議　文

論文 76-13-6-5

부울代數算法에 의한 回路網信賴度의 計算法

(A Boolean Algebra Method for Calculation of Network Reliability)

高　瓊　植*・吳　英　煥**

(Koh, Kyung Shik *and* Oh, Young Whan)

要　約

本論文에서는 通信回路網의 信賴度를 計算하는데 부울代數를 이용하는 方法을 제시하였다. 한 回路의 두 接合點사이의 모든 單純通路가 주어지면 並列演算이라고 命名되는 부울代數算法에 의하여 두 端點사이의 信賴度가 記號的으로 計算된다. 이 方法은 回路가 方向性이거나 非方向性이거나 다 効果的이다.

Abstract

A boolean algebra method for computing the reliability in a communication network is presented. Given the set of all simple paths between two nodes in a network, the terminal reliability can be symbolically computed by the Boolean operation which is named parallel operation. The method seems to be promising for both oriented and nonoriented network.

1. 序　論

通信回路를 解析하는데 있어서 가끔 두 端點사이의 信賴度 다시 말해서 두 端點사이에 通信路가 開設될수 있는 確率을 正確하게 또 系統的으로 계산하는 문제가 대두되는 일이 많다. 여기서 通信回路는 方向性을 갖거나 또는 갖지 않는 孤와 接合點으로 구성되는 그래프로 模型化되는데, 孤에는 信賴度를 나타내는 무게(weight)가 주어지고 接合點에는 무게가 주어지지 않는다. 接合點은 通信局을 나타내며 무게가 주어지지 않는 것은 信賴度滿點 다시 말해서 항상 通한다는 뜻이고, 孤는 通信局사이의 通信線路를 나타내며 항상 通한다고 간주하지 않으며 무게는 通하는 時間의 百分率을 나타낸다. 그리고 各孤間의 무게사이에는 相關關係가 없다고 생각하며, 다시 말해서 信通局사이의 線路障害의 確率은 서로 아무 상관이 없고 獨立的이라고 생각하는 것이다. 또 孤의 무게 즉 信賴度는 計算途中 一定하다고 假定한다.

다음에 例를 들어 本論文에서 사용할 記號法 및 概念에 대해 설명하기로 한다. 그림 1[(4)]의 그래프에 있어서 s, a, b, t는 接合點을 표시하고 P_i는 孤 i 의 무게를 나타낸다. 여기서 孤 i 에 대해 부울變數 x_i를 導入하여 그 値를 $\{0, 1\}$의 2値를 취하는 것으로 하고

$$P(x_i=1)=p_i,\quad P(x_i=0)=1-p_i=q_i$$

로 규정한다. 그림 1에 있어서 孤3은 非方向性이므

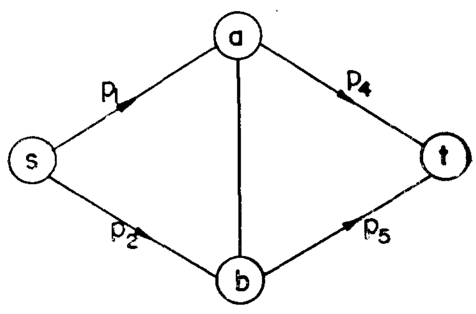

그림 1. 通信回路網의 確率그래프表示例

Fig. 1. An example of probabilistic graph of communication network.

*正會員 **準會員 仁荷大學校 電子工學科

接受日字：1976年 12月 1日

로 接合點 a에서 b로 通할 수도 있고, 또 b에서 a로 通할 수도 있으며 그 무게는 兩方向이 다 P_3이라고 해석한다. 그러면 端點 s에서 t로 通하는 通路는 孤 1—4, 2—5, 1—3—5 및 2—3—4의 4通路이다. 이와같이 閉路를 形成하지 않고 端點사이에 이루어지는 通路를 單純通路라고 命名하기로 한다. 지금 端點 s와 t사이의 信賴度 $P_{s,t}$를 계산하고저 하는데, 이와같은 端點間信賴度計算에 관해서는 여러 論文이 發表되고 있지만 本 論文에서는 端點사이의 모든 單純通路의 集合이 주어졌을 때 부울代數算法에 의하여 記號的으로 계산하는 方法을 제시하고저 한다.

2. 並列演算

그림 2(a)와 같은 두 單純通路를 갖는 端點 s, t사이의 信賴度 $P_{s,t}$를 계산하면

$$P_{s,t}=1-(1-p_1)(1-p_2)=p_1+p_2-p_1p_2$$
$$=p_1+p_2(1-p_1)=p_1+q_1p_2$$

또는 $P_{s,t}=p_1+p_2-p_1p_2=p_2+p_1(1-p_2)=p_2+p_1q_2$

그림 2(b)의 $P_{s,t}$를 계산하면

$$P_{s,t}=p_1p_2+p_3p_4-p_1p_2p_3p_4=p_1p_2+p_3p_4(1-p_1p_2)$$
$$=p_1p_2+p_3p_4(1-p_1+p_2-p_1p_2)$$
$$=p_1p_2+p_3p_4(1-p_1)+p_1p_3p_4(1-p_2)$$
$$=p_1p_2+q_1p_3p_4+p_1q_2p_3p_4$$

또는

$$P_{s,t}=p_1p_2+p_3p_4-p_1p_2p_3p_4=p_3p_4+p_1p_2(1-p_3p_4)$$
$$=p_3p_4+p_1p_2(1-p_3+p_3-p_3p_4)$$
$$=p_3p_4+p_1p_2(1-p_3)+p_1p_2p_3(1-p_4)$$
$$=p_3p_4+p_1p_2q_3+p_1p_2p_3q_4$$

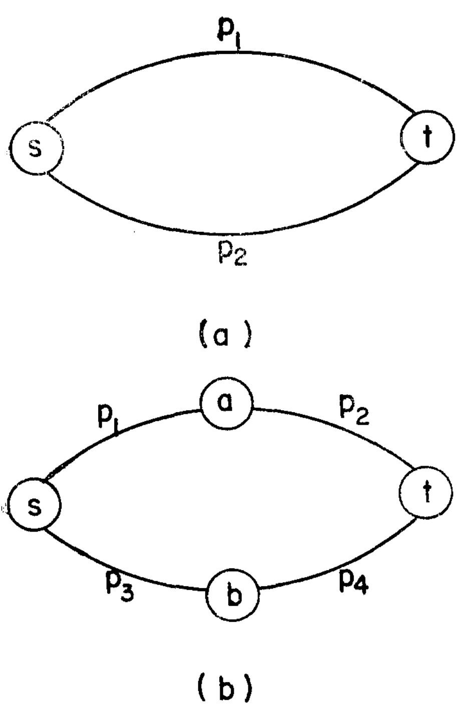

그림 2. 간단한 確率的 그래프例
Fig. 2. Examples of simple probabilistic graph

이와같은 演算은 더욱 많은 直列孤를 갖는 두 單純通路의 確率的그래프에 대해서도 기계적으로 확장할 수 있다. 가령 그림 (3)의 그래프에 있어서의 $P_{s,t}$는

$$P_{s,t}=p_1p_2p_3p_4+q_1p_5p_6p_7p_8p_9+p_1q_2p_5p_6p_7p_8p_9$$
$$+p_1p_2q_3p_5p_6p_7p_8p_9+p_1p_2p_3q_4p_5p_6p_7p_8p_9$$

또는

$$P_{s,t}=p_5p_6p_7p_8p_9+p_1p_2p_3p_4q_5+p_1p_2p_3p_4p_5q_6$$
$$+p_1p_2p_3p_4p_5p_6q_7+p_1p_2p_3p_4p_5p_6p_7q_8$$
$$+p_1p_2p_3p_4p_5p_6p_7p_8q_9$$

以上의 計算을 바탕으로 부울代數에 의한 並列演算을 定義하기로 한다. 우선 그림 2(a)의 그래프에 있어서 孤 1,2에 대한 부울變數 x_1, x_2를 취하고, 並列演算의 記號로서 ⫽을 채택할 때,

$$\{x_1\} /\!\!/ \{x_2\}=\{\bar{x}_1, x_2\}$$

와 같은 結果를 얻는 算法을 「x_1에 x_2를 並列演算한다」고 한다. 그리고 이 算法을 記號的으로 표시할 때는 다음과 같이 표시한다.

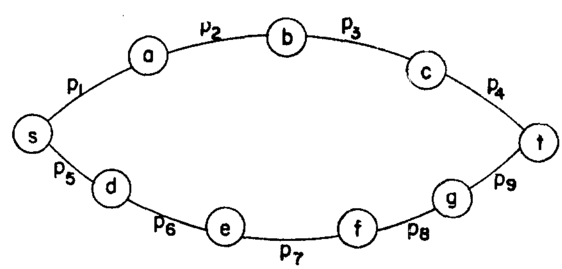

그림 3. 確率的 그래프例
Fig. 3. An example of probabilistic graph.

$$\{1-\} /\!\!/ \{-1\}=\{01\}$$

마찬가지로

$$\{-1\} /\!\!/ \{1-\}=\{10\}$$

따라서 그림 1(a)의 그래프에 있어서의 $P_{s,t}$는 부울代數에 의한 並列演算을 채택하여 표시할 때는

$$P_{s,t}=x_1+\{x_1\} /\!\!/ \{x_2\}$$

또는 $P_{s,t}=x_2+\{x_2\} /\!\!/ \{x_1\}$

와 같이 된다. 그림 2(b)의 그래프의 경우에는

$$P_{s,t}=x_1x_2+\{x_1x_2\} /\!\!/ \{x_3x_4\}$$

또는 $P_{s,t}=x_3x_4+\{x_3x_4\} /\!\!/ \{x_1x_2\}$

여기서 $\{x_1x_2\} /\!\!/ \{x_3x_4\}$ 및 $\{x_3x_4\} /\!\!/ \{x_1x_2\}$의 演算結果를 記號的으로 표시하면

$$\{11--\} /\!\!/ \{--11\} = \{0-11,\ 1011\}$$
$$\{--11\} /\!\!/ \{11--\} = \{110-,\ 1110\}$$

가 되는 것은 물론이다. 마찬가지로 그림 (3)의 그래프에 대해서는

$$P_{s,t} = x_1x_2x_3x_4 + \{x_1x_2x_3x_4\} /\!\!/ \{x_5x_6x_7x_8x_9\}$$

또는 $P_{s,t} = x_5x_6x_7x_8x_9 + \{x_5x_6x_7x_8x_9\} /\!\!/ \{x_1x_2x_3x_4\}$

로 표시되고 첫째번 式의 並列演算을 記號的으로 표시하면

$$\{1111-----\} /\!\!/ \{----11111\}$$
$$= \{0---11111,\ 10--11111,\ 110-11111,\ 111011111\}$$

가 된다.

3. 端子間信賴度計算에 대한 알고리즘

앞에서 설명한 부울代數에 의한 並列演算을 적용하면 一般的인 通信回路網의 端子間信賴度를 계산할 수 있는데 그림 1의 그래프를 例로 들어 $P_{s,t}$를 계산하여 본다. 이 그래프의 單純通路는 앞에서 말한 바와 같이 4개가 있으며 이들을 표 1의 左側과 같이 표시한다. 우선 單純通路 (1)에 單純通路 (2)를 並列演算하면

$$(1) /\!\!/ (2) = \{01--1,\ 11-01\}$$

을 얻으므로 이를 표 1의 右側에 並記한다. 다음에 單純通路 (1)에 單純通抗 (3)을 並列演算하면

$$(1) /\!\!/ (3) = \{1-101\}$$

을 얻는다. 이것을 표 1의 右側에 並記하고, 이것을 가지고 다시 單純通路 (2)에 並列演算한다. 이때 표 1

표 1

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
(1)	1	—	—	1	—	
(2)	—	1	—	—	1	{01——1, 11—01}
(3)	1	—	1	—	1	{1—101}→{10101}
(4)	—	1	1	1	—	{0111—}→{01110}

의 左側에 있는 原型에 직접 並列演算을 하지 않고 右側에 並記한 두 개의 誘導型에 並列演算한다. 여기서 첫째번것과는 並列演算이 성립하지 않는데 그 理由는 첫째자리가 서로 相反되기 때문이다. 다음에 두째번것에 並列演算하여 {10101}을 얻는데, 이것을 다시 표 1의 右側에 附記한다. 다음에 單純通路 (4)를 單純通路 (1), (2), (3)에 順次的으로 並列演算하는데

$$(1) /\!\!/ (4) = \{0111-\}$$

을 얻고, 또

$$(2) /\!\!/ 11(4) = \{01110\}$$

을 얻는데 그 要領은 위의 경우와 동일하다. 그리고 (3)⫽(4)는 成立하지 않으므로 결국

$$P_{s,t} = p_1p_4 + q_1p_2p_5 + p_1p_2q_4p_5 + p_1q_2p_3q_4p_5 + q_1p_2p_3p_4p_5$$

가 된다.

以上에서 說明한 並列演算을 바탕으로 通信回路網에 있어서의 端子間信賴度를 計算하는 節次를 要約하면 다음과 같은 알고리즘이 成立한다.

(1) 通信回路網을 確率的그래프로 模型化한다.

(2) 直·並列減縮法에 따라 그래프를 等價的으로 最大限 簡單化한다.

(3) 端點 s, t 사이의 모든 單純通路를 求한다.

(4) 單純通路를 直列孤數가 적은 것부터 순서대로 記號的表示를 사용하여 표를 만든다. (표 1참조)

(5) 이들 單純通路사이에 順次的으로 반복하여 並列演算을 적용한다. (이때 並列演算結果에 중복되서 나타나는 것이 있으면 그 중 變數가 많은 것을 폐기한다.)

(6) 위의 並列演算結果의 論理和를 취하여 $P_{s,t}$를 계산한다.

4. 數値計算例

앞의 알고리즘을 實例에 의한 數値計算을 通하여 확인하기로 한다. 그림 4[5]는 通信回路網을 確率的 그래프로 模型化한 것인데 아직 直·並列減縮法을 적용하기 前의 상태이다. 알고리즘의 順序에 따라

(2) 直·並列減縮法에 따라 等價的으로 最大限 簡單化하여 그림 5의 그래프를 얻는다.

(3) 端點 s, t 사이의 모든 單純通路를 求하면 다음과 같은 7개의 孤의 直列連結의 集合을 얻는다.

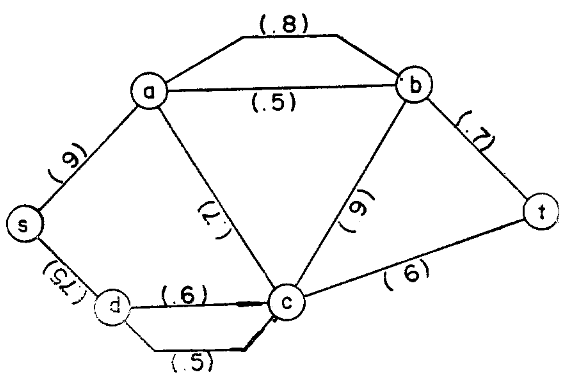

그림 4. 直·並列孤를 簡單化하기 前의 確率的그래프

Fig. 4. A probabilistic grath of a network before series-parallel reduction.

{2—6. 1—4—7, 1—3—6, 2—5—7, 1—3—5—7,
1—4—5—6, 2—3—4—7}

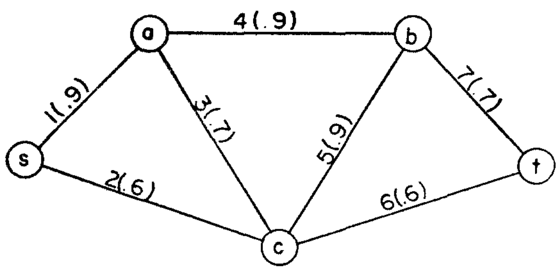

그림 5. 簡單化한 後의 確率的그래프
Fig. 5. The probabilistic graph of the network after its simplification.

(4) 孤數가 적은 것부터 記號的으로 나열하여 표 2의 左側을 얻는다.

(5) 이 7개의 單純通路사이에 順次的으로 並列演算을 적용하면 그 演算結果는 표 2의 右側에 並記한 바와 같다. 여기 괄호안의 數字는 並列演算을 한 對象單純通路의 番號를 표시한 것이다. 이 段階에서 주위할 것은 單純通路 (5)를 單純通路 (2)에 並列演算한 두結果중에서 {1110101}은 單純通路 (4)의 並列演算結果중의 하나인 {11—0101}에 包含되므로 이를 폐기한 것이다.

표 2.

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
(1)	—	1	—	—	—	1	—	
(2)	1	—	—	1	—	—	1	$\{10-1-\overset{(1)}{-}1,\ 11-1-01\}$
(3)	1	—	1	—	—	1	—	$\{101-\overset{(1)}{-}1-\} \to \{1010-1-,\ \overset{(2)}{1011-10}\}$
(4)	—	1	—	—	1	—	1	$\{-1-\overset{(1)}{-}101\} \to \{01--101,\ \overset{(2)}{11-0101}\}$
(5)	1	—	1	—	1	—	1	$\overset{(1)}{\left\{\begin{matrix}101-1-1\\111-101\end{matrix}\right\}} \to \overset{(2)}{\left\{\begin{matrix}10101-1\\1110101\end{matrix}\right\}} \to \overset{(3)}{\{1010101\}}$
(6)	1	—	—	1	1	1	—	$\overset{(1)}{\{10-111-\}} \to \overset{(2)}{\{10-1110\}} \to \overset{(3)}{\{1001110\}}$
(7)	—	1	1	1	—	—	1	$\overset{(1)}{\{-111-01\}} \to \overset{(2)}{\{0111-01\}} \to \overset{(3)}{\{0111001\}}$

(6) $$P_{s,t} = p_1 p_5 + p_1 q_2 p_4 p_7 + p_1 p_2 p_4 q_6 p_7 + p_1 q_2 p_3 q_4 p_6 + p_1 q_2 p_3 p_4 p_6 q_7 + q_1 p_2 p_5 q_6 p_7 + p_1 p_2 q_4 p_5 q_6 p_7 + p_1 q_2 p_3 q_4 p_5 q_6 p_7 + p_1 q_2 q_3 p_4 p_5 p_6 q_7 + q_1 p_2 p_3 p_4 q_5 q_6 p_7$$
$$= 0.36 + 0.2268 + 0.13608 + 0.01512 + 0.040824 + 0.015120 + 0.013608 + 0.0063504 + 0.0157464 + 0.0010584 = 0.837072$$

5. 結 論

本論文에서는 通信回路網의 端子間信賴度를 計算하는데 있어서 부울代數에 의한 並列演算을 定義하여 記號的으로 또 機械的으로 처리하는 方法을 提議하였는데 지금까지 발표된 方法들과 비교할 때 가장 効果的인 方法중의 하나라고 믿는 바이다. 本論文의 方法은 端點間單純通路를 바탕으로 처리하는 點에서는 L.Fratta 및 U.G. Montanari[4]의 方法과 類似하지만 이들의 方法보다 더욱 機械的으로 처리되는 利點이 있다. 또 本方法은 回路가 方向性이거나 非方向性이거나를 막론하고 다 저용됨은 물론이다.

다만 本論文에서 例로 든 回路보다 더 복잡하고 방대한 回路網에 대한 信賴度計算에 本論文의 알고리즘을 적용하여 電子計算機로 처리하는 問題에 대해서는 미처 確認하지 못하였으며, 이에 대해서는 다음 機會에 미루기로 한다.

參 考 文 獻

(1) P.A. Jensen, M. Bellmore, "An Algorithm t determine the reliability of complex system," IEEE Trans. on Reliability, vol. R-18, Nov 1969, pp.169-174

(2) K.B. Mistra, T.S.Rao, "Reliability analysis of redundant networks using flow graph," IEEE Traas. on Reliability, vol. R-19, Feb. 1970, pp. 19-24.

(3) E. Hansler, "A fast recussive algorithm ot calculate the reliability of communication networks," IEEE Trans, on Communication, vol.