決定的 및 確率的模型에 依한 意思決定技法(Ⅰ)

朴　贊　謨*

1. 序　言

어떠한 問題에 直面했을 때 우리는 그것을 解決하기 爲하여 意思決定을 하게 된다. 이때 個人이나 몇몇 專門家에 依해 直觀的 또는 經驗的으로 意思決定을 할 수도 있겠으나 問題와 關聯된 시스템이 複雜하고 巨大하며 前例가 많지 않은 境遇에는 많은 施行錯誤를 犯하기 쉽고 따라서 자꾸자꾸 變更하게 되며 때에 따라서는 돌이킬 수 없는 立場에 處하게 된다. 더구나 한 問題를 解決함에 있어 몇가지의 代案(alternatives)이 있다하면 그中 最適의 것을 選擇한다는 것은 매우 힘든 것이며 그 選擇이 옳은 것이었는지는 끝내 모르는 수도 있게 된다. 마찬가지로 어떠한 意思決定이 좋았는지 나빴는지는 그 結果를 보아서 비로소 알게 되는 것으로서 그것을 깨달았을 때는 이미 늦은 것이 되고 만다. 그러므로 過去부터 어떠한 意思決定에 到達하는 과정이나 여러개 대안중 擇一하는 方法에 관한 많은 硏究가 되어왔으며 이곳서 論하려는 기법에 의한 意思決定도 그의 하나인 것이다.

2. OR/SA技法에 依한 意思決定

意思決定에 到達하는 過程을 좀더 科學的이고 合理的으로 하기 위하여 體係分析學的 方法이 많이 活用된다. (그림-1)

그림-1　**OR/SA** 技法에 依한 意思決定과정

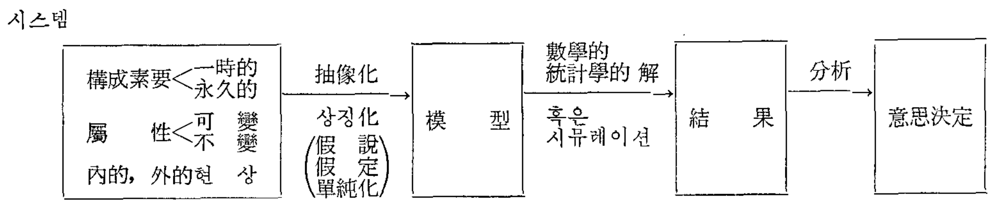


그림-1에서 보는 바와 같이 意思決定과정에 있어 시스템을 나타내는 模型을 設定하고 그 模型으로부터 解答을 얻으려는 技法으로서 그 단계를 나열하면

1) 問題點을 發見 그것을 解決하여 얻으려는 뚜렷한 目的 혹은 目標를 세우고
2) 시스템內部 또는 外部에서 얻을 수 있는 資料들을 수집分析하여 諸般 制限條件(constraints)을 찾은 후
3) 이러한 條件下에서 問題解決을 爲해 適用할 수 있는 模型을 設定하여
4) 이들 模型으로 부터 어떤 定量的 結果를 얻으면
5) 그 結果를 면밀히 分析하고 또는 여러개의 模型이나 解答이 있을때는 그 中 좋은 解答을 주는 것들을 選擇하여 意思決定者에게 提供하면
6) 意思決定者는 이들 定量的 結果와 其他 社會的, 政治的, 軍事的 여러가지 側面을

考慮하여 意思決定을 하게 된다.

일단 意思決定이 되어 施行되면 처음에 세

* 韓國科學院

웠던 目的이나 目標 達成에 얼마나 接近하는가를 恒常 관찰하여 豫測했던 대로 가지 않을 때는 그 原因을 규명하여 模型을 고친다든가 必要한 資料를 더 수집하여 처음부터 다시 始作하게 된다. 問題解決에 있어 模型을 利用하면 經費切減, 時間節約, 危險性排除, 變數의 容易한 變更, 시스템 各要素間의 關聯性理解促進等 여러가지 長點이 있는 反面, 問題를 解決하려는 努力보다 模型設定에 더 많은 努力과 精力을 소모하기 쉽고, 일단 模型이 開發되면 그것의 잘못을 찾으려는 努力보다는 問題를 그 模型에 맞추려고 하는 努力이 많게되며 模型에 包含되어야 할 重要한 要素를 누락시키는等 問題點도 있다. 또한 콤퓨터를 使用하여 模型의 解答을 얻는다할 때 콤퓨터를 効率的으로 活用하지 않으면 그 만큼 損害를 보게 되는데, 많은 境遇 이에 대한 注意가 不足하다. 世界第二次大戰中과 그後에 急進的으로 發達된 電子計算機(Digital Electronic Computer)는 意思決定分野에도 커다란 革新을 가지고 왔으니 過去 手作業으로는 到底히 상상도 못했던 많은 量의 資料를 순식간에 處理하여 주며 模型에서 解答을 얻는데도 GPSS, SIMSCRIPT, DYNAMO 等 特殊言語의 開發이라든가 LP Package, PERT/CPM Package 等 여러가지 模型의 Package를 이미 開發하여 놓음으로서 使用者가 매우 便利하게 되었다. 또한 여러 개의 端末裝置를 連結하고 있는 On-line시스템을 利用하면 發生되는 資料를 그때그때 資料銀行(Data Bank)에 저장할 수 있고 그들을 必要에 따라 검색 색출하여 意思決定을 Real-time으로 할 수 있어 適應化(adaptive)經營을 수행할 수 있는 것이다. 特히 콤퓨터 시뮤레이션 技法의 導入은 過去에는 다루기 힘들었던 複雜한 問題까지도 取扱할 수 있게 하였으며 模型設定에 있어 많은 假定과 單純化를 하지 않더라도 되게 만들었다. 그러나 一般的으로 콤퓨터 시뮤레이션은 여러차례의 run을 해야 하는등 時間을 要하기 때문에 問題의 性格上 이미 認定받은 定型的模型이 適用可能하면 그것을 使用하는 것이 좋다. OR/SA 技法에 使用되는 模型은 여러가지로 分類할 수 있겠으나 여기서는 決定的模型과 確率的模型으로 나누어 많이 使用하는 것들에 對하여 생각해 보기로 한다.

3. 決定的模型

決定的模型에 있어서는 시스템構成要素間의 關係가 뚜렷하며 入力資料도 一般的으로 常數로 주어진다. 勿論 PERT의 예측시간같이 어느 程度의 不確實性이 내포되고 있는 것도 있으나 模型全體로 볼 때 決定的要素가 훨씬 優勢한 것이다.

가) 線型計劃模型(Linear Programming Models)

近代에 使用하는 LP模型은 1940年代 初부터 開發되었으나 그의 活發한 應用은 1947年 George Danzig가 Simplex技法을 導入하면서부터라 하겠으며 그후 1952年에는 美標準局(National Bureau of Standards)의 SEAC(Standards Eastern Automatic Computer)컴퓨터를 使用, 처음으로 컴퓨터解를 얻게 되었다. 지금은 IBM, UNIVAC CDC等 거의 모든 컴퓨터에 LP Package가 있어 使用者의 便宜를 도모하고 있다. 이미 開發된 Package를 使用할 때는 LP理論을 몰라도 된다 하겠으나 問題分析, 結果分析, 効率的인 Package의 活用等을 爲해서는 LP理論의 槪要를 아는것이 必要하다. 이곳서는 General Allocation 模型에 對하여 于先 論하기로 한다. 이들 General Allocation LP 模型의 活用例는

1) 生産工場에 있어 product mix의 決定.
2) 용광로의 原料組合 및 操業條件決定
3) 企業體의 광고, 선전 media 결정
4) inventory scheduling
5) 人力管理計劃

等 大端히 많다.

LP模型을 活用할 수 있는 問題는 다음과 같은 형태 또는 그와 비슷한 형태로 주어진다. 即 制限된 原料나 時間등 資源이 있고 이들을 使用하여 어떠한 作業(製品生産等)을 할 때 이

들 資源을 어떻게 分配하는 것이 가장 많은 利益을 낼 수 있는가 하는 것이다. 표-1에 그 一般的인 형태를 표시하였다.

Simplex Method를 써서 이러한 LP模型을 푸는 데는 다음과 같은 Tableau를 使用하는 것이 便利하다.

1) Maximization 問題

slack variables S_1, S_2, $\cdots$ $S_m \geqq 0$를 첨가한다.

이들의 contribution은 모두 0이다.

진행과정은 표-2와 같은 initial tableau을 만들고 basis의 交換을 해가면서 하는 것이다.

표-1 LP模型의 一般的 형태

Maximize $f(\vec{x})=(\vec{c}\cdot\vec{x})=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j$

subject to $A_{m\times n}\vec{x}\leqq\vec{b}$, $\vec{x}\geqq 0$

혹은

Minimize $g(\vec{x})=(\vec{c}\cdot\vec{x})$

subject to $A_{m\times n}\vec{x}\geqq\vec{b}$, $\vec{x}\geqq 0$

여기서 $\vec{c}, \vec{x}, \vec{b}$ 및 A는 다음과 같다.

Resource 또는 Product	Jobs to be done 또는 Ingredients $(\vec{x})$	Capacity 또는 Requirement
	X_1 $X_2 \cdots\cdots X_j \cdots\cdots X_n$	
R_1	a_{11} $a_{12}\cdots\cdots a_{1j}\cdots\cdots a_{1n}$	b_1
R_2	a_{21} $a_{22}\cdots\cdots a_{2j}\cdots\cdots a_{2n}$	b_2
$\vdots$	$\vdots$ $(A_{m\times n})$ $\vdots$	$\vdots$ $(\vec{b})$
R_i	a_{i1} $a_{i2}\cdots\cdots a_{ij}\cdots\cdots a_{in}$	b_i
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
R_m	a_{m1} $a_{m2}\cdots\cdots a_{mj}\cdots\cdots a_{mn}$	b_m
profit/unit 또는 cost/unit	c_1 $c_2\cdots\cdots c_j\cdots\cdots c_n$ $(\vec{c})$	

a_{ij}=Amount of R_i per unit of X_j

표-2 Initial Tableau

$\vec{C}_{\text{basis}}$	$\vec{X}_{\text{basis}}$	$\vec{c}$: C_1 C_2 C_3 $\cdots\cdots C_n$ 0 0 $\cdots\cdots$ 0 $\vec{X}$: X_1 X_2 X_3 $\cdots\cdots X_n$ S_1 $S_2\cdots\cdots S_m$	$\vec{b}$	θ
0	S_1	a_{11} a_{12} a_{13} $\cdots\cdots a_{1n}$ 1 0 $\cdots\cdots$ 0	b_1	
0	S_2	a_{21} a_{22} a_{23} $\cdots\cdots a_{2n}$ 0 1 $\cdots\cdots$ 0	b_2	
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	
0	S_m	a_{m1} a_{m2} a_{m3} $\cdots\cdots a_{mn}$ 0 0 $\cdots\cdots$ 1	b_m	
	Z	0 0 0 $\cdots\cdots$ 0 0 0 $\cdots\cdots$ 0		
	C_j-Z_j	C_1 C_2 C_3 $\cdots\cdots C_n$ 0 0 $\cdots\cdots$ 0		

여기서 $Z=(\vec{C}_{\text{basis}}\cdot\vec{X}_{\text{basis}})$

$Z_j=\sum_{i=1}^{m}(C_{\text{basis}})_i\cdot a_{ij}$

θ는 Characteristics quotient로서 Pivot column이 결정되면 (例로서 k-th column이라 하면) b_i값을 a_{ik}값($a_{ik}>0$ 경우만)으로 나눈 것이다.

C_j-Z_j가 모두 $\leqq 0$이면 Pivot column이 없고 $c_j-Z_j>0$가 있으면 그中 가장 큰 column이 Pivot column이며 Pivot row는 θ가 가장 작은 row가 된다.

일단 Pivot column과 Pivot row가 결정되어 Pivot element가 選定되면 basis를 交換하고 따라서 a_{ij}와 b_i에 Rectangular rule을 適用하여 새로운 tableau를 얻는다.

Rectangular rule은 P가 Pivot이라 할 때 다음과 같이 적용하는 것이다.

$$\begin{array}{ccc} A \cdots\cdots (P) & & \\ \vdots \qquad\quad \vdots & \xrightarrow{\text{Rectangular rule}} & \\ B \cdots\cdots C & & \end{array} \qquad \begin{array}{c} \frac{A}{P} \cdots\cdots\cdots (1) \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \\ B-\frac{A\cdot C}{P} \cdots\cdots O \end{array}$$

이러한 식으로 새로운 Tableau를 만들어가되 C_j-Z_j가 모든 Column에 대하여 $\leqq 0$이 되면 더 以上 向上할 수 없고 解答은 얻은 것이 된다. 해답은 마지막 $\vec{X}_{basis}$와 $\vec{b}$로 주어지며 Total contribution은 마지막 Z값이 된다.

2) Minimization 問題

Minimization 問題에서는 Slack variables S_1, S_2,, … $S_m \geqq 0$와 Artificial variables A_1, A_2, … $A_m \geqq 0$를 첨가한다. 여기서 Slack variable의 Contribution은 O, Artificial Variable의 Contribution은 大端히 큰 陽數로 생각한다. 과정은 Maximization과 비슷하되 $C_j-Z_j<0$가 있으면 向上할 수 있는 것으로 더 진행하되 Pivot Column은 C_j-Z_j가 가장 작은 Column이 된다. Basis를 交換하여 새로운 Tableau를 만들고 계속하되 C_j-Z_j가 모든 Column에 대하여 $\geqq 0$이면 停止한다. 이때 해답은 마지막 $\vec{X}_{basis}$와 $\vec{b}$로 주어지며 Total contribution은 마지막 Z값이 된다.

3) 簡單한 活用例

한 會社에서 4가지의 商品 A, B, C, D를 製造하며 각각 商品 한個를 만드는 데 드는 時間과 한개에서 얻는 利益 및 각 Department의 總 可用時間은 표-3과 같다.

會社의 方針에 따라 이익이 작은 商品이라도 全 可用時間의 최소 5%에 해당하는 時間만큼은 그 商品을 製造하는 데 할애하기로 하였다. 이러한 條件下에서 LP를 使用치 않고 主觀的인 意思決定을 시킨 결과 표-4와 같이 이익이 제일 큰 것에 가장 많은 시간을, 이익이 가장 작은 것에 最少의 時間을 배당하기로 했으며 그로부터 나온 이익은 1,482,900원이 되었다.

표-3 商品 1개 製造에 드는 時間 및 利益金

부 서	商品 A	B	C	品 D	總可用時間／週
Dept. 1	.3hrs.	.3	.3	.2	250hrs.
Dept. 2	.7	.6	.7	.8	1000
Dept. 3	.35	.3	.3	.2	250
Dept. 4	.2	.25	.25	.22	250
Profit/unit	₩2000	1875	1800	1500	

표-4 主觀的 解

商 品	時間할애	製品個數	利 益 金
		個	원
A	60%	429	858,000
B	25%	208	390,000
C	10%	83	149,400
D	5%	57	85,500
			計 1,482,900

이 問題를 LP技法을 利用하여 풀려면 다음과 같은 절차를 밟게 된다. 먼저 각 商品마다 5%의 時間을 할애하여 만든다 할 때 各各 製造해야 할 個數는 A가 36個, B가 42個, C가 42個, 그리고 D가 57個가 된다. 이들을 만드는 데 드는 時間을 各 Dept.의 可用時間에서 빼면 Dept. 1이 202.6時間, Dept. 2가 874.6時間, Dept. 3가 200.8時間, 그리고 Dept. 4가 209.3時間이 되며 이로부터 다음과 같은 LP 模型을 얻는다.

$$\text{Maximize } Z=2000A+1875B+1800C+1500D +0S_1+0S_2+0S_3+0S_4$$

Subject to

$$\begin{aligned} .3A+.3B+.3C+.2D+S_1 &= 202.6 \\ .7A+.6B+.7C+.8D \quad +S_2 &= 874.6 \\ .35A+.3B+.3C+.2D \quad +S_3 &= 200.8 \\ .2A+.25B+.25C+.22D \quad +S_4 &= 209.3 \end{aligned}$$

이것을 Simplex 技法을 써서 풀면

A=70, B=0, C=0, D=883의 解를 얻으면 여기다 먼저 求한 最少個數를 더해 總利益을 計算하면 표-5와 같다.

표-5 LP技法에 의한 解

商　品	製品個數	利　益　金
A	106個	212,000원
B	42	78,750
C	42	75,600
D	940	1,410,000
		計　1,776,350

표-4와 표-5를 比較할 때 主觀的 解에 比해 LP-技法이 每週 약 30萬원의 利得을 주는 것이 된다. 特히 一般常識으로는 個當利益이 가장 작기 때문에 商品 D는 조금만 生產하는 것이 좋을 것 같은데 주어진 與件 特히 各 Dept.의 總可用時間을 고려할 때 商品 D를 가장 많이 生產하는 것이 가장 좋다는 것은 LP技法의 타당성을 증명하는 것이 되겠다.

나) 輸送問題(Transportation Problem) 模型

輸送問題는 線型計劃의 特殊境週로 생각할 수 있으며 一般的으로 표-6와 같은 形態로 주어진다.

표-6 輸送問題의 一般형태

Source	Destinaton D_1 D_2 ………D_j ………D_n	Capacity
S_1	C_{11} C_{12} ………C_{ij} ………C_{1n}	b_1
S_2	C_{21} C_{22} ………C_{2j} ………C_{2n}	b_2
⋮	⋮	⋮
S_i	C_{i1} C_{i2} ………C_{ij} ………C_{in}	b_i
⋮	⋮ …	⋮
S_m	C_{m1} C_{m2}………C_{mj}………C_{mn}	b_m
Require-ment	a_1 a_2 ………a_j ………a_n	

여기서 C_{ij}는 한개를 S_i에서 D_j로 수송하는 데 드는비용

지금 X_{ij}를 S_i에서 D_j로 수송할 갯수라 하면

目的函數는 Minimize $f(x)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}C_{ij}\cdot X_{ij}$

制限조건은 $\sum_{j=1}^{n}X_{ij}\leqq b_j$

$\sum_{i=1}^{m}X_{ij}\geqq a_j$

이와같은 TP問題는 Simplex技法으로도 풀 수 있으나 그렇게 되면 變數의 數가 너무 많아지기 때문에 Vogel's Approximation Method(VAM)이나 North-West Corner Method로 初期解(initial solution)를 求한 후 Stepping-Stone Method나 Modified Distribution Method(MODI)를 반복하여 더 以上 解가 向上될 수 없을 때까지 進行한다. 이곳서는 MODI方法만 簡單히 論한다. Initial Solution에서 Non-zero element 수가 m+n−1보다 많거나 적으면 다시 조정하거나 ϵ을 첨가해서 m+n−1個의 Non-zero element를 만든다. 各 column에 $k_1, k_2, \cdots, k_n$이라는 Index와 各 row에 $\rho_1, \rho_2, \cdots, \rho_m$이라는 Index를 주고 Non-zero element를 使用하여 $\rho_i+k_j+C_{ij}$(non-zero)$=0$가 되도록 ρ와 k의 값을 정한다. (一般的으로 $\rho_1=0$으로 놓고 풀기시작). 다음 Zero element의 Cost effect를 $C_{ij}=\rho_i+k_j+C_{ij}$(zero element)로 풀어 $C_{ij}<0$가 있으면 Total cost를 줄일 수 있는 것이므로 그중 C_{ij}가 가장 작은 Zero cell에다 옮길 수 있는 最大量을 옮겨 다시 MODI方法을 反復한다. 모든 Zero cell에 對해 $C_{ij}\geqq 0$이면 정지하고 그때의 Total cost와 Non-zero element가 最適解가 된다.

輸送問題에도 Minimization(例, total cost)과 Maximization(例, 各飛行場에서 여러 폭격지까지 나르는 폭탄量을 最大로 하는 경우등) 문제등이 있으나 이곳서는 Minimization의 活用例를 하나 들겠다.

한 會社산하에 같은 商品製造工場이 세군데(M1, M2, M3)있으며, 이들 商品을 販賣하기 爲해 보내야할 販賣所가 또한 세군데(W1, W2, W3)에 있다. 各製造工場에서 各販賣所까지 運送하는 데 드는 費用과 生產能力 및 要求量은 表-7과 같다.

표-7 個當 運送價格, 生產能力 및 要求量

工　場	販賣所 W_1	W_2	W_3	生產能力 (月當)
M_1	105원	30	15	3000
M_2	75	20	30	8000
M_3	95	35	40	10000
要求量	5000	7000	9000	

North-West Corner方法으로 얻은 初期解와 MODI方法에 의한 k 및 ρ와 C_{ij}의 값은 표-8에 표시하였다.

표-8 初期解 및 解 向上을 위한 k 및 ρ의 計算値

	$k_1=-105$ W_1	$k_2=-50$ W_2	$k_3=-55$ W_3	生 產 能 力
$\rho_1=0$ M_1	3000	$(C_{12}=-20)$	$(C_{13}=-40)$	3000
$\rho_2=30$ M_2	2000	6000		8000
$\rho_3=15$ M_3	$(C_{31}=5)$	1000	9000	10000
要 求 量	5000	7000	9000	
Total Cost=980,000원				

표-8에서 $C_{13}=-40$이 제일 적으므로 그리로 3000개를 옮기고 다시 반복하면 最後의 解로 표-9를 얻게 된다.

표-9 最 終 解

	W_1	W_2	W_3	
M_1			3000	total cost
M_2	1000	7000		=800,000원
M_3	4000		6000	

Transportation 問題에서 特히 a와 b가 모두 1로서 그이상 쪼개지를 못할때 즉 한 source에서 한 destination으로만 갈 수 있고 한개 이상의 source에서 같은 destination으로 가지 못할 경우 Assignment Problem이 되며 이것도 TP模型으로 풀 수 있으므로 이 곳에서는 省略한다.

다) 게임 및 戰略模型

하나以上의 相互利害得失이 있는 相對가 競爭을 할 때 게임이라 하며 어떠한 戰略을 얼마나 자주 取하느냐에 따라 損害를 最小로 한다든가 利益을 最大로 할 수 있다. 이곳서는 Two-person One-move Zero-Sum게임에 對해서만 考慮하기로 한다.

지금 X가 取할 수 있는 戰略을 x_1, x_2, $\cdots x_m$이라하고 Y가 取할 수 있는 戰略을 y_1, y_2, $\cdots y_n$이라 하면 X와 Y는 서로 각각이 취할수 있는 戰略을 適當한 比率로 取함으로서 損失을 最小로 할 수 있다. 一般的으로 게임模型을 使用할 수 있는 問題는 표-10과 같은 Pay-off 行列로 주어 진다.

표-10 게임模型

		Y: y_1	y_2	$\cdots y_j$	$\cdots y_n$	
X	x_1	c_{11}	$c_{12}\cdots$	c_j	$\cdots c_{1n}$	if $c_{ij}>0$ gain by X
	x_2	c_{21}	$c_{22}\cdots$	c_{2j}	$\cdots c_{2n}$	if $c_{ij}<0$ loss by X
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	
	x_i	c_{i1}	$c_{i2}\cdots$	c_{ij}	$\cdots c_{in}$	
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	
	x_m	c_{m1}	$c_{m2}\cdots$	c_{mj}	$\cdots c_{mn}$	

X에 대하여 $x_1, x_2, \cdots x_m$을 取할 比率을 各各 p_1, p_2, $\cdots$, p_m $(\sum_{i=1}^{m} p_i=1)$이라 하면

目的函數는 Maximize V (game value)

制限條件은 $\mathbf{A}_{m\times n}\cdot\vec{p}\geqq\vec{V}$ 여기서 $\vec{V}=(V, V, \cdots V)$

$\vec{p}\geqq 0$

m과 n이 같을 때는 連立方程式으로도 풀 수 있으나 다를 때는 다음과 같이 變形하여 LP模型으로 고쳐 풀면된다. 즉 目的函數와 制限條件을 모두 V로 나누면

새 目的函數 Minimize $\frac{1}{V}$

새 制限條件 $\mathbf{A}_{m\cdot n}\cdot\vec{q}\geqq 1$

여기서 $\vec{q}$는 $\vec{p}$의 element를 V로 나누어 생긴 vector이다.

이렇게 얻은 V는 Game Value로서 X에게는 最大値가 되는 것이다.

活用例로 다음과 같이 2個의 注油所가 서로 競爭을 한다 할 때 X나 Y 注油所는 單價引下, 膳物증정, 廣告等 方法에 적당한 예산을 들여 손님을 유도하려 한다. 萬一 Pay-off matrix가 표-11과 같이 주어졌다할 때 X와 Y 注油所는 各各 그 표밑에 주어진 비율로 예산을 배정하는 것이 最適이 되는 것이다.

표-11 게임模型 活用例

(單位：萬원)

		Y 注油所 y_1	y_2	y_3
X 注油所	x_1	4	1	−3
	x_2	3	1	6
	x_3	−3	4	−2

Simplex 技法에 依한 解

X의 각 戰略比率	x_1	x_2	x_3
	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$
Y의 각 戰略比率	y_1	y_2	y_3
	$\frac{27}{92}$	$\frac{62}{92}$	$\frac{3}{92}$

Game Value $V=17,500$원

라) Network 模型

Network 模型의 代表的인 것은 PERT(Program Evaluation and Review Technique)와 CPM(Critical Path Method)이다. 또한 短期業務의 日程計劃等에는 Job Shop Scheduling 模型이 使用된다. 이들 模型들은 서로 類似하므로 이곳서는 PERT에 關하여만 論하기로 한다. PERT는 1958년 미해군의 Special Project Office(SPO)에 의해 처음 개발되었으며 그 목적은 3000여개의 용역업체와 다른 기관이 개입되어 진행되던 Polaris함대 유도탄계획을 효과적으로 수행함에 있었다. PERT의 개발 및 活用으로 처음 계획보다 2년이나 앞당겨 완성하게되자 그후 미공군의 Minutesman 및 B-70 Project, 미육군의 Nike-Zeus, Pershing과 Hawk project 등에도 活用하게 되었다.

PERT의 活用分野는 大端히 많아 다 열거하기는 어려우나 대략 다음과 같은 것을 들 수 있다.

1) 연구개발(Research and Development)
2) 토목건설 특히 큰 건물의 건축
3) 토지 및 자원개발
4) 新武器의 開發
5) 새로운 機械의 設計, 開發 및 檢討
6) 初期製品 製造
7) 工場建立
8) 船舶建造
9) 經營業體나 政府의 行政機能
10) 콤퓨터 설치, 확장 및 변경
11) 시장성 조사, 새로운 제품의 開發 및 市販
12) 새로운 시스템의 Master Plan 作成 등

이러한 分野에 PERT를 活用하면 다음과 같은 利點이 있다.

1) 어떤 課題를 企劃(planning)하고 日程計劃(scheduling)을 수립하는 데 도움을 준다
2) 세워진 日程計劃의 타당성을 檢討하고 修正해야할 곳을 미리 發見할 수 있게 도와준다.
3) 人員, 物資, 機器, 時間等 資源(Resource)의 配定에 있어 여러가지 다른 政策의 効果를 豫測할 수 있게 하여 最適條件을 찾을 수 있게 도와 준다.
4) 모든 作業의 뚜렷한 連關관계를 일목요연하게 보여준다.
5) 課題遂行途中 수시로 必要에 따라 報告書를 얻을 수 있고 現在 進行狀態와 比較檢討하여 問題點等을 미리 發見하여 적절한 行動을 取할 수 있게 도와준다.
6) 모든 作業時間을 統計的으로 分析하여 一定期間에 마칠 수 있는 確率을 提供하여 준다.
7) 主工程線(Critical Path)에 關한 情報를 줌으로서 여유있는 作業과 時間여유가 없는 作業을 區別할 수 있게 하여 준다.
8) 한 課題를 一定期間에 마치기 爲하여 Crash Planning을 할 때 어떤 作業을 하는 것이 經濟的으로 가장 좋은지 찾아낼 수 있게 한다.

一般的으로 한 課題의 관리체계는 그림-2와 같다.

여기서 企劃, 日程計劃等을 設定하여 PERT Network를 形成하게 된다. Net-work의 形成단계는

1) Project를 몇 개의 Work Package로 區分하

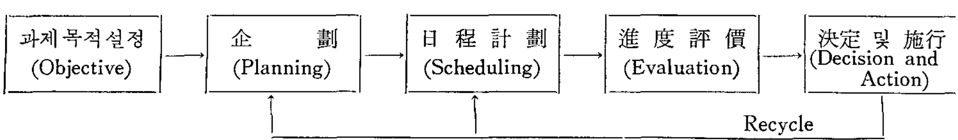


그림-2 한 課題의 管理體制

고 매 Work Package에 포함된 작업(activity)을 찾아내어 그들 activity의 始作 및 終結을 나타내는 里程表(milestone 혹은 event)를 결정한다.

2) 1)에서 선정한 각 作業들을 수행하여야 할 順序대로 화살표로 나타낸다. (그림-3)

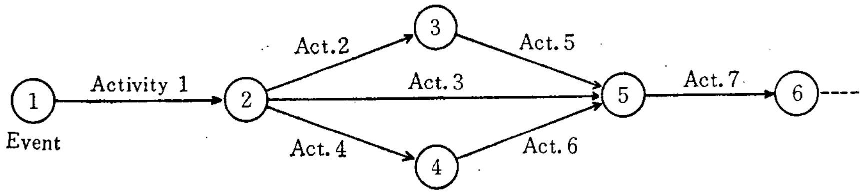
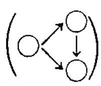


그림-3 PERT network

그림-3에서와 같이 Event는 ○로 Activity는 →로 表示하며 Network 형성에 Loop



는 許容되지 않는다. 또한 두개의 activity가 並行하면 同一 Event로 始作하여 同一 Event로 끝나게 되면 Dummy activity (……›)를 삽입하여 그림-4와 같이 한다.

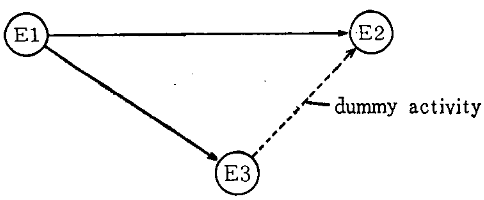


그림-4 Dummy activity 삽입

3) 각 activity 마다 소요시간을 예측하여 주되 배정된 인원, 필요한 자재, 기재, 작업량, 진행속도, 생산품의 품질등과 환경조건을 고려하여 다음과 같이 세가지로 준다.

- optimistic time estimate (a : 낙관예측치) : 최소한으로 들리라고 예측된 시간
- most likely time estimate (m : 정상예측치) : 가장 적당하다고 생각된 시간
- pessimistic time estimate (b : 비관 예측치) : 최대한으로 들리라고 예측된 시간

이와 같은 Network로 부터 우리는 手作業을 通하던가 Computer PERT package를 이용하여 t_e(expected elapsed time; $t_e=\frac{a+4m+b}{6}$), σ (standard deviation of expected time; $\sigma=\frac{b-a}{6}$), T_E(earliest expected time), T_L (latest allowable time), Activity slack, Event slack, Critical path 및 T_S(scheduled completion time)에 完了할 수 있는 確率等을 求할 수 있고 이들을 分析하여 진행상황을 평가할 수 있다. 또한 Crash planning(費用이 더 들더라도 일찍 끝내야 할 경우)을 할 때 각 activity 마다 normal time 및 normal cost와 crash time 및 crash cost를 부여하여 처음에는 Normal planning으로 한 후 Critical path에 있는 activity 中 最小의 費用으로 crash할 수 있는 것 부터 crash해 나가면 全體的으로 crash 하는 것 보다 훨씬 싸게 일찍 끝낼 수 있게 된다. 어떠한 作業計劃(자원 배정등)이 잘 됐는지 잘 안됐는지는 Slack time 특히 Activity slack time을 보아 알 수 있다. 즉 많은 Activity가 큰 Positive slack time을 가지면 그 과제수행계획은 자원배정등에 있어 改善할 바가 있다고 보겠다. 즉 Slack time이 많은 Slack path에 있는 Activity의 Resource 一部를 Critical path에 있는 Activity로 配定하는 것이 바람직하다.

한 課題가 一定期間안에 完了될 確率은 Critical path에 포함된 모든 Activity의 t_e와 σ를 가지고 다음과 같이 구한다. (표-12)

표-12 完了期待 確率의 計算

T_s : Scheduled Completion time

T_E : 주공정선에 포함된 모든 acivity의 t_e의 합 즉 평균 완료기간

σ_E : 주공정선에 포함된 모든 activity의 variance의 합을 구한 후 그의 평방근을 취한 것

$\sigma_E=\sqrt{\sum_i \sigma_i}$

σ_i=critical path에 있는 activity의 σ

그러면 $z=\frac{T_s-T_E}{\sigma_E}$에서 z를 구하고 Table of Area for Standard Normal Probability Distribution 에서 확률을 구한다.

PERT의 活用을 보기 위하여 다음과 같은 예를 생각하기로 한다. 한 納品會社가 있어 어떠한 製品을 만들어 納品하는 데 納品期日이 빠를수록 표-13과 같이 더 많은 用役費를 받게 된다.

이 製品을 生産하는 데 있어 Normal planning 과 Crach planning을 할 경우 소요시간 및 費用은 각각 표-14와 같다.

표-13 納品期日과 用役費受領額

納品期日(週)	受　領　額
16	31,000,000원
15	31,250,000원
14	32,500,000원
13	35,000,000원
12	26,250,000원

표-14 소요시간 및 費用

Activity	Normal planning		Crash planning		Incremental cost
	N_T(週)	N_C(萬원)	C_T(週)	C_C(萬원)	I_C(萬원/주)
1—2	3	250	1	450	100
2—3	4	400	3	700	300
2—4	3	200	2	300	100
2—5	8	250	7	300	50
3—6	4	150	2	250	50
4—6	6	100	4	180	40
5—7	5	500	4	700	200
6—7	3	350	1	530	90
	T_E=16주	計 2,200	T_E=12주	計 3,410	

Normal planning의 PERT network는 그림-5와 같다. 여기서 두 줄로 된 화살표는 主工程線을 意味한다.

그림-5를 볼 때 1주를 줄이기 위하여는 ①→②, ②→⑤, ⑤→⑦중 한 activity에서 1주를 단축시켜야 하여 費用증가로 볼 때 ②→⑤를 1주 crach하는 것이 가장 經濟的이다. 그렇게 되면 完了期間이 15주가 되며 總費用은 2,250만원이 된다. 이와 같이 critical path에 있는 activity중 I_c가 가장 작은 activity를 crash해 가면 표-15와 같은 결과를 얻는다. 또한 용역으로 인한 이익금도 同時에 기입하였다.

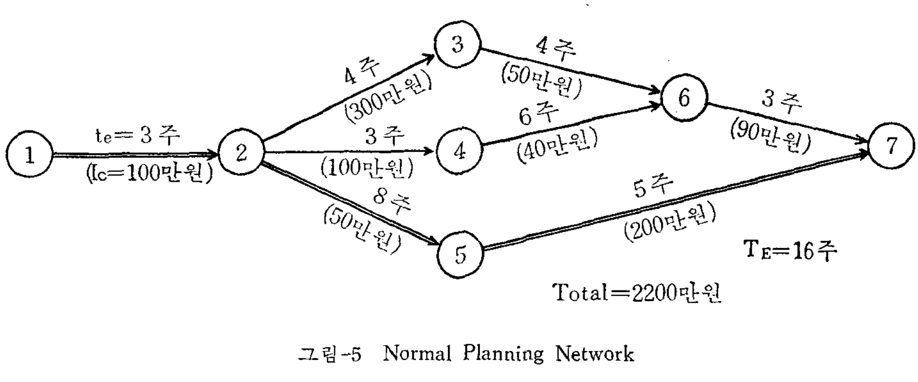


그림-5 Normal Planning Network

표-15를 볼때 이 納品會社에서는 13週에 納品하는 것이 第一 많은 利益金을 얻게 된다. 또한 Crash planning으로서는 12週에 마치는 데 3,410만원의 費用이 드는 것이 되나(표-14)

표-15　Crash 상황과 이익금 관계

Crash Activity	納品期日(주)	總　費　用(만원)	용역비수령액(만원)	이　익　금(만원)
Normal	16	2200	3100	900
②→⑤	15	2250	3125	875
①→②	14	2350	3250	900
①→②	13	2450	3500	1050
⑤→⑦ 및 ⑥→⑦	12	2740	3625	885

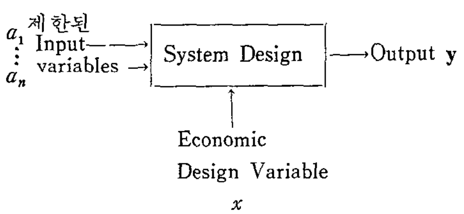
Normal planning부터 필요한 activity만 crash 해 가면 12주에 完了하는 데 2,740만원 밖에 안들므로 670만원을 절약하는 것이 된다.

마) 解析學的 最適化 模型

從來의 方法으로서 微分을 使用하여 目的函數를 極小 或은 極大로 하려는 것이다.

一般的으로 어떠한 System을 設計하는 데는 그것이 Hardware 設計거나 Software 設計거나 간에 調整이 不可能한 制限된 入力變數와 調整이 可能한 制限된 入力變數를 갖게되는 데 이때 調整이 可能한 Economic Design Variable을 適當히 조정하면 最適의 目的을 達成할 수 있다. Economic Design Vairable이 1個인 경우에는 표-16에 表示된 바로 구할 수 있으며 1個以上인 경우에는 표-17과 같이 偏微分을 使用하게 된다.

표-16　1個의 Economic Design Variable 경우



$y=f(a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n,\ x)$

最適의 x를 구하기 위하여

$\frac{dy}{dx}=0$로 해서 x에 대하여 풀어 그것을 x^*라 할 때

$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=x^*}=0$　$\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{x=x^*}>0$면 $x=x^*$에서 y가 極小

$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=x^*}=0$　$\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{x=x^*}<0$면 $x=x^*$에서 y가 極大

$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=x^*}=0$　$\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{x=x^*}=0$면 $x=x^*$에서 y는 變曲

表-17　1個以上의 Economic Design Variable 境遇

Output variable이 $y=f(x_1, x_2, \cdots, x_m)$으로 주어졌을 때

$\frac{\partial y}{\partial x_i}=0$　$i=1,\ \cdots,\ m$를 구하고 $x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_m$을 聯立方程式으로 풀면 됨

萬一 $g(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_m)=0$라는 side condition이 있으면 Lagrange Multiplierλ를 使用하면 便利함. 즉

$L(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_m,\ \lambda)=f(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_m)+\lambda g(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_m)$로 고쳐

$\frac{\partial L}{a x_i}=0$　$i=1,\ 2,\ \cdots,\ m$

$\frac{\partial L}{\partial \lambda}=0$　로 하여 풀면 됨

어떤 會社에서 廣告費用(A)과 品質管理費用(Q)으로 1,750만원을 使用할 수 있는 데 이 중 얼마를 廣告費用에 쓰는 것이 가장 좋은지를 求하고자 한다. 이 會社의 年間 Fixed cost는 廣告와 品質管理費用을 除外하고 1,500만원이며 Variable cost는 판매量$(N)\times$50원이다. (단, N은 百萬개를 單位로 함)

이 會社의 總費用 C(100萬원 單位로)

$C=15+.50\times N+Q+A$

단, $Q+A=17.5$(100萬원 단위)

단가를 P원이라 할 때 총판매량 N은 다음과 같은 관계식으로 表示된다.

$N=150-15P+0.2AQ+Q+2A$

총판매액 S (100만원 단위)는

$S=N\cdot P$

이익 P_n(100만원 단위)은

$P_n=S-C$

$$= -90+157.5P-15P^2+0.2PAQ$$
$$+PQ+2PA-0.1AQ-1.5Q-2A$$

Side condition은 $Q+A-17.5=0$

$$L(P, A, Q; \lambda)=P_n(P, A, Q)+\lambda(Q+A-17.5)$$

$$\frac{\partial L}{\partial P}=157.5-30P+0.2AQ+Q+2A=0$$

$$\frac{\partial L}{\partial A}=-2+0.2PQ+2P-0.1Q+\lambda=0$$

$$\frac{\partial L}{\partial Q}=-1.5+0.2PA+P-0.1A+\lambda=0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda}=Q+A-17.5=0$$

여기서 P가 10원이라 하고 A와 Q에 대해 풀면 $Q=625$만원

$A=1,125$만원을 얻게 된다.

이것이 이익을 最大로 하는 品質管理 및 廣告費用인 것이다.