韓國數學敎育學會誌〈數學敎育〉
1976. 12, Vol. XV No. 1

Journal of the Korea Society of Mathematical Education
Dec. 1976. Vol. XV No. 1

任意函數에 關한 定理들

仁荷大學校 崔 雲 行

1. 序 言

解析學이나 位相數學 等에서 取扱되는 函數들은 連續이거나 measurable 하다든가 어떠한 條件들을 만족하는 函數들이다. 사실 可測函數가 아니면 積分을 論議할 수도 없고, 별로 有用한 結果를 얻을 수 없는 것으로 생각되어 왔다.

筆者는 이 노우트에서 任意의 函數에 關한 定理 몇가지와 未解決問題를 紹介하고자 한다.

여기서 任意函數라 함은 文字그대로 아무런 條件이 붙지 않은 函數를 意味한다. 特別히 言及하지 않는 한 一價函數를 意味하는 것으로 한다.

2. 實函數의 Cluster Set

函數 f가 實直線 R에서 擴張된 實直線 $\bar{R}$(R에 $+\infty$와 $-\infty$를 追加한 것)로 가는 任意函數이고, x가 R의 한 點일 때 다음과 같이 定義한다.

(a) f의 點 x에서의 right cluster set;

$C_R(f, x) = \{t \in \bar{R}$:t의 任意의 近傍 N과 任意의 $r>0$에 대해서 $f^{-1}(N) \cap (x, x+r) \neq \phi\}$,

(b) f의 點 x에서의 left cluster set;

$C_L(f, x) = \{t \in \bar{R}$:t의 任意의 近傍 N과 任意의 $r>0$에 대해서 $f^{-1}(N) \cap (x-r, x) \neq \phi\}$,

(c) f의 點 x에서의 cluster set;

$$C(f, x) = C_R(f, x) \cup C_L(f, x).$$

3. 任意函數의 cluster set에 關한 定理들

W.H. Young은 1907年 [1]에서 다음 定理를 證明하였다.

定理 1. $f: R \to \bar{R}$가 任意函數(多價函數 포함)이면,

$$\operatorname{Sup} C_L(f, x) = \operatorname{Sup} C_R(f, x) \quad \text{와}$$
$$\inf C_L(f, x) = \inf C_R(f, x)$$

가 成立하지 않는 點 x들의 集合은 可附番集合이다.

W.H. Young은 1908년 다시 다음 定理를 證明하였다.

定理 2. $f: R \to \bar{R}$가 任意函數(多價函數 포함)이면 R上의 可附番集合을 除外한 R의 모든 點에서

$$C_L(f, x) = C_R(f, x)$$

이다.

그밖에 L. Zajicek, [3], L. Belowska [4]의 結果들이 있으나 省略한다.

1909년 W.H. Young은 [2]에서 다음 定理를 證明하였다.

定理 3. $f: R \to \bar{R}$가 任意函數(多價函數 포함)일 때 R의 可附番集合을 除外한 R의 모든 點에서

$$\inf C(f, x) \leq f(x) \leq \operatorname{Sup} C(f, x)$$

된다.

E.F. Collingwood은 1963년 [5]에서 위의 定理를 다음과 같이 改良했다.

定理 4. f : R→$\bar{R}$가 任意函數(多價函數 포함)이면 $f(x)\notin C(f,x)$되는 點 x들의 集合은 可附番集合이다.

4. Ambiguous point에 관한 定理들

x−y平面의 上半部分을 H로 나타내기로 한다.

한 끝점이 x∈R이고 다른 끝점이 H에 屬하는 H內에 놓인 Jordan arc A를 點 x∈R에서의 arc A라고 부른다.

한 점 x∈R에서의 한 arc A에 따른 cluster set을 다음과 같이 定義한다.

$C_A(f,x)=\{t\in\bar{R}: z_n\in A,\ z_n\to x,\ f(z_n)\to t$ 되는 수열 z_n이 存在한다$\}$.

特히 A가 x에서 시작하는 陽의 實數軸과 α의 角을 이루는 線分이면 $C(f,x,\alpha)$로 나타낸다.

함수 f : H→$\bar{R}$에 대해서

$$C_{A_1}(f,x)\cap C_{A_2}(f,x)=\phi$$

되는 두 arc A_1과 A_2가 存在할 때 點 x∈R을 f의 한 ambiguous point라고 定義한다. 特히 A_1과 A_2가 線分이면 x를 rectilinearly ambiguous point라고 부른다.

H. Blumberg는 1930년 rectilinearly ambiguous point에 관한 다음 定理를 證明하였다.

定理 5. f : H→$\bar{R}$가 任意函數이고 α와 β가 두 固定된 方向일 때,

$$\text{Sup}\ C(f,x,\alpha)<\inf\ C(f,x,\beta)$$

되는 點 x∈R들의 集合은 可附番集合이다.

V. Jarnik은 1936년 [7]에서 위의 定理를 다음과 같이 改良해서 retilinearly ambiguous point에 관한 문제를 完全히 解決했다.

定理 6. f : H→$\bar{R}$가 任意函數일 때 f의 rectilinearly ambiguous point들의 集合은 可附番集合이다.

F. Bagemihl은 1955년 [8]에서 다음 定理를 證明해서 일반 ambiguous point에 관한 문제를 완전히 해결했다.

定理 7. f : H→$\bar{R}$가 任意函數일 때 f의 ambiguous point들의 集合은 可附番集合이다.

물론 이 定理는 H대신에 單位圓, $\bar{R}$대신에 Riemann 球面 S를 써서 記述할 수 있다.

위와 같이 ambiguous point에 대한 문제가 해결되자 任意函數 f : H→$\bar{R}$에 대해 세 方向에 대해서 3—segment property를 갖는 點 x∈R 즉

$$C(f,x,\alpha)\cap C(f,x,\beta)\cap C(f,x,\gamma)=\phi$$

되는 點 x∈R들의 集合도 可附番集合이 아닌가 하는 생각을 하게 되었다. 그러나 1959년 F. Bagemihl, G. Piranian, G. S. Young은 [9]에서 x∈R의 모든 點에서 세 方向에 대해 cluster set의 共通部分이 空集合되는 函數의 存在를 證明했다.

f : H→$\bar{R}$이 連續函數이면 3—segment property를 갖는 點들의 集合은 可附番集合임을 쉽게 알 수 있다. 그러나 連續인 複素函數에 關한 경우는 아직 解決되지 않고 있다. Bagemihl, Piranian, Young은 [9]에서 다음 문제를 提示했는데 아직까지 解決되지 않았다.

R의 陽의 Lebesgue measure를 갖는 또는 second category인 部分集合의 各點에서 3—segment property를 갖는 連續인 複素函數 f : H→S (S는 Riemann 球面)가 存在하는가?

註 : 위의 定理들 大部分이 $\bar{R}$을 任意의 second countable, compact space로 바꾸어도 成立함이 알려져 있으나 증명에 별 차이가 없으므로 省略했다.

參 考 文 獻

1. W.H. Young, On the distinctions of right and left at points of discontinuity.
2. W.H. Young, On the discontinuities of a function of one or more real variables.
3. L. Zajiček, On cluster sets of arbitrary functions. Fund. Math. 83(1974), 197-217.
4. L. Belowska, Résolution d'un problememe de M.Z. Zahorski sur les limites approximatives. Fund. Math. 48(1960), 277-286.
5. E.F. Collingwood, Cluster set theorems for arbitrary functions with applications to function theory. Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser.

4page 계속