韓國數學敎育學會誌〈數學敎育〉
1976. 12, Vol. XV No. 1

Journal of the Korea Society of Mathematical Education
Dec. 1976. Vol. XV No. 1

無限槪念의 發展過程에 대한 考察

淸州敎育大學 朴 根 生

1. 序 言

오늘날의 數學의 無限개념을 빼고서는 성립될 수 없다. 無限의 槪念은 無限小, 極限, 無限集合, 無限空間으로 그 發展過程이 개관되고 있으나 現在까지 出刊된 많은 數學史 分野의 書籍들은 計算法 等 技巧的인 面에 置重하여 考察되고 있어 가령 無限개념 等 하나의 數學思想이 어떠한 歷史的 發展過程을 거쳐왔는가를 集約해서 알기는 어렵다. 이에 無限槪念의 發展過程을 體系的으로 엮어 보고자함이 硏究者의 意圖이다. 그러나 數學上의 한 發見 또는 發展이란 突發的 事件일수는 없는 것이고 반드시 前史가 있어 단 一步 前進함에 있어서도 特히 古代에 있어서는 數百年이 걸렸고 關連人物도 많기 때문에 그 全部를 망라하기란 거의 不可能한 것이므로 여기서는 變遷過程의 이음을 보다 강조하기 위하여 결정적 역할을 한 몇 人物로 壓縮하여 連結지어 보았다.

2. 不可通約量과 無限의 發見

量을 測定하는 것은 數學의 母體라고 할 수 있다. 古代數學이 量의 測定을 主된 目標로 하고 있었음은 幾何學을 geo(土地) metry(잰다)라고 한 것만 보아도 알 수 있다. 이와같이 實用目標로 出發한 古代數學은 pythagoras (582~497 B.C)에 의해 「피타고라스定理」 等 多少 理論的數學으로 發展되면서 不可通約量[1]의 線分이 發見되었고, 이는 pythagoras 數學體系에 致命的 타격을 주었다[2].

당시 이들의 數에 對한 知識은 通約的 即 오늘날의 有理比의 範圍에 머물러 있었다. 그것은 Euclid 原本 第七卷 定義Ⅱ에서 「數라함은 單位의 보임인 것이다」라 하였음[3]과 「萬物은 數이다」라고 생각하고 있었음[4]을 보아도 알 수 있다. 그들은 두 線分(또는 數)의 比는 항시 通約可能이라고만 생각하고 있었다. 그러나 正四角形의 對角線과 그 一邊의 比 $\sqrt{2}$: 1은 有限回의 互除法으로는 不足되고 限없이 계속된다.

$$\sqrt{2}:1=1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cdots}}$$

이 경우 計算을 限없이 계속해도 끝이 없다. 即 限界가 없다고 하는 意味로서의 「無限」을 처음 發見한 셈이 된다. 그러나 그들의 數에 對한 知識은 通約可能의 有理數範圍에 限定되어 있었기 때문에 無限을 느끼면서도 數와 量을 別個의 것으로 嚴格히 區分하여 數로서 認定하지 않고 말았다[5]. 다음은 이 事實을 立證해 준다고 본다.

1) 두 數의 比에서 그 互除法이 有限回로서 終了되지 못하는 것, 特히 「정수 : 정수」이면 그 互除法은 반드시 有限回로서 終了된다.
2) 吉田洋一「零의 發見」岩波書店, 東京, 1969, p. 119
3) 中村四郞「數學史」共立出版 東京 1965, p. 34
4) 全國敎育大學 數學硏究會「數學」東明社 서울 1975, p. 153
5) 전국 교육대학 수학연구회 前揭書 p. 105

有理數를 rational number(合理的인 數) 無理數를 irrational number(非合理인 數)라고 命名하였음은 그 當時 그리스 사람들의 생각으로는 有限的인 것이 合理的이고 無限的인 것이 非合理的이라고 보았음의 分明하다. 그리하여 그리스人들은 無理數를 처음 發見하고서도 無理數 發見의 功勞는 제곱根을 생각해낸 印度의 Bhaskara(1150년경)에게로 돌아갔다[6]. 그러나 嚴格히 말해서 無理數의 첫 發見者는 pythagoras와 그 學派라고 함이 옳을 것이다.

3. 不可分量과 無限

그리스 數學의 發達을 考察하면 前述한바와 같이 無限을 排除하고 有限만의 世界를 構築하여 오다가 無限의 생각은 Democritus(460～370 B.C)에 依하여 數學의 本質的 問題로 登場되었다. Democritus는 圓錐의 體積을 求함에 있어 圓錐를 밑면에 平行한 平面에 依하여 여러個의 얇은 板으로 細分하고, 그것들을 圓柱로 고쳐 생각하고 이들을 모으는 흡사 오늘날의 區分求積法과 같은 方法을 썼는데 이때 細分하는 얇은 板의 個數를 어느 程度로 함이 적절한가 하는 問題에서 無限의 생각을 갖지 않을 수 없었다. 그러나 그리스式의 思考方式은 無限은 限界가 없는 不確實한 것으로써 直觀的으로 確實한 느낌을 주는 有限보다는 無價値한 것이라고 생각했었다. 이 때문에 Democritus 以後 近 百年동안이나 無限의 생각은 有限의 경지를 벗어나지 못한채 取扱되어 오다가 Archimedes(287～212 BC)에 이르러 그에 依해서 無限小가 驅使되므로써 無限의 數學에 導入케된 계기가 마련되었다. Archimedes의 「無限小 幾何學」에서의 求積理論[7]은 微積分學 一步直前의 것이였다. 만일 Archimedes에게 函數의 槪念이 있었던들 오늘날 微積分學의 創始者는 Newton(1642～1727)이나 Leibniz(1646～1716)가 아니고 Archimedes였을지도 모른다.

無限小는 後日 Cavalieri(1598～1647)에 依하여 「不可分量의 連續體 幾何學」[8]이 著述되기까지는 無限的이라기 보다는 有限的이라고 보여진다. 여기서 不可分量이 어떤 것인가를 밝혀 둘 必要가 있다.

「不可分量」이라함은 「面積은 한 直線에 平行되게 그은 직선들이 그 圖形에 依하여 잘리어지는 線分全體로 構成된다고 생각하였고 이를 線分을 그 面積의 不可分量이라 하였다. 또 體積은 한 平面에 平行한 平面들이 그 立體에 依하여 잘되리어지는 分面全體로 構成된다고 생각하였고 이를 分面을 그 體積의 不可分量」이라 하였다. 不可分量의 이와같은 定義는 不可分量이 連續的임을 깨달았고 完全無限을 意味하는 不可分量인 것이다. 그것은 Archimedes의 無限小理論과 Newton의 積分法理論의 中間을 걷는 一種으로써 微積分學 展開의 전초적 역할을 했다.

以上을 要約하고 아울러 微積分學의 근원을 찾는다면 멀리는 Archimedes의 無限小理論이고 이것은 그 以前의 Democritus의 細分된 有限部分의 總和로서 행하는 求積法에 根源을 두고 있다고 할 수 있겠고, 가깝게는 Cavalieri의 不可分量의 連續體理論이라 할 수 있겠다.

4. Cauchy와 無限級數

Cavalieri의 「不可分量의 連續體」 理論은 Newton에 依하여 「點이 運動하여 線을 이루고, 線이 運動하여 面을 이루며, 面이 運動하여 體를 이루는 것」이라고 定義됨으로써 오늘날의 微積分學을 發生시킨 것이다.

微積分學의 土臺가 되는 것은 實數의 無限分割 可能性과 連續性인 것이다. 이 兩概念은 어떻게 보면 모순인 것같이 보여진다. 끊침이 없는 하나(一體)의 것이 얼마든지 細分된다고 하는 것은 쉽게 납득될 수 없는 모순으로 여겨졌고 이 때문에 Cauchy(1789～1857)에 이르기 까지는 허다한 혼란도 많았다. 예를 들면

6) 전국교육대학 수학연구회 前揭書 p.105
7) 極限으로서의 求積法이 아니고 細分된 여러 部分(有限個)의 總合으로서 행하는 求積法
8) Geometria indivisibilibus continuorum nova quadam ratione promota 1965

무한급수

$1-1+1-1+1-1+\cdots$

를 求함에 있어 해답은 여러가지로 나타났다. 어떤 사람은

$(1-1)+(1-1)+(1-1)+=0+0+0+\cdots$

으로 變形하여 0을 答이라 하였고 또 어떤 사람은

$1-(1-1)-(1-1)-(1-1)-\cdots$

$=1-0-0-0-\cdots$

으로 變形하여 1을 答이라 하였고 또 다른 사람은

$S=1-1+1-1+1-1+\cdots$

라 두어

$S=1-(1-1+1-1+1-\cdots)$

$=1-S$

$\therefore 2S=1 \qquad \therefore S=\frac{1}{2}$

을 求하여 $\frac{1}{2}$을 答이라고 主張되기도 하였다[9].

하나의 無限級數의 答이 3가지나 된다고 하는 理解할 수 없는 이 難問은 오랜동안 그 解答을 얻지 못하다가 Cauchy의 다음과 같은 無限級數의 合의 定義에 依하여 그 혼란은 終止付를 찍게 되었다.

Cauchy는 무한급수

$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n+\cdots$

의 合을 끝까지 더하는「無限個의 數의 合」이 아닌「部分合의 根限」으로써 定義하였다.

$S_n=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n$

로 하여 S_n을 a_1에서 a_n까지의 部分合으로 定할 때

$S_1=a_1$

$S_2=a_1+a_2$

$S_3=a_1+a_2+a_3$

$\vdots$

$S_n=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n$

$\vdots$

에서 無限數列

$S_1, S_2, S_3, \cdots\cdots S_n\cdots$

가 얻어진다. 이 部分合의 數列의 極限이 存在할 때 그 極限 S를 無限級數의 合이라고 定義하였다.

또 Cauchy는 수열의 극한을 定義함에 있어 어떤 수열 $\{a_n\}$이 限없이 a에 近接(收斂)한다 함은 임의의 양의 작은 數 ε을 取하더라도 어떤 順番에 到達해서는 $|a_n-a|$가 ε보다 작아지고 마는 것을 意味하는 것이라고 했음은 周知의 事實이다. Cauchy의 이러한 極限의 定義는 微積分學의 土臺를 確固히 하였고 解析學의 出發點이 되었다.

5. Cantor의 無限集合

Cauchy의 無限은 收斂의 定義에서 본바와 같이 모든 限界를 突破해 버리는 型의 無限으로써 어느 意味로는「時間的인 無限」이라고 할 수 있을 것이다. 이에 對하여 Cantor가 1:1 對應에 依하여 無限集合의 濃度를 把握하는데서 얻어진 無限概念은 그 性格과 意味를 Chauchy와는 전혀 달리하였다. 가령 自然數全體

1, 2, 3, …, n, …

를 把握함에 있어 Cantor 以前은 한없이 세어가는 소위 時間的 無限으로 認識하였음에 反하여 Cantor는 세는 方法이 명확하기 때문에 세지 않고서도 세어 버린것과 같음을 主張하여 無限을 새로운 角度로 認識케 하였다. 세지 않고서도 세어버림과 같다고 함은 自然數全體가 分明 하나의 닫혀진 範圍內에 들어 있는, (어느 意味로는)「空間的인 無限」으로 느껴진다.

이와같이 自然數의 集合이 限界가 없는 無限의 것으로 느껴지기 보다는 오히려 닫혀 있는 直觀的(?)이고 可觀的인 無限으로 그 概念이 確固히 됨에 따라 다른 無限集合들의 元素의 個數를 이 自然數集合과의 1對1 對應을 通하여 把握할 수 있게 되었다. 가령 有理數全體의 集合이나, 整數係數의 代數方程式의 根이 되는 數의 集合이 自然數全體의 集合과

9) 吉田洋一; 前掲書 p.60~61

같은 濃度를 갖었음을 보임으로써 當時의 數學界를 놀라게 했을뿐 아니라 여러 無限集合들의 濃度에 大小의 差가 있음을 發見한 것은 衝擊的인 事實이다. 이러한 事實들은 自然數集合이 닫힌 無限으로 그 概念이 파악됨으로써 可能한 것이다. Cantor의 이러한 思想에 入却하여 現代數學이 有限의 數에서 이루어지는 演算을 無限의 集合에로 擴張하였을 뿐 아니라 漸進的으로 發展하여 近 30年後의 Hilbert (1862~1943)에 依해서는 有限次元이 無限次元으로 擴張되는 소위 「無限次元 空間論」에 이르렀고 오늘날의 有限次元의 線型代數는 그 次元數를 無限으로 擴張하여 函數解析學에로 發展되었다.

參 考 文 獻

日本數學會：	岩波數學辭典，岩波書店，	1954
李星憲：	世界數學史，敎學社，	1961
小倉金之助補澤：	カジョリ 初等數學史 上・下，小山書店，	1961
中村四郞：	數學史，共立出版，	1965
吉田洋一：	零의 發見，岩洋書店，	1969
全國敎育大學數學硏究會，	數學，東明社，	1975

9페이지에서 계속

AI, no. 33618(1963), 83-146.

6. H. Blumberg, A theorem on arbitrary functions of two variables with applications. Fund. Math. 16(1930), 17-24.
7. V. Jarnik, Sur les functions de deux variables réelles. Fund. Math. 27(1936), 147-150.
8. F. Bagemihl, Curvilinear cluster sets of arbitrary functions. Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. 41(1955), 379-382.
9. F. Bagemihl, G. Piranian, and G.S. young, Intersections of cluster sets. Bull. Inst. Politehn. Iasi (N.S.) 5(1959), 29-34.
10. E.F. Collingwood, Cluster sets of arbitrary functions. Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. 46 (1960), 1236-1242.
11. E. F. Collingwood, The theory of cluster sets. Cambridge University Press, Cambridge, 1966.
12. K. Noshiro, Cluster Sets. Springer-Verlag, Berlin-Goettingen-Heidelberg, 1960.