韓國數學教育學會誌〈數學教育〉
1976. 12, Vol. XV No.1

Journal of the Korea Society of Mathematical Education
Dec. 1976. XV No.1

분지과정에서의 소멸확률에 관하여

忠北大學校 이 규 열

분지과정 (Branching processes)에서의 소멸확률(Extinction probability)을 소개하려 한다.

1. 예비 지식

Z_n을 n세대에서의 가족 또는 인구의 수라 정의하자. 그러면 $Z_0=1$이고 $Z_n=k$ 라하면 Z_{n+1}은 k개의 서로 독립이고, 동일한 분포를 가지고, 비 음인 정수치를 가지는 확률변수 $Y_1, Y_2, \cdots, Y_k$의 합이다. 즉 $Z_{n+1}=Y_1+Y_2+\cdots+Y_k$ 이다. 지금 Z_1의 확율분포를 $P[Z_1=k]=P_k$라 하자. 여기서 $k=1,2,\cdots$, $\sum P_k=1$이다. $Z_n=0$ 이면 Z_{n+1}은 확률 1로서 0이다. 조건부확률 $P_{ij}=P[Z_{n+1}=j|Z_n=i]$, i, j, $n=0, 1, \cdots$라 하고 Probability generating function

$$f(s)=\sum_{k=0}^{\infty}P_k s^k,\quad |s|\le 1, \text{을 정의한다.}$$

여기서 s는 복소변수이다.
또 probability generating function의 반복함수(iterate function)를 다음과 같이 정의한다.

$$f_0(s)=S,\quad f_1(s)=f(s). \tag{1}$$

$$f_{n+1}(s)=f[f_n(s)],\quad n=1,2, \tag{2}$$

(1)과 (2)에 의해서

$$f_{m+n}(s)=f_m[f_n(s)],\quad m,n=0,1,2, \tag{3}$$

특히

$$f_{n+1}(s)=f_n[f(s)]. \tag{4}$$

2. 기초가정 (Basic Assumption)

(a) $P_0, P_1, P_2, \cdots$중 어느것도 1이 아니고 $P_0+P_1<1$이라고 하면 f는 [0,1] 위에서 strict convex function이다.

(b) Z_1의 기대치가 유한이라면;

즉 $m=E[Z_1]=\sum_{k=0}^{\infty}kP_k<\infty$이라면 $f'(1)<\infty$이다.

3. 소멸확률 (Extinction probability)

〔보조정리〕 Z_n의 generating function은 n차 반복함수 $f_n(s)$이다.

〔증명〕 $f_{(n)}(s)$를 Z_n의 generating function이라 하자. 조건 $Z_n=k$ 하에서 Z_{n+1}의 분포는 generating function $[f(s)]^k$, $k=0,1,2,\cdots$를 가진다. 따라서 Z_{n+1}의 Generating function은

$$f_{(n+1)}(s)=\sum_{k=0}^{\infty}P[Z_n=k][f(s)]^k=f_{(n)}[f(s)],$$

$$n=0,\ 1,2,\cdots\cdots. \tag{5}$$

이다. $f_{(0)}(s)$와 $f_0(s)$의 정의에 의해서

$$f_{(0)}(s)=f_0(s)$$

이다. (2)와 (4)를 사용하면 귀납법에 의해서

$$f_{(n)}(s)=f_n(s),\quad n=1,2,\cdots\cdots\text{이다.}$$

〔정의 1〕 소멸이란 n의 유한개의 값을 제외하고 모두 $Z_n=0$인 것을 의미한다. Z_n은 비음인 정수치 함수이므로 소멸이란 $Z_n\to 0$일 때를 의미한다.

따라서

$$\left.\begin{aligned} &P[Z_n\to 0]=P[Z_n=0 \text{ for some } n]\\ &=P[(Z_1=0)\cup(Z_2=0)\cup\cdots]\\ &=\lim_{n\to\infty}P[(Z_1=0)\cup\cdots\cup(Z_n=0)]\\ &=\lim_{n\to\infty}P[Z_n=0]=\lim_{n\to\infty}f_n(0)\end{aligned}\right\}\cdots\cdots(6)$$

[**정의 2**] q를 소멸확률이라 하자.

즉 $q=P[Z_n\to 0]=\lim_{n\to\infty} f_n(0)$. (7)

[**정리 1**] $m=E[Z_1]\leq 1$ 이면 $q=1$ 이다. $m>1$ 이면 q는 음이 아니고 1보다 작은

$$S=f(s) \tag{8}$$

의 유일한 해와 같다.

[**증명**] (2)에 의해서 $f_n(0)<1, n=0,1,2\cdots$ 이고

$$0=f_0(0)\leq f_1(0)\leq f_2(0)\leq\cdots\leq q=\lim_{n\to\infty} f_n(0) \tag{9}$$

이다. $f_{n+1}(0)=f[f_n(0)]$이고 $\lim_{n\to\infty} f_n(0)=\lim_{n\to\infty} f_{n+1}(0)=q$ 이므로 $q=f(q)$, $0\leq q<1$ 이다. $m\leq 1$ 이면 $f'(s)<1$, $0\leq s<1$ 이다. $0\leq s<1$ 일 때 평균치의 정리에 의해서

$$f(s)=f(1)+f'[1+\theta(s-1)](s-1), 0<\theta<1, \tag{10}$$

$1+\theta(s-1)=s'$ 라 하면 $0<s'<1$ 이고 $f'(s')<1$ 이므로 $f(s)>s$ 이다. 따라서 $q=f(q)$일 때 $q=1$ 이다. $m>1$ 일 때 s가 1보다 경미하게 작으면 $f'(s)>1$ 이므로 (10)에 의해서 $1+\theta(s-1)=s'$ 라 하면 $f'(s')>1$ 이므로

$$f(s)<s \tag{11}$$

이다. 그런데 $f(0)\geq 0$, 따라서 (8)은 반 개구간 [0.1)에서 적어도 하나의 해를 가진다. 만일 $0\leq s_0<t_0<1$ 인 두개의 해 s_0, t_0,를 가진다면 $s_0=f(s_0)$, $t_0=f(t_0)$이므로 Rolle의 정리를 쓰면 $s_0<\xi<t_0<\eta<1$ 인 ξ와 η가 존재하여 $f'(\xi)=f'(\eta)=1$ 이다. 이것은 f가 strict convex function 이라는데 모순이다.

지금 $\lim_{n\to\infty} f_n(0)$가 1보다 경미하게 작다면 (11)에 의해서 $f_{n+1}(0)=f[f_n(0)]$이므로 $f_{n+1}(0)<f_n(0)$이다. 이것은 (9)에 모순이다 따라서 $\lim_{n\to\infty} f_n(0)$는 1일 수는 없다. 따라서 q는 [0.1)에서 (8)의 유일한 해이다.

[**정리 2**] $m=E[Z_1]$가 유한이기만 하면 $\lim_{n\to\infty} P[Z_n=k]=0$, $k=1,2,\cdots$이다. 더우기 $P[Z_n\to\infty]=1-q$, $P[Z_n\to 0]=q$ 이다.

[**증명**] $R_k=P[Z_{n+j}=k \text{ for some } j\geq 1 \mid Z_n=k]$ 라 하면 $R_k<1$ 이다. 왜냐하면 $P_0=0$ 이면 $R_k\leqq P_1^k<1$, $P_0>0$ 이면 $R_k\leq 1-P_{k0}=1-P_0^k<1$. 따라서 $\lim_{n\to\infty} P[Z_n=k]=0$, $n=1,2,\cdots$이고 $P[Z_n=k$ for infinitely many values of $n]=0$ 이다. Z_n 가 같은 값을 무한히 많이 가질 수는 없으므로 Z_n는 0 또는 ∞ 값을 가져야 한다. 따라서 정리 1에 의해서 $P[Z_n\to 0]=q$, $P[Z_n\to\infty]=1-q$ 이다.

참 고 문 헌

1) T. E. Harris: The theory of Branching processes (1963).
2) R. B. Ash: Real analysis and probability (1972).
) W. Feller: An introductions to probability theory and it's applications. vol. 1. (1968).