韓國數學教育學會誌〈數學教育〉
1976. 12. Vol. XV No. 1

Journal of the Korea Society of Mathematical Education.
Dec. 1976. Vol. XV No. 1

距離의 擴張化에 對하여

清州教育大學 梁 仁 煥

1. 概 要

Euclid 幾何學이 成立하는 空間은 우리들과 가장 밀접한 空間이다. Déscartes 의 解析幾何學은 Euclid 의 3次元空間에서 成立한다. 이 경우 點이라 해도 그것은 3개의 實數의 順序雙 (x, y, z) 에 依해 表現되는 것으로 생각해도 좋다. 一般의 n次元 Euclid 空間 R^n 에 대해서도 같은 생각으로 定議할 수 있다. 이 경우 $n=1$ 은 數直線, $n=2$ 는 平面, $n=3$ 은 所謂 3次元의 空間으로서 直觀的으로 想像할 수 있으나 $n \geqq 4$ 인 경우는 想像하기 어렵다.

여기서는 距離의 性質과 抽象空間을 論하고 Euclid 空間의 距離에서 출발하여 그 성질中 三角不等式을 計算을 通하여 證明하므로서 空間의 擴張化가 이루워짐을 보였다.

2. 距離空間

보통 공간이라고 하면 點의 集合을 연상하게 된다. 역사적으로 點의 集合을 空間이라고 불렀으나 오늘날엔 空間을 抽象化하고, 임의의 集合 A를 空間이라 부르므로서 視覺的으로 파악하려 든다. 이때 集合 A의 元素를 點이라 부른다. 가령 사람의 集合은 사람을 點으로 보고 그 集合을 空間이라 생각한다.

實數 하나 하나를 點으로 보면 실수의 集合은 空間이다. 또 임의의 두 개의 實數의 順序雙 (x, y) 를 점으로 보면 그 集合도 空間으로 본다. 일반으로 n개의 실수 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 의 順序雙 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 을 點이라 보고, 이 集合을 空間으로 본다. 그런데 이와같은 抽象化된 空間을 생각하면, 2개의 點에 대하여 距離가 논의되는 경우와 논의되지 않는 경우가 발생하며 따라서 距離 자신의 定義가 문제된다.

이미 잘 알려진 距離로서는 Euclid 空間의 距離이며 이 距離는 다음 3개의 性質을 갖는다.

1) 2점 x, y 의 거리는 음이 아닌 實數이며, 그것이 0이 되는 것은 x, y 가 일치할 때에 한한다.

2) 2점 x, y 의 거리는 2점 y, z 의 거리와 같다.

3) x, y 의 거리와, y, z 의 거리의 합은 x, z 의 거리와 같다.

여기서 逆으로 임의의 空間 A의 2개의 點 x, y 의 거리란 다음과 같이 定한다. 2점 x, y 에 대응하는 1개의 실수 r 이 정해질 때 그것을 $d(x, y)$ 로 나타내고, 이것이 다음조건을 만족하면 x, y 의 거리라 한다.

1) $d(x, y) \geqq 0, \ d(x, y)=0 \Leftrightarrow x=y$

2) $d(x, y)=d(y, x)$

3) $d(x, y)+d(y, z) \geqq d(x, z)$

空間의 모든 2점에 대하여 이와같은 거리가 정해져 있을 때 이 空間을 距離空間이라 한다.

3. Euclid 空間의 距離

공간 R^2 에서 2점 $x=(x_1, x_2)$, $y=(y_1, y_2)$ 의 거리를 $d(x, y)=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(x_2-y_2)^2}$ 에 의해 주어졌을 때, 이것을 Euclid의 거리라 하

고, 이 거리를 가진 공간 R^2 을 2차원 Euclid 空間이라 한다. 이 Euclid의 거리가 앞의 거리의 조건을 만족시키는 것을 분명히 하자.

1) 실수의 제곱은 음수가 되지 않으므로

$(x_1-y_1)^2 \geqq 0, \quad (x_2-y_2)^2 \geqq 0$

$(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2 \geqq 0$

따라서 $d(x, y) \geqq 0$

等號가 成立하는 것은 $(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2=0$ 인 때로서, 이때

$x_1-y_1=0, \quad x_2-y_2=0$

$x_1=y_1, \quad x_2=y_2, \qquad$ 따라서 $x=y$

2) $d(x, y)=\sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)},$

$d(y, x)=\sqrt{(y_1-x_1)^2+(y_2-x_2)^2}$

그런데 $(x_1-y_1)^2=(y_1-x_1)^2,$

$(x_2-y_2)^2=(y_2-x_2)^2$ 이므로

$d(x, y)=d(y, x)$

3) $x=(x_1, x_2), \quad y=(y_1, y_2), \quad z=(z_1, z_2)$ 라 하고,

$x_1-y_1=a_1, \quad x_2-y_2=a_2, \quad y_1-z_1=b_1,$

$y_2-z_2=b_2$ 라 놓으면

$x_1-z_1=a_1+b_1, \quad x_2-z_2=a_2+b_2$ 으로 나타내진다.

그런데, $d(x, y)=\sqrt{a_1^2+a_2^2},$

$d(y, z)=\sqrt{b_1^2+b_2^2}$

$d(x, z)=\sqrt{(a_1+b_1)^2+(a_2+b_2)^2}$

그러므로, $d(x, y)+d(y, z) \geqq d(x, z)$ 를 증명하려면 $\sqrt{a_1^2+a_2^2}+\sqrt{b_2^2+b_2^2} \geqq \sqrt{(a_1+b_1)^2+(a_2+b_2)^2}$ 을 증명하면 된다.

이 양변을 제곱하여 간단히 하면

$\sqrt{a_1^2+a_2^2}\sqrt{b_1^2+b_2^2} \geqq a_1b_1+a_2b_2$

따라서 이 부등식을 증명하면 된다.

이 좌변을 P, 우변을 Q라 놓으면

$P^2-Q^2=(a_1^2+a_2)^2(b_1^2+b_2^2)-(a_1b_1+a_2b_2)^2$

$=(a_1b_2-a_2b_1)^2 \geqq 0$

$\therefore \; |P| \geqq |Q|$

그런데 $P \geqq 0$ 에서 $|P|=P$, 또 $|Q|=Q$ 이니 $P \geqq Q$

따라서 $d(x, y)+d(y, z) \geqq d(x, z) \qquad$ Q.E.D.

4. 距離의 擴張

距離라고 하는 수단은 空間의 槪念을 擴張하는데 매우 편리하며 또한 이해하기가 쉽다. 우리들이 알고 있는 3次元의 Euclid 空間에는 알려져있는 바와같이 Pythagoras의 정리가 成立하므로 點 $P(x_1, x_2, x_3)$ 와 點 $Q(x_1', x_2', x_3')$ 사이의 거리는 다음식으로 나타내진다.

$$f(P, Q)=\sqrt{(x_1-x_1')^2+(x_2-x_2')^2+(x_3-x_3')^2}$$

이것은 Pythagoras의 정리에서 분명하다. 이 공식에 의해 주어진 距離는 다음 3개의 조건을 만족시킨다.

1) $f(P, P)=0$, $P \neq Q$ 인 때는 $f(P, Q)>0$

2) $f(P, Q)=f(Q, P)$

3) $f(P, Q)+f(Q, R) \geqq f(P, R)$

이것은 幾何學的으로 분명하나 計算으로도 증명된다.

1), 2)는 自明하나 3)의 증명이 힘든다. 3)을 증명하기 위해선 다음사실을 분명히 하면 된다.

a_1, a_2, a_3 와 b_1, b_2, b_3 가 모두 음이 아닐 때

$$\{(a_1+b_1)^2+(a_2+b_2)^2+(a_3+b_3)^2\}^{1/2} \leqq (a_1^2+a_2^2+a_3^2)^{1/2}+(b_1^2+b_2^2+b_3^2)^{1/2}$$

와 같이 된다. 이것을 증명하면 되는바, 이 정리는 다음과 같이

a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3 는 3개를 n개로 하고, 제곱은 p제곱$(p>1)$으로 擴張하여 증명하므로서 본 증명은 물론 n차원 까지도 擴張됨을 알 수 있다.

〔定理〕 $P \geqq 1$ 이고 $a_1, a_2, a_3, \cdots\cdots, a_n$ 및 $b_1, b_2, b_3, \cdots\cdots, b_n$ 이 음이 아닐때 다음 不等式이 成立한다.

$$\{(a_1+b_1)^p+(a_2+b_2)^p+\cdots+(a_n+b_n)^p\}^{1/p} \leqq (a_1^p+a_2^p+\cdots+a_n^p)^{1/p} + (b_1^p+b_2^p++b_n^p)^{1/p}$$

이 定理를 증명하기 위한 준비로서 우선 다음의 보조정리를 증명한다.

〔보조정리〕 구간 $[0, a]$에 있어서 정의된 다음의 함수

$$f(x)=(x^p+b^p)^{1/p}+\{(a-x)^p+c^p\}^{1/p} \quad (a>0, \; b>0, \; c>0)$$

은 $x=\frac{ab}{b+c}$에서 극소치 $\{a^p+(b+c)^p\}^{1/p}$ 을 취한다.

(증명) $p=1$일때는 분명하므로 $p>1$이라 하자.

f(x)를 미분하면 $f'(x)=\left(\frac{x^p}{x^p+b^p}\right)^{\frac{p-1}{p}}$

$$-\left\{\frac{(a-x)^p}{(a-x)^p+c^p}\right\}^{\frac{p-1}{p}}$$

이 함수는 x가 0에서 a까지 증가함에 따라 단조증가하므로 0은 한번밖에 취하지 않는다. 그러므로 0이 되는 점의 좌측에선 음, 우측에선 양이 된다.

0이 되는 점을 구하면

$$\frac{x^p}{x^p+b^p}=\frac{(a-x)^p}{(a-x)^p+c^p}$$ 에서

$$c^px^p=b^p(a-x)^p$$

따라서 $cx=b(b-x)$ $x=\frac{ab}{b+c}$

이것을 f(x)에 代入하면

$$f\left(\frac{ab}{b+c}\right)=\{a^p+(b+c)^p\}^{1/p} \qquad \text{Q.E.D.}$$

여기서 $a_n+b_n=a$, $a_n=x$라 놓으면

$(a_n^p+b^p)^{1/p}+(b_n^p+c^p)^{1/p}$

$\geqq\{(a_n+b_n)^p+(b+c)^p\}^{1/p}$

와 같이 된다. 일반으로

$(a_1^p+\cdots+a_{n-1}^p+a_n^p)^{1/p}$

$+(b_1^p+\cdots+b_{n-1}^p+b_n^p)^{1/p}$ 에서

$(a_1^p+\cdots+a_{n-1}^p)^{1/p}$ 을 b,

$(b_p^1+\cdots+b_{n-1}^p)^{1/p}$ 을

c라 놓고 위의 결과를 적용하면

$\geqq[\{(a_1^p+\cdots+a_{n-1}^p)^{1/p}+(b_1^p+\cdots+b_{n-1}^p)^{1/p}\}$

$+(a_n+b_n)^p\}^{1/p}$

이 定理가 $n-1$까지 옳다면

$\geqq\{(a_1+b_1)^p+\cdots+(a_{n-1}+b_{n-1})^p$

$+(a_n+b_n)^p\}^{1/p}$ 같이 된다.

$n-1$에서 옳다는 것은 분명하므로 수학적 귀납법이 적용된다. 따라서

$(a_1^p+\cdots+a_n^p)^{1/p}+(b_1^p+\cdots+b_n^p)^{1/p}$

$\geqq\{(a_1+b_1)^p+(a_2+b_2)^p+\cdots+(a_n+b_n)^p\}^{1/p}$

Q.E.D.

이 不等式이 證明되면 다음이 명확해진다. n차원 공간내의 점 $P(x_1, x_2, \cdots, x_n)$와 점 $Q(x_1', x_2', \cdots, x_n')$의 距離로서 다음과 같은 관계를 취하면, 그것은 1), 2), 3)을 만족한다.

$$f(P, Q)=(|x_1-x_1'|^p+|x_2-x_2'|^p+\cdots$$
$$+|x_n-x_n'|^p)^{1/p}$$

이와같은 함수를 距離로 하는 空間에선 $p\neq2$인 때는 Pythagoras의 정리가 성립하지 않는다.

$x_1, x_2, \cdots, x_n$의 갯수가 아무리 커도 좋다고 하면, 더욱 擴張하여 n이 無限大라도 상관없다는 것을 알 수 있다. 그렇게 되면 무한개의 좌표$(x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots)$을 갖는 점 사이에도 거리로서

$f(P, Q)=(|x_1-x_1'|^p+\cdots+|x_n-x^{n'}|^p+\cdots)^{1/p}$

을 定義하면 이것도 역시 1), 2), 3)을 만족한다.

이와같은 距離를 갖는 無限次元의 空間은 그대로 우리 머리속에서 感覺的으로 把握할 수는 없다. 그러나 위와같이 定義된 距離 f(P, Q)를 바탕으로 하나의 空間論을 만들어 갈수는 있는 것이다.

參 考 文 獻

中村勝彥：トポロジイ，東京，共立出發，1968.

石谷 茂：數學の 位相構造，東京，明治圖書，1967.

橫地 淸：科學化を めざす 數學敎育(高校)，東京，誠文堂新光社，1968.

遠山 啓：現代數學の 考へ方，東京，明治圖書，1967.

Ring, R.H.: "Point Set Topology", Insight into Modern Mathematics 23rd Year Book of NCTM.

"Topology for the Secondary Schools" The Mathematic's teacher Nov. 1953.