直交補強材가 붙은 矩形平板에 있어서의 應力解析

任 尙 鐭* 金 載 東**

Stress Analysis of Orthogonally Stiffened Rectangular Plates by the Laplace Transformation

by

S. J. Yim*, J. D. Kim**

Abstract

Grillages are abundant in ship structures and in many other types of structures such as bridges and building floors.

Clarkson has shown that plated grillages can be satisfactorily analyzed as open gridworks if an appropriate effective breadth is taken into account.

Also, it has previously been pointed out, by Nielsen, that grillage calculations could be simplified by use of the Laplace transformation.

In this paper, it is assumed that the torsional rigidity of the members and axial load are negligible, also that girders have the same scantling and spacing each other and so stiffeners do.

Then the grillages composed of both-end-fixed girders and both-end-fixed or both-end-hinged stiffeners, which are subjected only to uniform normal loads are investigated.

The calculus of variation is used to set up the differential equations and the Laplace transformation is applied to solve the differential equations.

The program has been tested by FACOM 28 and the results show good agreements with those by the STRESS, which was developed in M.I.T..

The amount of the data input and computing time are much less than those of the STRESS. But this program has so much restrictions that it is urgent to extend the program to the grillage problems of arbitrary loading and boundary conditions.

≪記 號≫

$[A]$: 行列

$|A|$: $[A]$의 行列式

$[\bar{A}]$: $[A]$의 特性行列

$[\bar{\bar{A}}]$: $[\bar{A}]$의 adjoint

$\bar{a}$: 同一한 stiffener 間隔

a_m : 原點으로부터 m번째 stiffener까지의 거리

$[B_i(x)]$: 境界行列

$[B(S)]$: 初期値에 對한 Laplace 變換

d_{im} : i번째 girder上의 m번째 stiffener에서의 처짐량

$[d_i(x)]$: i번째 girder와의 交叉點에서의 stiffener 의 처짐량

$[D_i(S)]$: Impules 荷重의 Laplace 變換

E : 彈性係數

I_i : i번째 girder의 二次모우먼트

L : girder의 길이

L_n : 特性方程式의 根

$\mathcal{L}$: Laplace變換 記號

λ_n : $4\sqrt{L_n/4}$

$[P_{im}]$: girder i위의 a_m에서 集中荷重

R_i : i번째 交叉點에서의 girder의 反力

$[R_n]$: stiffener와 n번째 girder와의 交叉點에서의 反力

S : Laplace 變換에서의 매개 變數

$[U]$: 單位 行列

接受日字 : 1976年 9月 5日

*正會員, 서울大學校 工科大學

**正會員, 韓國船舶海洋研究所

U : 變形 Energy
W : 單位分布荷重
$[W_i(x)]$: girder 上의 一般荷重
W_i : 全 처짐量
x : girder 原點으로부터의 거리
y_i : i번째 交叉點에서의 girder의 實際 처짐량
z : stiffener 原點으로부터의 거리
$\delta(x-a_m)$: 原點에서 a_m 떨어진 곳의 Dirac-delta 函數
$\theta_n(x)$: Theta 函數(Laplace 逆變換函數)

1. 緒 論

서로 直交하는 補强材가 붙은 平板은 一般 構造物을 비롯하여 船體 構造의 상당 部分을 차지하고 있다. 補强材가 붙은 平板은 平板의 一部分이 補强材의 flange로서 作用한다고 假定하면 open grid의 問題로 歸着된다. 편의상, 補强材 中에서 斷面係數가 크고, 넓은 間隔으로 配置된 補强材를 girder라 하고 斷面係數가 작고, 좁은 間隔으로 配置된 補强材를 stiffener라 하기로 한다.

그런데, 얼마만큼의 平板이 flange로서 包含되어야 하는가는 有效幅의 問題로서 신중히 檢討되어야 한다. 本 論文에서는 有效幅으로서 $2t\sqrt{E/\sigma_y}$를 取했다.[1] 여기서, t는 web의 두께이고 σ_y는 材料의 降伏應力이다.

Open grid work는 1945年 Vedeler[2]에 依해서 작되었는데, 이것은 連續荷重이 作用하는 경우에 局限된 것이다.

任意 個數의 girder와 stiffener로 이루어진 grillage위에 一般的인 荷重이 作用하는 경우에 對해서는 Laplace 變換에 依한 方法이 아주 適合하다는 것이 알려져 있다.[3]

本 論文은 一般的인 境界條件 및 荷重條件으로의 擴張을 爲한 中間過程으로서, 一定한 間隔으로 촘촘하게 配置된 stiffener와 이에 對해 直交로 넓게 配置된 girder로 補强된 平板 위에 均一分布荷重이 垂直하게 作用하는 경우를 Laplace變換에 依한 方法으로 解析하여, M.I.T.에서 開發한 構造解析 프로그램인 STRESS[4]의 結果와 比較, 檢討하였다.

2. Laplace變換에 依한 理論

任意의 靜的荷重을 받는 grillage에 對한 微分方程式을 誘導하고, 다시 이것을 Laplace變換하여 그 解를 求한다.

2.1 微分方程式

基本座標系는 Fig. 1 에 따르기로 한다.

部材軸이 z軸과 平行인 보(梁)를 stiffener라 하고 x

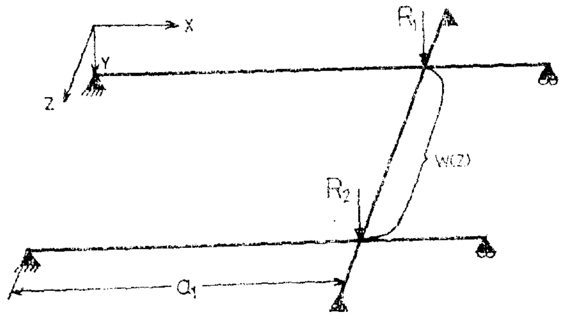

Fig.1 Reference Coordinate System

軸과 平行인 보(梁)를 girder라 한다. 한편, stiffener는 任意의 荷重 $w(z)$를 받는다고 假定한다.

그러면, girder의 굽힘에 依한 彈性에너지는 다음과 같다.

$$\frac{EI_i}{2}\int_0^L (y_i'')^2 dx \tag{2.1}$$

또한, girder의 反力에 依한 일은

$$-\int_0^L R_i\cdot\delta(x-a_1)\cdot y_i dx = R_i y_i(a_1) \tag{2.2}$$

과 같은데, 여기서 $\delta(x-a_1)$은 Dirac delta 函數로서 girder上의 위치 $x=a_1$에서의 單位集中荷重을 나타낸다.

結局, girder의 potential 에너지는 다음과 같다.

$$U=\int_0^L \left\{\frac{EI_i}{2}(y_i'')^2 - R_i\delta(x-a_1)y_i\right\}dx \tag{2.3}$$

式 (2.3)은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$U=\int_0^L F(y_i'',\ y_i,\ x)dx \tag{2.4}$$

式 (2.4)는 1個의 獨立變數 x와 2個의 從屬變數 y_i, y_i''를 包含하고 있다. 따라서, potential에너지가 最小되기 爲한 Euler의 條件式은 다음과 같다. [5]

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial F}{\partial y_1}-\frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y_1}+\frac{d^2}{dx^2}\frac{\partial F}{\partial y_1}=0\\
&\frac{\partial F}{\partial y_2}-\frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y_2}+\frac{d^2}{dx^2}\frac{\partial F}{\partial y_2}=0\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\frac{\partial F}{\partial y_i}-\frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y_i}+\frac{d^2}{dx^2}\frac{\partial F}{\partial y_i}=0
\end{aligned}\right\} \tag{2.5}$$

式 (2.3)과 (2.4)에서

$$F=\frac{EI_i}{2}(y_i'')^2-R_i\delta(x-a_1)y_i \text{ 이므로}$$

이것을 式 (2.5)에 代入하면

$$-R_i\delta(x-a_1)+\frac{d^2}{dx^2}(EI_iy_i'')=0$$

이것을 다시 정돈하면

$$EI_iy_i^{(4)}=R_i\delta(x-a_1) \tag{2.6}$$

girder의 처짐량은 stiffener 上의 荷重(live load)에 依한, girder와의 交叉點 i에서의 처짐 d_i와 그 點에서

의 girder의 反力 R_i를 고려하므로써 求할 수 있다. 한편, d_i는 stiffener가 girder에 依해 支持되어 있지 않다고 假定하고 荷重을 받는 stiffener의 各 交叉點에서의 처짐을 計算하므로써 求할 수 있다. 따라서, y_i를 交叉點에서의 실제 처짐량이라 하고 α_{ij}를 j節點에서의 單位荷重에 依한 i節點에서의 처짐량이라 하면

$$y_i = d_i - \alpha_{ij} R_j \tag{2.7}$$

이며, 이 式을 行列로 나타내면

$$[\alpha_{ij}]\ [R_j] = [d_i - y_i]$$

와 같고, 이 式을 反力에 對해 풀면

$$[R_j] = [\alpha_{ij}]^{-1}\ [d_i - y_i] \tag{2.8}$$

이고, 다시 式(2.6)을 式(2.7)에 代入하면

$$y_i(a_1) - d_i(a_1) - \alpha_{ij}(EIy)_j{}^{(4)} \tag{2.9}$$

가 된다.

그런데, 多數의 stiffener가 一定 間隔 $\bar{a}$로서 촘촘이 配置된 grillage에 對해서 式(2.9)는 다음과 같이 된다. [6], [7]

$$A_{ij} y_j{}^{(4)} + y_i = \bar{a} \cdot d_i(a_m) \cdot \delta(x - a_m) \tag{2.10}$$

여기서, $A_{ij} = \bar{a} EI_j \alpha_{ij}$ (unsummed) (2.11)

이다. 式(2.10)에서 $d_i(a_m) \cdot \delta(x - a_m)$은 一般化된 函數로서, 各各의 impulse荷重 $d_i(a_m)$이 原點으로부터 거리 a_m에 位置한다는 것을 나타낸다. 式(2.10)은 Michelsen [6]과 Stenerth[8]가 平衡條件을 써서 求한 바 있으며, 2-girder의 경우는 Vedeler[2]에 依해 求해진 바 있다.

2.2 N-girder grillage에 對한 微分方程式의 Laplace變換에 依한 解

式(2.10)을 行列로 나타내면

$$[A_{ij}][y_j{}^{(4)}] + [U][y_j] = \bar{a}[d_i(x)] \tag{2.12}$$

이다. 여기서, $[U]$는 單位 行列이고 $d_i(x)$는 一般荷重函數이다.

式(2.12)의 Laplace變換式은

$$[S^4 A_{ij} + U][y_j(S)] = \bar{a}[D_i(S)] + [B_i(S)] \tag{2.13}$$

과 같다. 여기서,

$$[D_i(S)] = \mathcal{L}[d_i(x)]$$

$$[B_i(S)] = [A_{ij}][S^3 Y_j + S^2 \Phi_j + SM_j + V_j] \tag{2.14}$$

이고, 또한 $V = y'''(0)$, $M = y''(0)$, $\Phi = y'(0)$, $Y = y(0)$이다.

한편, $[\bar{A}] = [S^4 A_{ij} + U]$를 特性行列(characteristic matrix)이라 하고, 이것의 逆行列 $[\bar{A}]^{-1} = [S^4 A_{ij} + U]^{-1}$을 傳達行列(transfer matrix)이라 정의한다.

式(2.13)에서

$$[y_i(S)] = [S^4 A_{ij} + U]^{-1}[\bar{a} D_j(S) + B_j(S)] \tag{2.15}$$

이다. 위 式을 Laplace逆變換하면

$$[y_i(x)] = \mathcal{L}^{-1}\{[S^4 A_{ij} + U]^{-1}[\bar{a} D_j(S) + B_j(S)]\} \tag{2.16}$$

가 된다. 式(2.15)에서

$$[\bar{A}]^{-1} = [S^4 A_{ij} + U]^{-1} = \mathrm{adj}[\bar{A}] / |\bar{A}| \tag{2.17}$$

이고, 여기서, adj$[\bar{A}]$와 $|\bar{A}|$는 各各 行列$[\bar{A}]$의 餘因數(adjoint matrix)와 行列式(determinant)이다.

따라서, 式(2.15)는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$[y_i(S)] = \frac{1}{|\bar{A}|} \mathrm{adj}[\bar{A}][\bar{a} D_j(S) + B_j(S)] = \frac{[F(S)]}{|\bar{A}|} \tag{2.18}$$

여기서 $[F(S)] = \mathrm{adj}[\bar{A}][\bar{a} D_j(S) + B_j(S)]$

이제, 式(2.18)을 Laplace逆變換하여 $y_i(x)$를 求한다. Cauchy residue theorem에 依하면, 式(2.18)에서

$$[y_i(x)] = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} \frac{[F(S)]}{|\bar{A}|} e^{sx} dS \tag{2.19}$$

이다. 式(2.19)의 右邊의 行列$[F(S)]$가 Jordan's lemma를 滿足하므로 (卽, $S \to \infty$일때 行列 $[F(S)]$의 모든 要素가 0에 收斂한다.) Cauchy residue theorem을 適用할 수 있다. 또한, $|\bar{A}| = 0$에서 S의 根들이 켤레 複素數이므로 特性方程式 $|\bar{A}| = 0$는 S^4에 對해 陰의 實根을 갖는다. 따라서, 行列式 $|\bar{A}|$는 다음과 같은 特性函數(characteristic function)로 나타낼 수 있다. 卽,

$$|\bar{A}| = |A|(S^4 + L_1)\ \ (S^4 + L_2) \cdots\cdots (S^4 + L_n) \tag{2.20}$$

과 같은데 여기서, $-L_1$, $-L_2, \cdots\cdots$, $-L_n$은 $|A| = 0$의 特性根이다.

式(2.20)을 式(2.19)에 代入하여 部分 分數로 나누어 주면, 式(2.20)은 다음과 같게 된다.

$$[y_i(x)] = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} \frac{[F(S)]_{S^4 = -L_1}}{|A|(L_2 - L_1)\ (L_3 - L_1) \cdots\cdots (L_n - L_1)(S^4 + L_1)} + \frac{[F(S)]_{S^4 = -L_2}}{|A|(L_1 - L_2)(L_3 - L_2) \cdots\cdots (L_n - L_2)(S^4 + L_2)} + \cdots\cdots + \frac{[F(S)]_{S^4 = -L_n}}{|A|(L_1 - L_n)(L_2 - L_n) \cdots\cdots (L_{n-1} - L_n)(S^4 + L_n)} \times e^{sx} dS \tag{2.21}$$

한편 위와 같은 方法으로 式(2.17)은

$$[\bar{A}]^{-1} = \frac{\mathrm{adj}[\bar{A}]}{|A|(S^4 + L_1)(S^4 + L_2) \cdots\cdots (S^4 + L_n)}$$

가 되며, 이것을 部分 分數化하면

$$[\bar{A}]^{-1} = \sum_{n=1}^{N} \frac{[\tilde{A}(-L_n)]}{|A| \prod\limits_{\substack{m=1 \\ m \neq n}}^{N} (L_m - L_n)(S^4 + L_n)} \tag{2.22}$$

가 된다.

여기서, $[\tilde{A}(-L_n)]$은 $[\bar{A}(-L_n)]$의 餘因數(adjoint)行列이며 Π는 連續곱의 記號이다.

2.3 初期値에 對한 Laplace逆變換

過程式(2.14)에서 初期 條件은

$$[B_i(S)] = [A_{ij}][S^3 Y_j + S^2 \Phi_j + SM_j + V_j] \tag{2.23}$$

이고 여기서, $V = y'''(0)$, $M = y''(0)$, $\Phi = y'(0)$, $Y =$

$y(0)$이다.

또한, 式(2.16)에서

$[y_i(x)]=\mathcal{L}^{-1}\{[\bar{A}]^{-1}[\bar{a}D_i(S)+B_i(S)]\}$ 이므로

$[B_i^*(S)]=[\bar{A}]^{-1}[B_i(S)]$라 하고, 式(2.22)을 이용하면

$$[B_i^*(S)]=\sum_{n=1}^{N}\frac{[\bar{\bar{A}}(-L_n)][A][V_j+SM_j+S^2\Phi_j+S^3Y_j]}{|A|\prod_{\substack{m=1\\m\neq n}}^{N}(L_m-L_n)(S^4+L_n)} \tag{2.24}$$

가 된다. 따라서, 式(2.24)를 Laplace逆變換하면

$$[B_i^*(x)]=[B_1(x)][V_j]+[B_2(x)][M_j]+[B_3(x)][\Phi_j]+[B_4(x)][Y_j] \tag{2.25}$$

가 되는데 여기서,

$$[B_1(x)]=\sum_{n=1}^{N}\frac{[\bar{A}(-L_n)][A]\theta_1(\lambda_n x)}{|A|\prod_{\substack{m=1\\m\neq n}}^{N}(L_m-L_n)} \tag{2.26}$$

이고 또한,

$$[B_{m+1}(x)]=\frac{d^m}{dx^m}[B_1(x)],$$

$$\theta_1(\lambda_n x)=\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{S^4+L_n}\right\} \tag{2.27}$$

$$L_n=4\lambda_n^4 \tag{2.28}$$

이다.[9]

편의상, 위의 $[B_i(x)]$를 境界行列 (boundary matrix)이라 정의한다.

2.4 荷重 條件에 對한 Laplace 逆變換

이것은 2.3에서의 境界行列과 같은 方法으로 求할 수 있다.

式(2.16)에서 다음과 같이 정의하자.

$$[L_i(x)]=\mathcal{L}^{-1}\{[\bar{A}]^{-1}[\bar{a}D_i(S)]\} \tag{2.29}$$

例로서, 原點으로부터 거리 a_m인 곳에 M個의 集中荷重이 있다면, 다음 式으로 나타낼 수 있다. 卽,

$$\bar{a}d_i(x)=\bar{a}\sum_{m=1}^{M}d_{im}\,\delta(x-a_m)$$

윗 式을 Laplace變換하면

$$[\bar{a}D_i(S)]=\mathcal{L}\{[\bar{a}d_i(x)]\}=\mathcal{L}\{[\bar{a}\sum_{m=1}^{M}d_{im}\,\delta(x-a_m)]\}=\bar{a}\sum_{m=1}^{M}d_{im}\,e^{-sa_m} \tag{2.30}$$

이고, 式(2.30)을 式(2.29)에 代入하면

$$[L_1(x)]=\mathcal{L}^{-1}\{[\bar{A}]^{-1}[\bar{a}\sum_{m=1}^{M}d_{im}\,e^{-sa_m}]\}$$

이고, 다시 式(2.22)를 윗 式에 代入하면

$$[L_1(x)]=\sum_{n=1}^{N}\frac{[\bar{\bar{A}}(-L_n)]}{|A|\prod_{\substack{r=1\\r\neq s}}^{N}(L_r-L_s)}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{[\bar{a}\sum_{m=1}^{M}d_i e^{-sa_m}]}{S^4+L_n}\right\} \tag{2.31}$$

이다. 또한, $\mathcal{L}^{-1}\{F(S)\}=f(x)$일때

$$\mathcal{L}^{-1}\{e^{-as}F(S)\}=f(x-a) \tag{2.32}$$

이므로 式(2.31)과 式(2.32)로부터 다음을 얻게 된다.

$$[L_1(x)]=\sum_{n=1}^{N}\frac{[\bar{\bar{A}}(-L_n)]}{|A|\prod_{\substack{r=1\\r\neq s}}^{N}(L_r-L_s)}\left[\sum_{m=1}^{M}\bar{a}d_{im}\,\theta_1(\lambda_n,\,x-a_m)\right] \tag{2.33}$$

물론, 任意의 荷重 分布에 對해서도 위의 變換이 가능하다.[9]

이와 같은 $[L_i(x)]$行列을 荷重行列(load matrix)이라 하자.

2.5 처짐 方程式(deflection Equation)

結局, 式(2.25)와 式(2.33)을 式(2.16)에 代入하면 다음의 처짐 方程式을 求할 수 있다. 卽,

$$[y_i(x)]=[L_1(x)]+[B_1(x)][V_j]+[B_2(x)][M_j]+[B_3(x)][\Phi_j]+[B_4(x)][Y_j] \tag{2.34}$$

1-girder에 對해서, 윗 式은

$$y(x)=P(x)+V\theta_1(x)+M\theta_2(x)+\Phi\theta_3(x)+Y\theta_4(x)$$

가 된다.[3]

2.6 境界條件에 따른 境界値 問題

이제, 처짐 方程式이 얻어지면 未知의 初期値들은 境界條件으로부터 求할 수 있다.

兩端 固定인 girder의 경우, 境界條件은

$Y=y(0)=y(L)=0$

$\Phi=y'(0)=y'(L)=0$

이고, $x=L$에서의 境界値 行列은 式(2.33)으로부터

$[y(L)]=[L_1(L)]+[B_1(L)][V_j]+[B_2(L)][M_j]=[0]$,

$[y'(L)]=[L_2(L)]+[B_2(L)][V_j]+[B_3(L)][M_j]=[0]$

이므로

$$\begin{bmatrix}[B_1(L)] & [B_2(L)]\\ [B_2(L)] & [B_3(L)]\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}[V_j]\\ [M_j]\end{Bmatrix}=-\begin{Bmatrix}[L_1(L)]\\ [L_2(L)]\end{Bmatrix} \tag{2.35}$$

가 된다.

윗 式으로부터 未知의 係數 $\begin{Bmatrix}[V_j]\\ [M_j]\end{Bmatrix}$는 쉽게 求할 수 있으며, 이것을 다시 式(2.34)의 처짐 方程式에 代入한 다음 願하는 x값을 주면 girder上의 任意點에서의 처짐량(量)과 廻轉角, 굽힘 모우멘트 및 剪斷力을 求할 수 있다.

3. 計算 結果 및 考察

Laplace變換 理論을 適用하여 構成한 프로그램을 使用하여 Table. 1과 Fig. 2, 3, 4에서와 같은 材質과 境界條件 및 荷重條件을 갖는 4개의 Model에 對한 처짐量, 기울기, 굽힘 모우먼트 및 剪斷力을 計算하여 M.I.T.에서 開發한 프로그램인 STRESS에 依한 結果와 比較하였는데, 2가지 方法에 依한 結果値들은 0.5% 程度의 誤差를 갖는다. 참고로 Model Ⅳ에 對해서 Laplace變換理論과 STRESS에 依한 結果値를 Table. 2, 3에 例示하

였다.

또한 Laplace變換理論에 依한 結果를 Fig. 5, 6, 7, 8에 보인다.

以上의 結果에서 다음을 考察할 수 있다.

① STRESS의 結果와 比較하여 正確한 對稱値가 나오지 않는 것은 絕對値가 큰 物理量의 取扱에서 오는 計算 上의 誤差로 보인다. 이러한 誤差를 避하기 爲해서는 物理量의 無次元化가 要求된다.

② 本 論文에서 다룬 model이 girder의 2次 moment가 同一한 경우에 局限된 것은 特性 方程式의 固有値를 求하는 데에 Jacobi 方法을 썼기 때문이다.

即, 非對稱行列에 對한 固有値를 求하는 方法으로 擴張해야 한다.

③ girder數의 增加에 따른 行列의 次數가 커지는 것을 막기 爲해 對稱條件을 利用한 行列의 縮小가 必要하다.

Table 1.

Model	Girder數	Stiffener數	境界條件 Girder	境界條件 Stiffener	Girder 길이 in	Stiffener 길이 in	Stiffener 간격 in	Girder 2次 모우먼트 in^4	Stiffener 2次 모우먼트 in^4	彈性係數 psi	荷重狀態 (均一分布荷重) psi
Model Ⅰ	2	9	兩端固定	兩端固定	300	330	30	16970	631	3×10^7	15
Model Ⅱ	3	11	兩端固定	兩端固定	312	288	26	19250	6100	3×10^7	15
Model Ⅲ	3	11	兩端固定	兩端hinge	312	288	26	19250	6100	3×10^7	15
Model Ⅳ	5	10	兩端固定	兩端固定	360	960	32.73	93440	4630	3×10^7	28

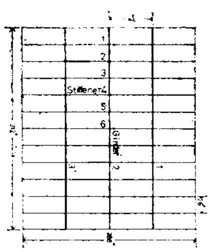

Fig.2 Model Ⅰ

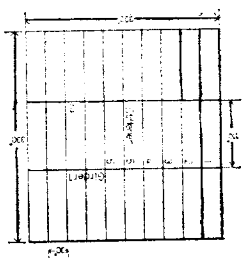

Fig.3 Model Ⅱ, Ⅲ

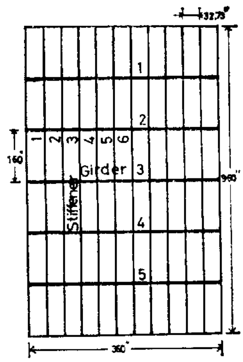

Fig.4 Model Ⅳ

Table 2. Deflection (Model Ⅳ) (단위 : inch)

girder No.	Stiffener No. / method	左端	1	2	3	4	5
1	Laplace변환에 의한 결과	0.	0.6898×10^{-2}	0.2227×10^{-1}	0.3948×10^{-1}	0.5364×10^{-1}	0.6151×10^{-1}
	STRESS에 의한 결과	0.	0.0069	0.0223	0.0395	0.0537	0.0615
2	Laplace변환에 의한 결과	0.	0.7887×10^{-2}	0.2558×10^{-1}	0.4550×10^{-1}	0.6197×10^{-1}	0.7116×10^{-1}
	STRESS에 의한 결과	0.	0.0078	0.0255	0.0454	0.0619	0.0711
3	Laplace변환에 의한 결과	.0	0.7589×10^{-2}	0.2458×10^{-1}	0.4370×10^{-1}	0.5947×10^{-1}	0.6826×10^{-1}
	STRESS에 의한 결과	0.	0.0075	0.0245	0.0437	0.0594	0.0682

Table 3. Bending Moment (Model Ⅳ) (단위 : lb-inch)

girder No.	Stiffener No. / method	左 端	1	2	3	4	5
1	Laplace변환에 의한 결과	-0.4346×10^{8}	-0.2139×10^{8}	-0.4032×10^{7}	0.8772×10^{8}	0.1718×10^{8}	$0.2135\times10_{8}$
	STRESS에 의한 결과	-0.4351×10^{8}	-0.2142×10^{8}	-0.4053×10^{7}	0.8747×10^{7}	0.1716×10^{8}	0.2132×10^{8}
2	Laplace변환에 의한 결과	-0.4949×10^{8}	-0.2486×10^{8}	-0.5051×10^{7}	0.9871×10^{7}	0.1986×10^{8}	0.2487×10^{8}
	STRESS에 의한 결과	-0.4946×10^{8}	-0.2484×10^{8}	-0.5044×10^{7}	0.9877×10^{7}	0.1986×10^{8}	0.2487×10^{8}
3	Laplace변환에 의한 결과	-0.4767×10^{8}	-0.2381×10^{8}	-0.4749×10^{7}	0.9538×10^{7}	0.1906×10^{8}	0.2381×10^{8}
	STRESS에 의한 결과	-0.4769×10^{8}	-0.2382×10^{8}	-0.4750×10^{7}	0.9539×10^{7}	0.1906×10^{8}	0.2381×10^{8}

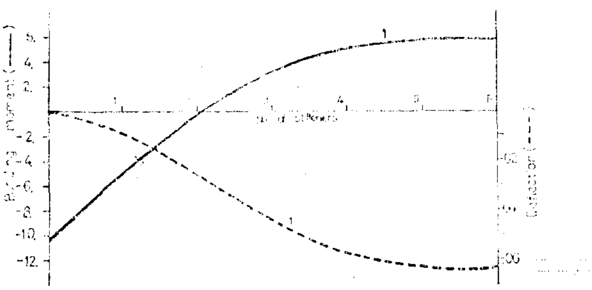

Fig.5 Mode Ⅰ—Deflection (in inch) and Bending Moment (in million pound·inch) of Girder 1

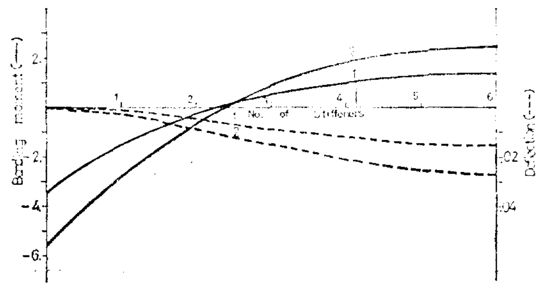

Fig.6 Mode Ⅱ—Deflection (in inch) and Bending Moment (in million pound·inch) of Girder 1 and 2

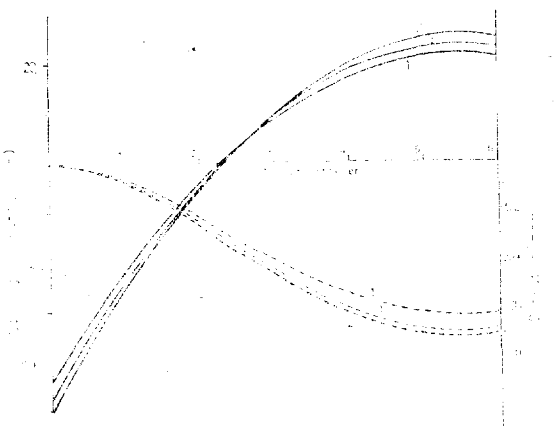

Fig.7 Mode Ⅲ—Deflection (in inch) and Bending Moment (in million pound·in) of Girder 1 and 2

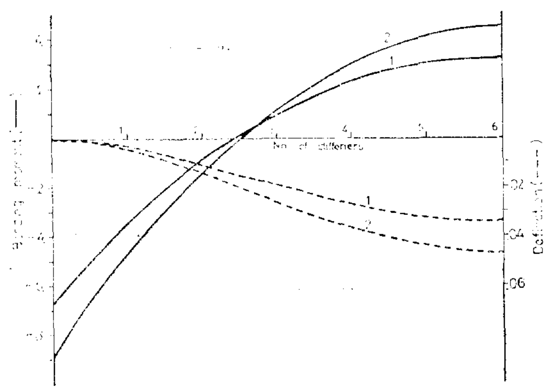

Fig.8 Model Ⅳ—Deflection(in inch) and Bending Moment (in million pound·in) of Girder 1,2 and 3

4. 結 論

以上에서 다음의 結論을 얻을 수 있다.

① 本 論文에서는, 비틀 强性度를 無視하고 軸力이 作用하지 않는다고 假定할때, 等間隔으로 촘촘히 配列된 stiffener와 girder로써 構成된 grillage構造物에 均一分布荷重이 作用하는 경우를 解析했는데, 그 結果 girder를 따라 처짐量, 廻轉角 및 굽힘 모우멘트가 STRESS에서의 結果와 一致하고 있다.

② 變位法과 比較하여 input data의 量과 計算 時間

이 아주 적다.

③ 本 Laplace變換法의 큰 長點인 任意荷重條件 및 任意 端條件에 對한 擴張이 要求된다.

④ 위의 擴張이 이루어질 경우에 本 Laplace變換法에 依한 平板 解析은 補强材가 붙은 平板 構造物 및 局部 解析에 實用的 價値가 있을 것이다.

參 考 文 獻

〔1〕 G.W. Hovgaard, "*Structural Design of Warships.*", 1940.

〔2〕 G. Vedeler, "*Grillage Beams in Ships and Similar Structures*", Grendahl & Son, Oslo, 1945 or University Microfilms Inc., Ann Arbor, Michigan.

〔3〕 R. Nielsen, "Analysis of Plane and Space Grillages under Arbitrary Loading of Use of the Laplace Transformation", *Danish Technical Press*, Copenhagen, Denmark, 1965.

〔4〕 IBM Application Program, "*Structural Engineering System Solver (STRESS) for the IBM* 1130," Version 2, 1968.

〔5〕 F.B. Hildebrand, "*Methods of Applied Mathematics*", 2nd Ed., The Prentice-Hall International Inc., London, 1972

〔6〕 F.C. Michelsen and R. Nielsen, "*Analysis of Grillages by Means of the Laplace Transform*", Schifftechnic, Bd. 9, Heft 49, Nov., 1962

〔7〕 Pin-Yu Chang, "*Elastic Analysis of Grillages Including Torsional Effect and Stability*", The University of Michigan, Ann Arbor, May, 1967

〔8〕 E. Steneroth, "On the Transverse Strength of Tankers", *Transaction of the Royal Institute of Technology*, No. 90, Stockholm, 1955

〔9〕 R.V. Churchill, "*Operational Mathematics*", 2nd Ed., McGraw-Hill, New York, 1958

〔10〕 任尙鎭 ; "매트릭스法에 依한 船體 肋骨環 解析", 大韓造船學會誌, 第10卷, 第1號, 1973. 3

〔11〕 申永琦 ; "매트릭스 構造解析法", 大韓土木學會誌 Vol.20, No.4, 1972. 2

附 錄

A. Laplace變換과 荷重函數

1. Laplace變換의 定義

陽의 實數 x를 獨立變數로 하는 實數函數 $f(x)$에 對한 Laplace變換을 $F(S)$라 하면

$$F(S)=\int_0^\infty e^{-sx}f(x)\,dx \tag{A.1}$$

이다. 여기서 $S=x+iy$이다.

따라서, $F(S)$는 式(A.1)을 存在하게 하는 複素數 S의 函數이다.

한편, 函數 $f(x)$는 $x\geq 0$인 모든 有限區間에서 連續이어야 하며, 또 x가 無限大로 갈 때에 exponential order이어야 한다. 大部分의 函數 $f(x)$는 이러한 조건을 만족하며, 이 變換을 다음과 같이 나타낸다.

$$F(S)=\mathcal{L}\{f(x)\} \tag{A.2}$$

위의 過程에 依해 實變數 x의 函數 $f(x)$는 複素의 補助變數 S의 函數로 變換된다.

式 (A.2)의 逆 관계식은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$f(x)=\mathcal{L}^{-1}\{F(S)\} \tag{A.3}$$

또한 $f^{(n)}(x)$를 함수 $f(x)$의 n次 도함수라 할 때, 이에 對한 Laplace變換은, 部分積分에 依해

$$\mathcal{L}\{f^{(n)}(x)\}=S^nF(S)-\sum_{k=1}^{n}S^{n-k}f^{(k-1)}(0) \tag{A.4}$$

가 된다. 但, 모든 陽定數 n에 對하여 $\mathcal{L}\{f^{(n-1)}(x)\}=F^{(n-1)}(S)$가 존재해야 하며 $f^{(n-1)}(x)$가 exponential order로서 連續이어야 한다.

2. 荷重函數

Laplace變換의 커다란 長點은 다루기 힘든 다음과 같은 不連續函數를 비교적 容易하게 다룰 수 있다는 것이다.

① 均一分布荷重(uniform step load)

$x<a$에서의 荷重이 0이고, $x>a$에서는 W인 경우를 보자. 이러한 성질을 갖는 函數를 $U(x-a)$라 하면

$$\mathcal{L}\{U(x-a)\}=\int_0^a 0\cdot e^{-sx}dx+\int_a^\infty e^{-sx}dx=\frac{e^{-as}}{S} \tag{A.6}$$

이것의 逆變換은

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-as}}{S}\right\}=\begin{cases}0; & x<a,\\ 1; & x>a\end{cases} \tag{A.7}$$

따라서, ①의 荷重은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$WU(x-a)=\begin{cases}0; & x<a\\ W; & x>a\end{cases}$$

② 集中荷重(concentrated load)

集中荷重의 變換은 單位 impulse나 Dirac delta函數를 써서 나타낸다.

$\delta(x-a)$로 나타나는 單位 impulse는

$$\delta(x-a)=0;\ x\neq a$$

$$\int_0^\infty \delta(x-a)\,dx=1 \tag{A.8}$$

또한

$$\int_0^\infty f(x)\delta(x-a)\,dx=f(a) \tag{A.9}$$

이다. 따라서 $\delta(x-a)$의 Laplace 變換은

$$\int_0^\infty e^{-sx}\delta(x-a)dx=e^{-sa} \qquad \text{(A. 10)}$$

가 된다.

結局, $x=a$에 位置한 크기 P의 集中荷重에 對한 變換은 Pe^{-sa}와 같다.

③ Moment荷重

Impulse moment는 grillage 構造物의 端條件을 나타내는데 있어 긴요한 것이다.

極히 작은 거리 Δx만큼 떨어져 있는 크기가 같고 方向이 反對인 2個의 集中荷重을 생각해 보자.

아랫 方向의 荷重을 陽으로 定義하면, 위의 2個의 集中荷重에 對한 Laplace 變換은

$$P(e^{-s(a-\Delta x)}-e^{-sa})=P(e^{\Delta xs}-1) \qquad \text{(A. 11)}$$

$e^{\Delta xs}$를 Series expansion하면

$$e^{\Delta xs}=1+S\cdot\Delta x+\frac{S^2(\Delta x)^2}{2!}+\cdots\cdots$$

따라서 Δx가 0에 접근하면 式(A. 11)은 다음과 같게 된다.

$$Pe^{-sa}(S\Delta x)=P\cdot\Delta x(Se^{-sa})=\overline{M}Se^{-sa} \qquad \text{(A. 12)}$$

여기서, $\overline{M}$는 $\Delta x\to 0$일 때의 Moment $\Delta x\cdot P$이다.

④ 流體靜力學的 荷重(hydrostatic load) $0\leq x<a$에서 荷重이 0이고, $x=b$에서의 荷重이 HH인 流體靜力學的 荷重의 경우를 보자.

荷重 slope을 H라 하면

$$H=\frac{HH}{b-a}$$

이고, Laplace變換은

$$\int_0^\infty e^{-sx}Hxdx=\frac{H}{S^2}$$

인데, $x=a$부터 荷重이 시작된다면, Laplace變換은

$$\frac{He^{-sa}}{S^2} \qquad \text{(A. 13)}$$

이 된다.

따라서, 위와 같은 荷重狀態를 나타내는 Laplace變換은

$$\frac{He^{-sa}-He^{-sb}}{S^2}-\frac{HHe^{-sb}}{S}$$

가 된다.

結局, 任意의 荷重狀態도 위의 4가지 變換의 組合으로 나타낼 수 있고, 이에 對한 逆變換은 convolution定理에 依해 荷重函數를 求할 수 있다.

B. Laplace 逆變換과 θ函數

實變數 x의 函數 $f(x)$가 exponential order로 될 수 있다는 假定아래, $f(x)$의 Laplace 變換 $F(S)$는

$$F(S)=\int_0^\infty e^{-sx}f(x)dx \qquad \text{(B. 1)}$$

式(B. 1)은 一意的이어야 하며, 주어진 $F(S)$에 對해 複素線積分(complex line integral)에 依해 求할 수 있는 函數 $f(x)$가 存在한다.

Fourier-Mellin inversion integral에 따르면

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(S)\}=f(x)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}e^{sx}F(S)dS \qquad \text{(B. 2)}$$

이다.

위의 積分은, 複素平面 內의 直線 $x=\sigma$ (σ는 實數)를 따라 $-i\infty$부터 $+i\infty$까지 遂行되어야 한다.

First Bromwich path라고 불리우는 이 直線은 函數 $F(S)$의 모든 pole이 이 直線의 왼쪽에 오도록 定해져야 한다.

한편, 彈性的으로 支持된 보(梁)에 對한 微分方程式은

$$EIy^{(4)}+Qy''+Ky=w(x) \qquad \text{(B. 3)}$$

인데, 여기서 $w(x)$는 보에 걸리는 任意橫荷重, Q는 軸力, K는 foundation modulus (또는 spring constant)이다.

式(B. 3)의 Laplace 變換은

$$\mathcal{L}\{EI(y^{(4)}+\frac{Q}{EI}y''+\frac{K}{EI}y=\frac{w(x)}{EI})\}$$

이고, 이것을 다시 쓰면

$$(S^4+NS^2+C)Y(S)=\frac{w(S)}{EI}+B(S) \qquad \text{(B. 4)}$$

이다. 여기서 $N=\frac{Q}{EI}$, $C=\frac{K}{EI}$이며

$B(S)=S^3y(0)+S^2y'(0)+Sy''(0)+y'''(0)+NSy(0)+Ny'(0)$로서 境界値에 對한 變換이고, $w(S)$는 荷重에 對한 變換으로 任意의 荷重函數를 나타낸다.

式(B. 4)의 Laplace逆變換은

$$y(x)=\mathcal{L}^{-1}\{Y(S)\}=\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\frac{w(S)}{EI}+B(S)}{S^4+NS^2+C}\right\} \qquad \text{(B. 5)}$$

이다.

式(B. 5)의 $Y(S)$는 一般的으로 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$F(S)=\frac{S^n}{S^4+NS^2+C}\quad (n=-1,0,1,2,3) \qquad \text{(B. 6)}$$

여기서, N과 C는 實數의 常數이며 S는 實部가 0보다 큰 媒介變數이다.

$F(S)$가 Jordan's lemma를 滿足한다면, 積分(B. 2)는 residue theorem에 依해 求할 수 있다.

Jordan's lemma란, S가 無限大로 接近할 때 $F(S)$의 極限値가 0이면 式(B. 2)는 Cauchy's integral theorem을 滿足한다는 것이다. 그러면, $f(x)$는 residue의 合을 求함으로써 얻을 수 있다.

式(B. 6)의 分母는 다음과 같이 因數分解된다.

$$F(S)=\frac{S^n}{[S^2+(b-a)^2][S^2+(b+a)^2]} \qquad \text{(B. 7)}$$

여기서, a, b 는 複素數의 常數이다. $F(S)$는 analytic이며 Cauchy積分定理의 모든 條件을 滿足시킨다는 것을 쉽게 알 수 있다.

式(B.6)과 (B.7)에서

$$C=(b+a)^2(b-a)^2=(b^2-a^2)^2$$

$$N=(b+a)^2+(b-a)^2=2(b^2+a^2)$$

따라서

$$a=\sqrt{\frac{1}{2}\sqrt{C}-\frac{1}{4}N}\quad(\text{in}^{-1})$$

$$b=\sqrt{\frac{1}{2}\sqrt{C}+\frac{1}{4}N}\quad(\text{in}^{-1})\qquad(\text{B. }8)$$

N, C 는 이미 보인 바와 같이

$N=\dfrac{Q}{EI},\quad C=\dfrac{K}{EI}$ 이다

一般的으로 定義된 θ 函數, 即

$$\theta_{n+1}=\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{S^n}{S^4+NS^2+C}\right\}$$

$$(n=\cdots\cdots-2,-1,0,1,2,3)\qquad(\text{B. }9)$$

로부터

$$\left.\begin{aligned}
\theta_{-2}&=\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{S^3}\ \frac{1}{S^4+NS^2+C}\right\}\\
&=\frac{x^2}{2C}+\frac{N(\theta_4+N\theta_2)}{C^2}-\frac{N}{C^2}-\frac{\theta_2}{C}\\
\theta_{-1}&=\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{S^2}\ \frac{1}{S^4+NS^2+C}\right\}=\frac{x}{C}-\frac{N\theta_1+\theta_3}{C}\\
\theta_0&=\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{S}\ \frac{1}{S^4+NS^2+C}\right\}=\frac{1}{C}-\frac{N\theta_2+\theta_4}{C}\\
\theta_1&=\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{S^4+NS^2+C}\right\}\\
&=\frac{a\cosh ax\sin bx-b\sinh ax\cos bx}{2ab\sqrt{C}}\\
\theta_2&=\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{S}{S^4+NS^2+C}\right\}=\frac{\sinh ax\sin bx}{2ab}\\
\theta_3&=\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{S^2}{S^4+NS^2+C}\right\}\\
&=\frac{b\sinh ax\cos bx+a\cosh ax\sin bx}{2ab}\\
\theta_4&=\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{S^3}{S^4+NS^2+C}\right\}=\cosh ax\cos bx-\frac{N}{2}\theta_2\\
\theta_5&=\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{S^4}{S^4+NS^2+C}-1\right\}=-N\theta_3-C\theta_1\\
\theta_6&=\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{S^5}{S^4+NS^2+C}-S\right\}=-N\theta_4-C\theta_2
\end{aligned}\right\}\ (\text{B. }10)$$

$$\theta_7=(N^2-C)\theta_3+CN\theta_1$$

$$\theta_8=(N^2-C)\theta_4+CN\theta_2$$

$$\theta_9=N(2C-N^2)\theta_3-C(N^2-C)\theta_1$$

$$\theta_{10}=N(2C-N^2)\theta_4-C(N_2-C)\theta_2$$

$$\theta_{11}=(N^4+C^2-3N^2C)\theta_3-NC(2C-N^2)\theta_1$$

$$\theta_{12}=(N^4+C^2-3N^2C)\theta_4-NC(2C-N^2)\theta_2$$

이상에서, 모든 θ 函數는 θ_1, θ_2, θ_3, θ_4로써 나타낼 수 있다는 것을 알 수 있다.

그런데, 本 論文에서는 軸力을 없다고 假定했으므로 式(B.8)에서 $Q=0$ 이면 $N=0$ 이고, 따라서, $a=b=\sqrt{\frac{1}{2}\sqrt{C}}$가 된다.

여기서, $a=b=\lambda$ 라 하면

$$\left.\begin{aligned}
\theta_1&=\frac{\cosh\lambda x\sin\lambda x-\sinh\lambda x\cos\lambda x}{4\lambda^3}\\
\theta_2&=\frac{\sinh\lambda x\sin\lambda x}{2\lambda^2}\\
\theta_3&=\frac{\sinh\lambda x\cos\lambda x+\cosh\lambda x\sin\lambda x}{2\lambda}\\
\theta_4&=\cosh\lambda x\cos\lambda x
\end{aligned}\right\}\ (\text{B. }11)$$

等과 같이 나타낼 수 있다.