大韓機械學會誌 第16卷 第3號 pp. 271～276, 1976

<論 文>

衝擊熱에 의한 溫度上昇

李　　　炳　　　昊*

(1976年 7月 7日接受)

Temperature Rise due to Impact

Byung Ho Lee

Abstract

A theory has been developed for impact heating as well as thermodynamics of impact. The result is very simple and convenient for engineering applications:

$$T=T_0\left(\frac{V_0}{V}\right)^{\gamma},$$

where T_o and T are the temperatures before and after the impact, V_o and V the volumes before and after the impact, and γ the Grüneisen constant, given in a table in this paper.

I. 緖　　論

金屬材料를 망치로 여러번 繼續해서 같은 곳을 두두리면, 더워지는 것을 우리는 日常生活에서 經驗하는 바이다. 그 溫度上昇은 衝擊變形量이 크지 않을 때에는, 그다지 큰것이 아니어서, 普通은 別로 問題가 되지 않을 때가 많다.

그러나 新型徹甲彈과 같이Mach 3.5 程度의 高速度로 날아서, 飛行途中에 받는 空力加熱[1]로 이미 그 尖頭部의 코끝이 1200°～1500°C로 加熱된 것이 다시 裝甲板에 부딪치면 그때의 猛烈한 衝擊은 彈子에 큰 塑性變形을 일으키어서 相當한 溫度上昇을 招來한다. 이리하여 徹甲彈의 경우에는 空力加熱로 말미암아 赤熱狀態로 된 것이, 다시 衝擊塑性加熱로 말미암아 그 尖頭部는 灼熱狀態로 된다. 萬一 徹甲彈의 尖頭部가 Zr과 같은 發火金屬으로 되어 있다면, 이 空力加熱 및 衝擊加熱로 말미암아 그 自然發火點 以上으로 加熱되기 때문에, 爆發的인 化學燃燒反應이 일어나게 됨으로, 그 破片은 能히 3000°C程度의 溫度로 되어서 飛散하게 되고, 따라서 燒夷의 効果를[2] 크게 한다.

同 論文에서는 지난번 航空宇宙學會에서 發表한 空力加熱에 이어서 塑性衝擊變形에 隨伴되는 衝擊熱의 크기를 算出할 수 있는 一般式을 導入하고, 그 應用의 實例를 提示코져 한다.

II. 固體의 狀態方程式

우리가 잘 알고 있는 氣體의 狀態方程式과 같은 狀態方程式이 固體에도 있다면, 그 式은 $f(P, V, T)=0$의 函數型으로 될 것임으로 衝擊力과 體積과 溫度사이의 一定한 關係에서 우리는 溫度를 求할 수 있을 것이다. 그러나 오늘날 여러 學者들의 努力에도 不拘하고, 原子構造와 結晶構造에 直結되는 滿足할만한 狀態方程式은 數萬 乃至 數十萬 氣壓範圍에서 求하지를 못한 實情이다.

그래서 여기서는, 熱力學的狀態에 對하여 金屬結晶의 熱에너지를 單純調和振子의 模型으로 取扱해서, 內部에너지 E[3]를 다음과 같이 쓴다.

$$E=\Phi+\frac{1}{2}\sum_{\alpha}h\nu_a+\sum_{\alpha}\frac{h\nu_a}{\exp\left(\frac{h\nu_\alpha}{KT-1}\right)},\quad(\alpha=1,2\cdots3N)\tag{1}$$

* 正會員, 韓國科學院

여기 ν_α는 normal mode의 振動數, h는 Planck 常數 K는 Boltzmann常數, T는 絶對溫度, Φ는 各 原子들이 結晶의 格子上의 平衡位置에 있을 때의 Potential에너어지이다. 이 式으로부터 壓力을 求하면

$$P=-\frac{\partial\Phi}{\partial V}+\frac{1}{V}\sum_\alpha\gamma_\alpha\left\{\frac{1}{2}h\nu_\alpha+\frac{h\nu\alpha}{\exp\left(\frac{h\nu_\alpha}{KT-1}\right)}\right\}\tag{2}$$

으로 된다. 여기 γ_α는

$$\gamma_\alpha=-d\ln\nu_\alpha/d\ln V\tag{3}$$

이다. 지금 γ_α를 各 mode에 對해서 同一하게 取扱하면 結局

$$P=-\frac{\partial\Phi}{\partial V}+\frac{\gamma}{V}E_{vib}\tag{4}$$

으로 된다. 여기 E_{vib}는 內部에너어지에의 振動에너어지의 寄與分이다. (4)를 Mie-Grüneisen의 狀態方程式[4]이라 한다.

再整理하면

$$P+\left\{\frac{\partial\Phi}{\partial V}-\frac{\gamma}{V}\Sigma\frac{1}{2}h\nu_\alpha\right\}=\frac{\gamma}{V}\sum_\alpha\frac{h\nu_\alpha}{\exp\left(\frac{h\nu_\alpha}{KT-1}\right)},$$

或은 $$P-P_k=\frac{\gamma}{V}E_{th}=\frac{\gamma}{V}(E-E_k)\tag{5}$$

여기 suffix k는 $0°K$때의 體積의 函數라는 것을 表示한다. 또 γ는 所謂 Grüneisen 常數인데 (5)로부터

$$\gamma=V\left(\frac{\partial P}{\partial E}\right)_v=V\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_v/C_v\tag{6}$$

으로 表示되는 重要한 量이다.

Ⅲ. 衝擊熱力學

一般的으로 衝擊은 아주 短時間內에 일어나기 때문에 斷熱過程으로서 取扱한다.

熱力學第一法則:

$$dQ=dE+pdV\tag{7}$$

에서 $E=E(T,V)$는 內部에너어지인데, 이것은 完全微分量이 될 수 있는 熱力學變數임으로

$$dE=\left(\frac{\partial E}{\partial V}\right)_T dV+\left(\frac{\partial E}{\partial T}\right)_V dT$$

따라서 不完全微分熱 dQ를 完全微分의 優秀한 熱들로 고처쓰면, 熱力學第一法則(7)은

$$ds=\frac{1}{T}\left(\frac{\partial E}{\partial T}\right)_V dT+\left[\frac{1}{T}\left(\frac{\partial E}{\partial V}\right)_T+p\right]dV\tag{8}$$

으로 된다. 여기서 $dQ=Tds$를 利用했다. (s는 entropy이다.)

(8)에서 ds는 完全微分量임으로 다음 關係가 成立된다. 即

$$\left(\frac{\partial}{\partial V}\right)_T\left[\frac{1}{T}\left(\frac{\partial E}{\partial T}\right)_V\right]=\left(\frac{\partial}{\partial T}\right)_V\left[\left(\frac{\partial E}{\partial V}\right)_t+p\right]$$

이 成立되어야 한다. 이 微分關係式에서

$$\left(\frac{\partial E}{\partial V}\right)_T+P=T\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V\tag{9}$$

을 얻는다. 따라서 (9)를 (8)에 代入하여

$$Tds=C_V dT+T\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V dV\tag{10}$$

을 얻을 수 있다.

그런데 앞서 말한바와 같이 衝擊은 至極히 짧은 時間內에 일어나기 때문에, 斷熱過程으로 取扱할 수 있음으로 (10)으로 表示되는 熱力學第一法則에서 衝擊時에는 左邊이 0임으로 따라서 右邊도 0으로 된다. 即

$$C_v dT+T\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V dV=0$$

或은

$$\frac{dT}{T}=-\frac{1}{C_v}\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V dV\tag{11}$$

로 된다. 이것에 Grüneisen常數 γ가 直接關聯한다.

Ⅳ. 衝擊熱

衝擊熱力學에서 얻은 (11)의 關係式에 (6)의 Grüneisen 常數 γ의 定義를 利用하면, 簡單히

$$\frac{dT}{T}=-\frac{\gamma}{V}dV$$

으로 된다.

다음에 이를 積分하면

$$T=T_0\exp\left(-\int_{V_0}^{V}\frac{\gamma}{V}dV\right)\tag{12}$$

으로 된다. 이 式이 衝擊熱을 다루는 一般式이다. 여기서 T_0와 T는 衝擊直前後의 絶對溫度이며, V_0와 V도 衝直前後의 體積의 값이다.

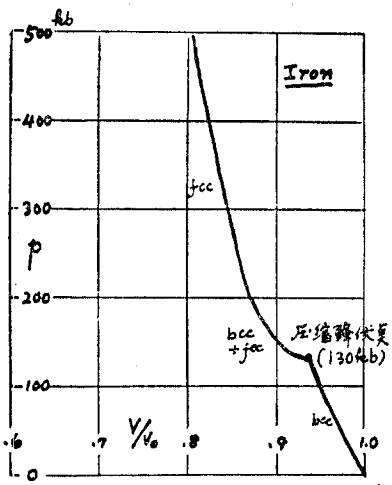
여기서 만일 γ를 適當한 平均値로 잡아서 常數로 取扱할 수 있다면 이 式은 다음과 같이 매우 簡單해진다.

$$T=T_0\left(\frac{V_0}{V}\right)^\gamma\tag{13}$$

이 式이 工學에서 손쉽게 衝擊塑性變形에 隨伴되는 溫度上昇을 計算할 수 있는 有用한 式으로 될 것이다. 이런 目的을 爲하여 다음에 各 金屬의 Grüneisen常數를 列擧해 둔다.

	Al	Mn	Fe	Co	Ni	Cu	Ag	Pt	Zr
$\gamma=$	2.17	2.42	1.6	1.87	1.88	1.96	2.40	2.54	0.771

또 이 衝擊塑性變形에 依한 溫度上昇式을 衝擊彈性



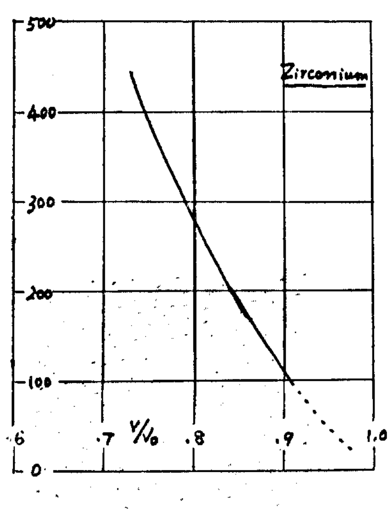
變形에 依한 溫度上昇式[7)]

$$T-T_0=T_0\frac{(C_l^2-4C^2t/3)}{c_p}\,\alpha\left(1-\frac{V}{V_0}\right) \qquad (14)$$

과 對照에 보면 兩者가 모두 體積變形量에 直結됨을 알 수 있다.

그러나 어떤 物質의 Grüneisen常數 γ의 體積依存關係를 알면, 衝擊熱을 溫度의 尺度로 求할수가 있다. 그런데 이 Grüneisen常數 γ는 定義式 (3)에서 格子振動數 ν의 體積依存關係를 알면 거기서 求할 수 있으나, 普通은 그것을 敷衍한 다음의 Slater Debye[5)]의 式

$$\gamma=-\frac{V}{2}\frac{(d^2P/dV^2)}{(dP/dV)}-\frac{2}{3} \qquad (13)$$



이나, 或은 Dugdale-Mac Donald[6)]의 式

$$\gamma=-\frac{V}{2}\left(\frac{d^2(PV^{2/3})/dV^2}{d(PV^{2/3})/dV}\right)-\frac{1}{3} \qquad (14)$$

으로써 求한다. 따라서 P-V曲線만 入手하면 算出할 수가 있다. P-V曲線은 固體의 高壓工學을 하는 사람들에 의해서 알려진 것이 數千氣壓에서 數十萬氣壓 範圍에 걸쳐 東西歐에 꽤 있다.

例를 들면,

普通 鐵말고는 다른 金屬들은 單一曲線으로 P-V曲線을 近似시킬수 있으나, 그림에서 보는 바와같이 우리와 가장 關係가 깊은 鐵은 單一曲線으로 代理시킬 수 없는 二重曲線으로 되어 있어서 壓縮降伏點에서 나누어 上下 두개의 曲線式으로 代置해야하는 煩雜性이 있다. 따라서 (13)의 利用이 實際的인 目的을 爲하여 衝擊으로 말미암은 體積變形度가 20% 以內에서는 10% 以內에 誤差範圍에서 使用될 수 있다는 것을 다음節에 提示한다.

V. 應用例

元來 同論文의 始作動機가 Zr尖頭部를 가진 徹甲彈의 경우이며 Mach 3.5 가량의 飛翔速度로 날라서 1秒後에 그 코끝이 約 1,400°C가량 豫熱된것이, 다시 裝甲板에 猛烈히 衝擊하여 塑性加熱로 그 코끝이 灼熱하여 爆發的 發火를 誘發하는데 이 後半 過程에 對한것을 實例로 들어서 解析하려다.

1. 衝擊加熱溫度上昇

Caliber 20에 使用되는 Zr 徹甲彈의 몸체는 重合金으로서 比重이 約 18가량되고, 그 코끝에 Zr이 붙어있어, 曲線半徑이 約 0.4mm의 뾰족 모양으로 되어있다.

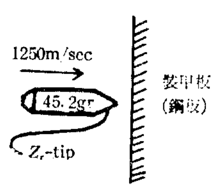
Zr의 Grüneisen常數 γ는 다음과 같은 $\mu\left(\equiv\frac{V_0}{V}-1\right)$의 三次式으로 近似하여

$\gamma=\gamma_0+A\mu+B\mu^2+C\mu^3$

體積變化率 μ로 나타낼때 Zr에 對하여는

$\gamma_0=0.771$

$A=-0.449$



$B=0.285$

$C=-0.102$

으로 된다.

$\mu=\frac{V_0}{V}-1$임으로 $dV/V=\frac{d\mu}{1+\mu}$, V_0는 $\mu=0$에 該當하고 V는 μ에 對應함으로

$$-\int_{V_0}^{V}\frac{\gamma}{V}dV=-\int_0^{\mu}(\gamma_0+A\mu+B\mu^2+C\mu^3)\frac{d\mu}{1+\mu}$$

$$=-\left(\begin{array}{l}(\gamma_0-A+B-C)\ ln\ (1+\mu)+\\+(A-B+C)\mu+\\+\frac{1}{2}(B-C)\mu^2+\frac{1}{2}C\mu^3\end{array}\right)$$

따라서 初期溫度, $T_0=1400+273=1673°K$ 임으로 上記式을 利用하여 計算하면 다음表와 같다.

μ	V_0/V	體積減少率	$\frac{T}{T_0}=\exp\left(-\int_{V_0}^{V}\frac{\gamma}{V}dV\right)$	$\frac{T}{T_0}=\left(\frac{V_0}{V}\right)^{\gamma}$
0.1	1.1	9%	1.078	1.080
0.2	1.2	17%	1.155	1.151
0.3	1.3	23%	1.226	1.223
0.4	1.4	28.5%	1.405	1.296

따라서 $\mu=0\sim0.3$까지는, 다시 말해서 體積壓縮率이 0~23%까지는 充分히 衝擊溫度의 上昇을

$$T=T_0\left(\frac{V_0}{V}\right)^{\gamma}$$

로 表示할 수 있다. 여기 γ의 값은 室溫의 正常값을 그대로 使用한다.

故로 衝擊直前의 溫度가 이미 空力加熱로 1400°C(=1673°K)로 되었든것은 衝擊直後의 溫度는 다음 表와 같다.

體積壓縮率$\left(\frac{V_0}{V}-1\right)$	$T-237°$
9%	1537°C
17%	1660°C
23%	1780°C
28.5%	2083°C

2. 衝擊力

衝擊力 P는 P-V曲線의 μ에 관한 三次式 表示 :

$$P=A\mu+B\mu^2+C\mu^3$$

에서 Zr의 경우에는

$A=934kb$

$B=720$ 〃

$C=0$ 〃

으로 됨으로 다음과 같이 나온다.

μ	$P(kb)$
0.1	94.6
0.2	215.0
0.3	345.0
0.4	488.8

여기 kb=Kilobar≒1,000氣壓의 單位이다.

補 遺

1. 傳導에 依한 熱分散 速度

原來 金屬은 熱傳導度가 커서 果然 衝擊熱力學을 다룰때 斷熱過程으로 假定해서 正當했든가 吟味해볼 必要가 있다.

지금 우리가 생각한 徹甲彈의 尖頭部의 衝擊熱은 主로 裝甲板表面에서 相當히 들어간 內部에서 熱傳導에 依한 熱分散이 急速度로 進行될 것임으로 차라리 半徑 a의 작은 球狀의 溫度 T_0의 불덩어리가 無限大의 金屬媒質속에 뛰어들었을때의 熱分散問題로 代置함이 本問題性의 解決을 簡單化하는 것으로 된다. 어차피 자리수만 따지려기 때문에 이때의 熱傳導 方程式은

$$\frac{\partial T}{\partial t}=\chi\triangle T, \qquad \left(\chi=\frac{k}{c_p\rho}\right)$$

이 方程式의 解는 다음 形式의 것이 可能하다.

$$T=T_n(\gamma)\exp(-\beta_n t)$$

이것을 위의 熱傳導方程式에 代入하면

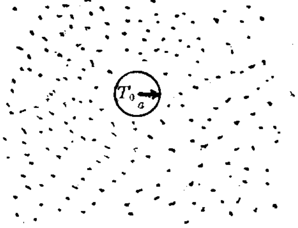
$$\triangle T_n(\gamma)=-\frac{\beta_n}{\chi}T_n(\gamma)$$

極座標의 Laplacian에서 對稱性을 고려하면, 上式은

$$\frac{1}{\gamma}\frac{d}{d\gamma}\left(\frac{d}{d\gamma}(\gamma T_n(\gamma))\right)=-\frac{\beta_n}{\beta}T_n(\gamma)$$

으로 된다. 여기서 다시 $f_n(\gamma)\equiv\gamma T(\gamma)$라고 놓으면 上式은

$$\frac{d^2f_n(\gamma)}{d\gamma^2}=-\frac{\beta_n}{\chi}f_n(\gamma)$$



따라서

$$f_n(\gamma)=\begin{cases}\sin\\ \cos\end{cases}\sqrt{\frac{\beta_n}{\chi}}\gamma$$

의 解를 얻는다.

그러므로 熱傳導 方程式을 滿足하는 解는

$$T=\exp(-\beta_n t)\frac{1}{\gamma}\begin{cases}\sin\\ \cos\end{cases}\sqrt{\frac{\beta_n}{\chi}}\gamma$$

의 形의 것이다.

여기서 우리의 境界條件을 차례차례 考慮해 보면, 먼저 $t=0$, $\gamma=0$에서 $T=T_0$ (有限)이어야 함으로 sin쪽만 成立하게 된다.

$$\left[\text{參考}:\lim_{\gamma\to 0}\frac{1}{\gamma}\sin\sqrt{\frac{\beta}{\chi}}\gamma=\sqrt{\frac{\beta_n}{\chi}}\right]$$

$$\text{故로}\quad T=\frac{\exp(-\beta_n t)}{\gamma}\cdot\sin\sqrt{\frac{\beta_n}{\chi}}\gamma$$

의 形으로 굳어진다. 이 式은 $\left.\begin{matrix}\gamma=\infty\\ t=\infty\end{matrix}\right\}:T=0$

이어야 하는 또 하나의 境界條件을 自動的으로 滿足한다. 最後의 境界條件으로서 $t=0$에 그 불덩어리가 뛰어들었을 時間에는 $\gamma=a_{+0}$에서 初期溫度는 $T=0$이었기 때문에

$$\sin\sqrt{\frac{\beta_n}{\chi}}a=0,$$

따라서 $\sqrt{\frac{\beta_n}{\chi}}=n\pi$, 即 $\beta_n=\frac{\pi^2 n^2}{a^2}\chi$,

$$(n=1,2,3\cdots\cdots)$$

이라야 한다. 故로 最終的 解는

$$T=T_0\sum_{n=1}^{\infty}\exp\left(-\frac{n^2\pi^2}{a^2}\chi t\right)\frac{\sin\frac{n\pi}{a}\gamma}{\gamma}$$

이다.

그러므로 熱의 分散時間(Thermal Relaxation Time) τ은 $n=1$ 일때의 것이 支配的이므로

$$\tau=\frac{a^2}{\pi^2\chi}$$

로 表示된다. 鋼鐵의 경우에는 $a=0.1$cm, $\chi=0.12$/sec 일때 $\tau=\sim 10^{-2}$ sec, 기껏해서 $\sim 10^{-2}$sec 程度로 되는데 이에 比해서 衝擊時間은 $\sim 10^{-5}$sec 程度이므로 充分히 斷熱過程으로 取扱해서 妥當하다.

2. 衝擊時間

Caliber 20에 使用하는 Zr徹甲彈의 몸體는 重合金(比重~18)으로, 45.2gr의 重量을 가진 半徑 0.04cm의 Zr의 彈性係數들을 가진 球가 裝甲平板에 彈性衝突을 Hertz의 理論으로 풀어서 얻은 衝突時間을 가지고 塑性衝突時間을 推定함에 있어서 그 자릿數로 삼으려 한다. 자릿數만 따질때에는 여기에 큰 無理가 없을 것이다.

두球의 彈性衝突에 對한 Hertz 理論에 依하면 그 衝突時間은

$$\tau=\frac{4\sqrt{\pi}\,\Gamma(2/5)}{5\Gamma(9/10)}\left(\frac{\mu^2}{k^2 v}\right)^{1/5}=2.94\left(\frac{\mu^2}{k^2 v}\right)^{1/5}$$

여기서 μ는 有効質量이며 $\mu=\frac{MM'}{M+M'}$, k는

$$k=\frac{4}{5D}\sqrt{\frac{RR'}{R+R'}},\quad D=\frac{3}{4}\left(\frac{1-\sigma^2}{E}+\frac{1-\sigma'^2}{E'}\right)$$

로 表示되는 量인데 球와 無限平板이 衝突하는 우리의 경우에는

$M'=\infty$, $R'=\infty$이므로

$$k=\frac{4}{5D}\sqrt{R},\quad \mu=M$$

로 된다. 여기서 D는 勿論 斷熱値를 使用해야 함으로

$$E_{ad}=\frac{E}{1-ET\gamma^2/9C_p}\quad\text{(Young's Modulus)}$$

$$\sigma_{ad}=\frac{\sigma+ET\gamma^2/9C_p}{1-ET\gamma^2/9C_p}\quad\text{(Poisson's ratio)}$$

을 代入해야 한다. 지금 7~1600°k로 잡아서 計算해보면

$$Zr\begin{cases}E_{ad}=0.955\times 10^{12}\ \text{dyne/cm}^2,\\ \sigma_{ad}=0.38\end{cases}$$

$$\text{鋼板}\begin{cases}E'_{ad}=2.1\times 10^{12}\ \text{dyne/cm}^2\\ \sigma'_{ad}=0.29\end{cases}$$

이므로 $R=0.04$cm, $M=45.2$gr 等을 利用하면

$$D=\frac{3}{4}\left(\frac{1-0.38^2}{0.955}+\frac{1-0.29^2}{2.1}\right)\frac{1}{10}{}^{12}$$

$$=1.042\times 10^{-12}\text{cm}^2/\text{dyne}$$

$$k=\frac{4}{5D}\sqrt{R}=\frac{4}{5(1.042\times 10^{-12})}\sqrt{0.04}$$

$$=0.153\times 10^{+12}\ \text{dyne cm}^{-\frac{3}{2}}$$

$$\mu=45.2\text{gr}$$

$$\therefore\ \tau=2.94\left[\frac{45.2^2}{(0.153\times 10^{12})^2\ 1.25\times 10^5}\right]^{\frac{1}{5}}$$

$$=(0.07\times 10^{-26})^{\frac{1}{5}}$$

$$=0.264\times 10^{-5}\ \text{sec}$$

따라서 塑性衝擊時間을 10^{-3}sec로 잡아서 자릿數는 別 無理가 없을 것이다.

그러므로 우리問題에서 衝擊熱을 計算함에 있어서 前者의 熱分散時間 10^{-2}sec에 比하여 훨씬 짧으므로 充分히 그 衝擊過程을 斷熱的으로 假定했던것은 正當했다.

文 獻

1. Byung Ho Lee, "Aerodynamic Heating of Projectiles in Supersonic Flight,", J. KSASS 4 (1976)
2. Teledyne Wah Chang Albany, P. O. Box 460, Albany, Oregon 97321
3. J. J. Gilvarry, Phy. Rev. 102, 331 (1956)
4. E. Grüneisen, Handbuch der Physik 10, 22 (1926)
5. J. C. Slater, "Introduction to Chemical Physics" chap. 13. McGraw-Hill, New York (1939)
6. Phy, Rev. 89, 832 (1953)
7. Landau & Lifshitz: "Thecry of Elasticity". Pergamon Press.