t_2, x_2)=\phi(x_0+x_1, x_2)\\ &\vdots\\ &x_{n-1}=\phi(\sum_{n=0}^{n-s}x_i, x_{n-2})\end{aligned}$$

를 얻을 수 있다.

여기서 $\sum_{i=0}^{n-1}x_i=T$가 되는 x_0를 결정하면 최적 사용기간 $x_i(i=0,1,2\text{'}\cdots,n-1)$을 얻을 수 있다.

물론 $x_{n-1}=\phi(\sum_{i=0}^{n-s}x_i,\ x_{n-2})$가 간단한 식일때는 x_0을 결정하는 것은 간단하나 좀 복잡한 식일 경우는 x_0를 결정하는데 어려운 점을 포함하고 있다.

4. 모델적용의 예

간단한 예제를 모델에 적용하기 위하여 식 (2.4)와 식 (2.6)을 단순화시켜 직선적으로 변한다는 가정하에 다음과 같이 정의하여 풀이한다.

$$f(t, x)=3t-x+40$$
$$I(t)=3t-50$$
$${}^{*}Q(t, x)=0$$
$$T=10$$
$$t_0=0$$

* 계산을 간단화하기 위하여 구입가격 및 잔존가격에서 시설투자비가 설비자체 가격보다 매우 크든지, 사용후 처분시 가치가 별로 없는 장비로 간주되는 경우

(3.8)식에 의하여

$$(4.1)\quad \int_0^{x_k} \frac{\partial}{\partial t_k}(3t_k - x + 40)\,dx + \frac{\partial}{\partial t_k}(3t_k - 50) + (3t_{k-1} - x_{k-1} + 40) - (3t_k - x_k + 40) = 0$$

로 되고 이것을 풀면

$$(4.2)\quad x_k = x_{k-1} - 3$$

을 얻는다.

그러면 교체회수 n, 총이익을 S라 하면 다음 값을 얻는다.

표 1

교체회수	사 용 기 간			총 이 익
n	x_0	x_1	x_k	S
0	10			300
1	6.5	3.5		360.5
2	6.3	3.3	0.4	339.1

즉 표 1에서와 같이 $n=1$일 때 교환시점 $t_1=6.5$일 때 총이익 S값이 360.5인 최대값을 얻는다.

이와 같이 일반적으로 생각하는 기간 T의 값이 결정되면 S의 최대값을 얻는 최적 교체 회수 n와 그때의 최적교체시기 t_i를 결정할 수 있다.

그렇지만 이익평균함수가 복잡할 경우 간단한 계산절차에 의하여 최적사용기간을 결정한다는 것은 어려운 문제점을 내포하고 있다.

5. 쇼트 카트법과 비교분석

쇼트카법에 관하여 먼저 간단히 요약하고 쇼트카트법의 문제점을 살펴봄으로써 본 논문의 방법과 비교 분석하고져 한다.

쇼트카트(short cut)법

c : 초기투자액

*g : 기계가동에 따른 소요경비의 년증가액

n : 사용년수

D : n년후 처분가격

* 본 논문의 이익평균함수에 고려된 내용의 일부와 상응하나 문제점에서 상술하기로 한다.

i : 이율

A : 기계가동에 소요되는 년평균 비용

라 두면

$$(5.1)\quad A = \frac{g(n-1)}{2} + \frac{c-D}{n} + \frac{i(c+D)}{2}$$

로 주어진다.[3]

(5.1)식에서 A값을 최소로 하는 사용년수를 구하기 위하여 $\frac{dA}{dn}=0$로 풀면

$$(5.2)\quad n = \sqrt{\frac{2(c-D)}{g}}$$

을 얻는다.

여기서 (5.2)식의 n값을 가질때 A값을 AM (adverse minimum)이라 하고 현재의 설비의 AM과 교체할 설비의 AM과 비교하여 교체할 설비의 AM보다 적을 때 교체를 단행하는 것으로 결정을 내리는 방법이다.

여기서 Short cut법의 문제점을 고찰하여 보자.

첫째로 설비투자액을 취함에 있어서 기술진보에 따른 신설비의 가격변동을 고려하지 않고 n년동안 일정한 값을 취함으로써 사용기간 n년 사이의 시장에 나타나는 신설비와 비교를 하지 않고 동일한 설비로써 n년을 사용한다는 가정하에 AM을 결정한다는 점이고

둘째로 기계가동에 따라 소요되는 경비의 년 증가액 파악에 있어서도 현재 가동되는 설비의 소요경비는 성능의 저하, 고장발생에 따라 또 n년 사용기간동안 시장에 나타나는 신설비에 따라도 달라져야 한다. 그런데 Short cut법은 소요경비가 n년동안 동일한 값을 취함은 물론 n년동안 시장에 나타나는 신설비와의 비교도 없이 경비를 결정하여 설비교체를 생각했다는 모순점이 있다.

본 논문은 위에서 열거한 첫째, 둘째의 Short cut법의 모순점을 보완하여 준다고 볼 수 있다.

좀 구체적으로 기술하여 보면 다음과 같다.

Short cut법에서는 구입가격변화 $I(t)$에 관하여 생각하여 주지 않았다.

$I(t)$가 혈하게 될 경우 교환시점을 빨라지고, 비싸게 될 경우 늦어진다는 것은 당연히 예상되는 결과이다.

예를 들어 3절 모델적용의 예에서

$f(t, x)=3t-x+40$ 이고

$I(t)$의 값이

(a) t에 따라 헐하게 될 경우

(b) t에 관계없이 일정할 경우

(c) t에 따라 비싸게 될 경우

를 생각하여

(a) $I(t)=3t-50$

(b) $I(t)=-50$

(c) $I(t)=-3t-50$

라 두면 다음 표 2와 같이 최적교환시점과 총이익을 얻을 수 있다.

표 2

	1 회 교 환		교 환 없 음	
	t_i	S	t_0	S
(a)	6.5	360.5	10	300
(b)	5	365	10	300
(c)	3.5	341.4	10	300

$(T=10)$

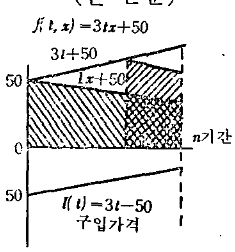
여기서 표 2에 의하여 (a), (b), (c)의 경우를 보면 $I(t)$의 영향에 따라 최적사용기간이 변화되는 것은 명백한 사실이다.

또 기계 가동에 따라 소요되는 경비의 년증가액 파악에서 n기간(년)동안 일정한 g값를 취함은 본 논문의 이익평균함수 $f(t, x)$에서 t를 고려하지 않은 경우이다.

즉 제 3절 예제를 보기로 한다면 $f(t, x)=3t-x+50$을 $f(t, x)=-x+50$으로 간주하여 최적사용기간을 결정한 것이 된다.

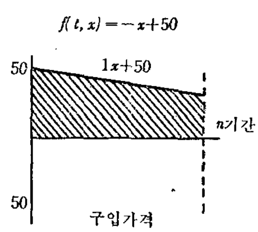
그러면 그림으로써 좀 더 비교하여 보기로 하자.

(본 논문)



(그림 1)

(Short cut)



(그림 2)

$I(t)$를 고려할 때 최적사용기간이 변화하듯 그림 2와 같이 최적사용시기가 결정되었다 하여도 그 기간내 시장에 나타나는 신설비를 고려하여 그림 1과 같은 교환시점이 생길 경우 그림 1의 점선 밑 사선부분과 실선밑 사선부분의 면적 즉 기간내 얻는 총이익의 차이가 생기게 된다.

이것은 최적정책결정에 오차가 생김을 의미한다. 그래서 기술진보를 고려할 경우 동일종류로 (기술진보에 따른 성능의 변화를 고려하지 않고) 장비를 교체 (like for like replacement) 한다는 입장은 문제점을 내포하고 있다.

6. 결 론

본 논문은 기업의 이익을 최대로 하기 위하여 기술진보와 새로운 장비의 가격변동에 따라 변화되는 설비의 교체시기를 결정하는데 목적을 두었으며 본 논문의 특성과 제한사항은 다음과 같다.

1. 기계성능의 변화와 장기간 사용에 따른 고장발생등을 고려하여 총이익을 시간에 대한 연속함수로 간주, 한 대의 설비를 신설 생산할 경우 최적사용기간과 교환회수를 구하였다.

2. Date의 신뢰성이나 처음부터 고려할 계획기간(T)을 정하는 근거가 있을 경우에는 기술진보에 따른 성능의 변화, 구입가격의 변화를 고려 T기간중 발생하는 총이익을 최대로 하는 교체시점을 본 논문의 방법으로 취함이 좋다.

3. 구입가격이 크지 않는 설비나 장래 기술진보의 예측이 힘들 경우는 Short cut 법이 간편한 방법의 하나가 될 수 있다.

4. 이익평균함수가 복잡할 경우 최적교환시점을 얻는 일반적인 해법에 관하여서는 문제점으로 남아 있다.

참 고 문 헌

1. G.R. Antelmal
"Surveillance Problem : Two dimensional with continous surveillance" 1967.