〈硏究論文〉

Journal of the Korean Institute of Industrial Engineers
Vol. 1 No. 2 December 1975

多品目 生產體制의 生產計劃을 위한 모델

(A Model for Production Planning in a Multi-item Production System)

——Multi-item Parametric Decision Rule——

崔 炳 奎**

Abstract

This paper explores a quantitative decision-making system for planning production, inventories and work-force in a multi-item production system.

The Multi-item Parametric Decision Rule (MPDR) model, which assumes the existence of two types of linear feed-back rules, one for work-force level and one for production rates, is basically an extension of the existing method of Parametric Production Planning (PPP) proposed by C.H. Jones. The MPDR model, however, explicitly considers the effect of manufacturing progress and other factors such as employee turn-over, difference in work-days between month etc., and it also provides decision rules for production rates of individual items.

First, the cost relations of the production system are estimated in terms of mathematical functions, and then decision rules for work-force level and production rates of individual items are establised based upon the estimated objective cost function. Finally, a direct search technique is used to find a set of parameters which minimizes the total cost of the objective function over a specified planning horizon, given estimates of future demands and initial values of inventories and work-force level.

As a case problem, a hypothetical decision rule is developed for a particular firm (truck assembly factory).

I. 序 論

製造企業의 生產計劃問題는 實務經營者의 主課題일뿐 아니라 理論的인 硏究의 對象이 되고 있다. 특히 生產活動에 수반되는 原價上昇要因이 늘어나고, 同種기업간의 競爭이 치열하여질 뿐 아니라, 製品에 대한 需要變動이 심하여짐에 따라 計量的인 方法에 의한 生產計劃의 必要性이 더욱 절실해지고 있다. 그러나, 生產計劃의 問題는 製品別 生產率, 즉 單位期間 동안의 生產量, 뿐 아니라 在庫計劃 및 人力計劃의 問題까지도 포함하고 있기 때문에, 일반적으로 問題의 형태가 매우 복잡하

* 本 硏究는 韓國科學院 產業工學科 碩士學位論文을 위하여 韓國科學院의 도움을 얻어 1974年 7月~1975年 7月에 隨行되었으며, 여기에 실린 論文은 碩士學位論文에서 부분적으로 拔萃한 것이다.

** 現在 崇田大學校 產業工學科

여지게 된다.

이러한 綜合的인 生産計劃의 問題는, "Production Smoothing"이라고 불리우는 하나의 獨自的인 硏究分野로 發展하여, 經營科學의 중요한 對象이 되고 있는데, 초기에는 여러가지 數學的기법들이 일반화됨에 따라, Transportation Method of LP [3], General Linear Programming [9], Quadratic Programming [10], Dynamic Programming [8], Goal Programming [6] 등을 이용한 生産計劃모델이 시도되었다.

그 이후의 硏究들은 크게 네가지로 구별될 수 있는데;

(1) 모델의 適用範圍 및 槪念을 擴張하려는 硏究……Hanssman [9]의 LP모델을 여러 가지 관점으로 擴張한 모델들[16]과, Holt [10]의 Linear Decision Rule (LDR) 모델을 多品目모델로 擴張한 Bergstrom [2]의 Multi-item Decision Rule (MDR) 및 Damon [5]의 生産, 販賣 및 財務를 포함하는 모델에 관한 연구.

(2) 旣存의 모델에 對한 解析的 分析……Panne [14]의 LDR모델에 대한 感度分析 (Sensitivity Analysis), Kriebel [12]의 生産관계의 費用係數를 推定하기 위한 Multistage Regression Analysis, 在庫관계의 費用에 관한 Schwartz [15]의 Perturbed Demand Model.

(3) 모델의 解를 보다 용이하게 구하기 위한 硏究……컴퓨터에 의한 最適化技法을 응용한 Taubert [18]의 Search Decision Rule (SDR) 모델 및 Goodman의 Sectioning Search方法[7], Vergin [19]의 Computer Simulation方法 등.

(4) 모델의 應用을 위한 연구……經營者의 意思決定事例로부터 모델을 세우려는 Bowman [4]의 Management Coefficient Method (MCM) 및 Jones [11]의 Parametric Production Planning (PPP).

以上의 硏究들은 각자의 特性이 있고 또 어떤 모델이건 이에 適合한 특정한 生産體制가 存在할 수 있지만, 一般的으로 바람직한 數學的 모델은 다음의 요구사항을 가능한 충족시킬 수 있어야 되겠다. 즉 (1) 보다 實際問題에 가깝도록 모델을 세우고, (2) 일단 세워진 모델의 解를 구하기 용이하며, (3) 企業의 經營者들에게 理解되기 쉽게 함으로써 現場에의 適用이 容易하여야 된다.

그런데 本 모델(Multi-item Parametric Decision Rule)은 費用關係目的함수의 形態에 제약을 두지 않으며, 問題의 解를 구함에 있어서 Parametric Decision Rule을 設定하고 또 이를 最適化하는데 Pattern Search方法을 활용함으로써, 앞서의 요구사항을 최대한 만족시키고 있다.

한편 計量的인 生産計劃을 마련하기 위하여 本 모델은; (1) 單一한 生産體制下에서 生産容量이 고정되어 있고, (2) 製品의 生産量은 投入된 工數(Man-hour)에 근사적으로 비례하며, (3) 需要豫測이 가능한, 計劃生産體制여야 한다는 假定을 요구한다.

Ⅱ. 意思決定모델

一般的으로 製造기업의 生産活動에 관련되는 意思決定段階는 長期生産戰略, 短期生産計劃, 生産日程樹立의 세가지로 구분된다. 이들 중에서 日常的으로 經營者가 당면하게 되는 意思決定上의 어려움은 주로 短期生産計劃의 問題에 있는데, 여기에서 短期生産計劃이란 每期間의 製品別 生産量, 雇用人力水準, 製品別 在庫水準 및 特勤作業時間 등을 適切하게 決定하는 것을 의미한다. 短期生産計劃을 수립하려면 첫째로 이와 관련하여 發生되는 諸般費用을 가능한 정확하게 推定하여야 되는데, 중요한 變動費用으로는 ①固定賃金, ②解雇 및 雇用費用, ③生産率의 變動에서 생기는 費用, ④在庫關係費用 등이 있다. 또 실제로 短期生産計劃에 관한 意思決定을 내림에 있어서 經營者는 ①製品에 대한 需要의 變動, ②需要豫測의 不確實性, ③現在의 意思決定과 未來의 意思決定과의 關係 등도 아울러 考慮하여야 한다.

따라서 短期生産計劃을 위한 計量的 모델은 諸般 變動費用을 決定變數(生産量, 在庫水準, 人力水準, 特勤時間)에 관한 數學的 函數로 表示하고, 計劃期間長(Planning Horizon)의 全

體의 總 費用을 最少로 하여주는 決定變數들의 값을 찾는다. 近似的으로 費用關係 目的函數는 線形이나 二次形式으로 表示되는데, 線形인 경우에 있어서는 外來變數(Exogenous Variables)가 定하여진(Deterministic) 것으로 假定하는 반면, 二次形式에 있어서는 이러한 假定을 두고 있지 않기 때문에 二次形式의 目的函數(註 1)를 사용하는 것이 보다 現實的이다.

그러나 決定變數의 數가 많아지게 되면 二次形式의 目的函數에 대한 最適化는 매우 복잡하여지기 때문에, 본 모델(MPDR)은 適切한 형태의 Decision Rule에 의하여 決定變數의 값을 얻는 方法을 사용하고 있다.

각각의 費用關係를 設定하기에 앞서 앞으로 사용될 중요한 變數들을 定義하면 ;

W_t=期間 t동안의 作業者數

P_{it}=기간 t동안의 i製品 生產量

I_{it}=기간 t동안의 i제품 期末在庫

S_{it}=기간 t동안의 i제품 需要(販賣)量

$(i=1, 2, \cdots\cdots N;\ t=1, 2\cdots\cdots, T)$

1) 固定賃金 WR_t

正規作業人員의 變動은 期間이 바뀔 때 발생하는 것이 보통이며, 變動이 일어나는 作業者그룹에 대하여는 거의 均一한 正常給料가 지급되기 때문에 期間 t동안에 지불되는 固定賃金 WR_t는 다음의 式으로 表示된다.

$$WR_t=c_1\cdot W_t+c_2 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

단 ; c_1, c_2는 常數

2) 解雇 및 雇用費用 WC_t

作業者를 새로 雇用하거나 임의 解雇하게 되면 必然的으로 이에 관련되는 費用이 發生하게 된다. 그런데 일반적으로 發生되는 費用의 폭은 作業人員變動에 대하여 相對的으로 더욱 커지게 될 것이다. 여기에 作業者의 離職을 감안하면 期間 t의 初에 發生되는 解雇 및 雇用費用 WC_t는 근사적으로 ;

$$WC_t=c_3(W_t-W_{t-1}+W_{t-1}\cdot R_{t-1})^2+c_4\cdots \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

단 ; R_t=期間 t동안의 離職率

c_3, c_4=常數

3) 變動生產費用 VC_t

製品 한 單位를 生產하는데 필요한 標準所要工數(Standard man-hour per unit of product)를 k_t라고 하고 P_t개를 生產하려면 期間 t의 所要工數(Rqeuierd man-hour) L_t는 ;

$$L_t=k_t\cdot P_t$$

또 期間 t의 正規作業時間을 H_t라고 하면 이 期間의 可用工數(Available man-hour) A_t는 다음과 같이 表示된다.

$$A_t=H_t\cdot W_t$$

여러 종류의 製品을 生產하는 경우에는 總所要工數는 모든 製品에 대한 所要工數의 合이 되지만, 실제로는 工數의 손실이 따르기 때문에 全體的인 工數利用率을 U_t라고 하면 期間 t의 總 所要工數는 다음의 式이 될 것이다.

$$L_t=\frac{1}{U_t}(\Sigma_{i=1}^{N}k_{it}\cdot P_{it}) \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

단 ; k_{it}=期間 t의 i製品 標準所要工數

U_t=工數利用率

그런데 所要工數 L_t가 可用工數 A_t를 초과하게 되면 特勤作業 등으로 인한 費用要因이 발생하게 되어, t期의 變動生產費用 VC_t는 근사적으로 다음의 2차함수로 表示될 수 있다[1], [2].

$$VC_t=c_5(L_t-A_t+c_6)^2+c_7\cdot L_t+c_8\cdot L_t\cdot A_t+c_9\cdot A_t+c_{10} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(4)$$

단 ; L_t=t期의 所要工數(式(3))

A_t=t期의 可用工數

4) 在庫關係費用 IC_t

完製品의 在庫를 유지하는데는 이를 보관 및 관리하는 제반 經費와, 直接製造原價에 대한 機會費用이 발생하게 되는 반면, 注文殘庫(Back-order)를 두게 되면 顧客의 信用은 물론 販賣機會의 상실을 초래하게 되고 나아가서는 至急輸送이나 納期遲延에 대한 보상이 따르게 된다.

그런데 製品에 대한 需要는 확률적으로 발생한다고 볼 수 있기 때문에 실제의 在庫關係費用式은 확률적인 기대값으로 표시되어야 할

註 1) 目的函數가 二次形式인 最適化에 있어서는 外來變數의 期待値에 의한 最適決定은 不確實性下에서의 最適決定이 된다. 이에 관한 Certainty Equivalance Proof는 Theil, H. *Optimal Decision Rule for Government and Industry*, North-Holland Pub. Co. 참조.

것이다.

이론적으로는 주어진 需要豫測値 S_{it}는 실제 販賣量의 기대값이므로, 製品別 在庫關係費用은 期末在庫量 I_{it}와 S_{it}에 관한 近似的인 二次形式으로 표시될 수 있을 것이다[1]. 따라서 t期의 在庫關係費用 IC_t는, 모든 製品을 합하여, 다음의 식으로 표시된다.

$$IC_t=\sum_{i=1}^{N}\{c_{i1}(I_{it}-c_{i2}\cdot S_{it})^2+c_{i3}\cdot S_{it}\cdot I_{it}\} \quad\cdots\cdots(5)$$

단 ; c_{ij}=상수($i=1,\cdots N$; $j=1,2,3$)

5) 目的函數

이상의 부문별 비용을 합하면 期間 t의 總費用은 다음의 식이 된다.

$$\begin{aligned}TC_t&=WR_t+WC_t+VC_t+IC_t\\&=\{c_1\cdot W_t+c_2\}\\&+\{c_3(W_t-W_{t-1}+W_{t-1}\cdot R_{t-1})^2+c_4\}\\&+\{c_5(L_t-A_t+c_6)^2+c_7\cdot A_t+c_8\cdot A_t\cdot L_t\\&+c_9\cdot L_t+c_{10}\}+\sum_{i=1}^{N}\{c_{i1}(I_{it}-c_{i2}\cdot S_{it})^2\\&+c_{i3}\cdot S_{it}\cdot I_{it}\}\quad\cdots\cdots(7)\end{aligned}$$

그런데 最適의 生産計劃은 計劃期間長 전체의 총 비용을 최소로 하는 매 기간의 生産量 및 人力水準 등을 決定하는 것을 의미하기 때문에, 식 (7)을 計劃期間長 T에 대하여 합하면, 目的函數는 다음의 식이 된다.

$$\underset{\{W_t,P_{it}\}}{\text{Minimize}}\ TC=\sum_{t=1}^{T}TC_t \quad\cdots\cdots(8)$$

subject to $I_{it}=I_{i,t-1}+P_{it}-S_{it}$

단 ; W_0, I_{i0}, =초기값

S_{it}=주어진 需要豫測値

T=計劃期間長

N=製品의 數

6) Parametric Decision Rule

目的函數 式 (8)은 2차형식의 最少化問題인데, 보통의 경우에 있어서도 決定變數의 數가 매우 많으며($T=10$, $N=8$이면 90개) 또 制約條件까지를 감안하면, 解析的인 最適化는 실제적인 목적을 위하여는 적합한 방법이 되지 못한다. 그런데 一般的으로 二次形式의 最適化問題에 있어서 決定變數는 初期條件, 係數, 및 外來變數(Exogenous Variable)의 線形結合으로 표시되기 때문에, 이러한 선형결합을 주어진 目的函數에 대한 Heuristic Decision Rule로 사용할 수 있을 것이다.

이러한 Decision Rule은 計算上의 어려움을 극복하여 줄 뿐아니라, 經營者가 이해하기 쉽고 現場에서의 적용이 용이하다는 實用的인 장점도 지닌다.

Jones[11]는 Holt의 LDR[10]모델에 대한 Heuristic Decision Rule인 PPP모델을 제시한 바 있는데, LEE[13]에 의하면 PPP와 LDR은 거의 동일한 最適解를 제공하고 있다.

Parametric Decision Rule을 구하려면, 먼저 決定變數(W_t, P_{it})를 初期條件(W_0, I_{i0})과 外來變數(S_{it})의 적당한 線形結合으로 표시하고, 目的函數의 값이 最少가 되는 決定變數를 제공하여 주는 線形結合의 媒介變數를 定하여 준다. 이를 개념적으로 설명하면, 일차적으로 基本値(Base Point) BP와 必要値(Desired Point) DP를 정하고 다음에는 이들 두 값의 加重平均을 취하여 적당한 방법으로 最適値(Optimal Point) OP를 찾는다. 즉,

$$OP=a\cdot BP+(1-a)\cdot DP \quad 0\le a\le 1$$

決定變數에는 作業人員(W_t)과 生産量(P_{it})의 두 종류가 있는데, Jones[11]에 의하면 作業人員을 위한 Decision Rule을 먼저 구한 다음에 이 결과를 이용하여 生産量을 정하는 Decision Rule들을 구하면 된다.

Work-force Rule

適正作業人員을 얻기 위한 Decision Rule의 基本値는 既存의 保有作業人員이 되고, 必要値는 미래의 需要를 충족시키는데 소요되는 必要作業人員이 된다고 볼 수 있다. 따라서 當期의 適正作業人員 WR은 다음의 加重平均式으로 표시될 수 있을 것이다.

$$WR=a\cdot WO+(1-a)\cdot WD,\quad 0\le a\le 1$$

; WO=既存의 保有人員

WD=미래의 需要에따른 必要作業人員

미래의 製品需要와 관련된 必要作業人員 WD를 구하려면, 製品別 需要豫測値를 각 기간의 所要作業人員의 豫測値로 변환시킬 필요가 있다. 이를 위하여 線形變換函數 K-function을 定義하는데, 이 변환에 의하여 매 기간의 單位生産費用을 最少로 하여 주는 期間別 適正作業人員이 정하여진다. 즉,

$$\hat{W}_t=K_t(S_t),\quad t=1,2,\cdots\cdots T$$

단 ; $\hat{W}_t$ = 期間 t의 所要作業人員의 豫測値

$K_t(\cdot)$ = 線形變換函數 K-function

그리고 需要豫測과 관련된 當期의 必要作業人員 WD는 所要作業人員豫測値 $\hat{W}_t$의 加重平均으로 표시할 수 있으며, 加重平均의 係數로는 다음과 같은 형태의 減少되는 數列이 적합하다[11].

$$b_t = B^t/(\Sigma_{t=1}^T B_t),\ 0<B\leq 1$$

한편 第一期에 대하여는 適正在庫水準 $I_1{}^*$과 期初在庫量 I_0의 차이를 감안하여 所要作業人員의 豫測値 $\hat{W}_1$는 다음과 같이 표시된다.

$$\hat{W}_1 = K_1(S_1 + I_1{}^* - I_0) = K_1(S_1) + K_1(I_1{}^* - I_0)$$

以上의 結果를 종합하면 Work-force Rule의 必要値로 사용될 必要作業人員 WD는 다음과 같은 式이 된다.

$$\begin{aligned}\mathrm{WD} &= \Sigma_T{}^{t=1}\ b_t \cdot \hat{W}_t \\ &= b_1 \cdot K_1(I_1{}^* - I_0) + \Sigma_{t=1}^T\ b_t \cdot K_t(S_t)\end{aligned}$$

위의 결과를 여러 종류의 製品에 관하여 나타내려면 위의 式에 製品을 표시하는 첨자를 첨가하면 된다. 즉

$$WD_i = b_1 \cdot K_{i1}(I_{i1}{}^* - I_{i0}) + \Sigma_{t=1}^T\ b_t \cdot K_{it}(S_{it})$$
$$(i=1, 2, \quad N)$$

따라서 N개의 製品에 대한 當期의 必要作業人員 WD는 각 製品別 必要作業人員 WD_i의 합이 되기 때문에 최종적인 Work-force Rule의 形態는 다음과 같다.

$$\mathrm{WR} = a \cdot \mathrm{WO} + (1-a) \cdot \mathrm{WD} \cdots\cdots\cdots\cdots (9)$$
$$\mathrm{WD} = \Sigma_{i=1}^N\ WD_i$$
$$\mathrm{WD}_i = b_1 \cdot K_{i1}(I_{i1}{}^* - I_{i0}) + \Sigma_{t=1}^T b_t \cdot K_{it}(S_{it})$$

Production Rules

製品別 生産量에 대한 必要値 PD_i는 需要豫測値의 加重平均으로 표시되며, 加重平均의 係數는 다음과 같은 減少되는 數列이 적합하다[11]. 즉

$$PD_i = d_{i1}(I_{i1}{}^* - I_{i0}) + \Sigma_{t=1}^T\ d_{it} \cdot S_{it}$$
$$d_{it} = D_i{}^t/\Sigma_{t=1}^T D_i^t,\ 0<D_i\leq 1$$
$$(i=1, 2, \cdots\cdots N)$$

한편 生産量의 基本値를 정하기 위하여는 既存의 保有人力을 單位費用을 最少로 하는 適正生産量으로 변환시켜야 되는데, K^{-1}-function이라고 定義되는 이 變換函數는 K-function의 역함수로 생각될 수 있다.

그러나 여러 종류의 製品의 生産量에 대한 基本値는 單一하게 決定되지 않는다. 따라서 既存의 保有人力을 製品別로 分配하는 合理的인 기준이 필요하게 된다.

Work-force Rule에서 必要値로 사용된 總必要作業人員 WD는 製品別 必要作業人員 WD_i의 合인데, 이 結果를 既存保有人力의 製品別分配에 이용하는 것이 타당할 것이다. 따라서 既存의 保有人力 WR은 製品 i를 生産하기 위하여 $\left(\frac{\mathrm{WD}_i}{\mathrm{WD}}\right)$의 비율로 分配된다고 볼 수 있다.

따라서 Production Rule에서의 製品別 生産量의 基本値 PB_i는 다음 式으로 표시된다.

$$PB_i = K_{i1}^{-1}\left(\mathrm{WR} \cdot \frac{\mathrm{WD}_i}{\mathrm{WD}}\right),\ (i=1, 2, \cdots, N)$$

以上의 결과를 종합하면 구하고자 하는 Production Rule은 식 (10)과 같다.

$$PR_i = c \cdot PB_i + (1-c) \cdot PD_i \cdots\cdots\cdots\cdots (10)$$
$$PB_i = K_{i1}^{-1}(\mathrm{WR} \cdot \mathrm{WD}_i/\mathrm{WD})$$
$$PD_i = d_{i1} \cdot (I_{i1}{}^* - I_{i0}) + \Sigma_{t=1}^T d_{it} \cdot S_{it}$$
$$; 0\leq c\leq 1$$
$$(i=1, 2, \cdots, N)$$

Parametric Decision Rule

앞 節의 式 (8)의 目的函數에 대한 Parametric Decision Rule은 式 (9) 및 (10)을 결합한 것이 된다. 이를 다시 쓰면 ;

$$\mathrm{WR} = a \cdot \mathrm{WO} + (1-a) \cdot \mathrm{WD}$$
$$\mathrm{WD} = \Sigma_{i=1}^N \mathrm{WD}_i$$
$$\mathrm{WD}_i = b_1 \cdot K_{i1}(I_{i1}{}^* - I_{i0}) + \Sigma_{t=1}^T\ b_t \cdot K_{it}(S_{it})$$
$$PR_i = c \cdot K_{i=1}^{-1}(\mathrm{WR} \cdot \mathrm{WD}_i/\mathrm{WD}) + (1-c) \cdot \{d_{i1} \cdot (I_{i1}{}^* - I_{i0}) + \Sigma_{t=1}^T\ d_{it} \cdot S_{it}\}$$
$$(i=1, 2, \cdots, N)$$

단 ; $b_t = B^t/\Sigma_{t=1}^T B^t; 0<B\leq 1$

$d_{it} = D_i^t/\Sigma_{t=1}^T\ D_i{}^t;\ \ 0<D_i\leq 1, (i=1, 2, \cdots\cdots N)$

WO = 既存 保有人力

WR = Work-force Rule에 의하여 定하여진 當期의 作業人員

$I_{i1}{}^*$ = 製品 i의 適正在庫水準

I_{i0} = 製品 i의 期初在庫量

$K_{it}(\cdot), K_{i1}^{-1}(\cdot)$=線形變換函數
N=製品의 數
T=計劃期間長

Ⅲ. 모델의 最適化

1) Decision Rule의 決定

앞 章의 Parametric Decision Rule에 사용된 線形變換函數 K-function과 K^{-1}-function은 각각 單位生産費를 最少로 하여주는 適正作業人員과 適正生産量을 決定하기 위한 變換을 나타낸다.

그런데 單位生産費를 最少로 하려면 特勤이나 休務가 없도록 生産水準이 조정되어야 될 것이다. 다시 말하면 可用工數 A_t와 所要工數 L_t가 같아야 되는데, 이를 관계식으로 표시하면 다음과 같다.

$$L_t \equiv \frac{1}{U_t}\cdot k_t\cdot P_t = W_t\cdot H_t \equiv A_t$$

단, U_t=工數利用率
k_t=單位製品當 標準所要工數
P_t=生産量
H_t=正規作業時間
W_t=作業人員

따라서 위의 관계를 이용하면 變換函數는 실제적으로 다음의 형태가 된다.

① K-function……適正作業人員

$$K_{it}(S_{it}) = (k_{it}\cdot S_{it})/(H_t\cdot U_t) \cdots\cdots (11\text{—a})$$

② K^{-1}-function……適正生産量

$$K_{i1}^{-1}(W_t) = W_t\cdot H_1\cdot U_1/k_{i1} \cdots\cdots\cdots (11\text{—b})$$

한편 適正在庫 I_{i1}*는 在庫關係式 式 (4)로부터;

$$I_{i1}^* = S_{i1}\cdot\left(\frac{c_{i3}+2c_{i1}\cdot c_{i2}}{2c_{i1}}\right) \cdots\cdots\cdots\cdots (12)$$

또 미래의 標準所要工數 $k_{it}(t=1,\cdots,T)$는 製造熟達函數(Manufacturing Progress Function)의 概念을 利用하면 다음과 같이 推定이 된다.

$$k_{it} = k_{i0}\left(\frac{Q_i+\Sigma_{j=1}^{t}S_{ij}}{Q_i}\right)^{\ln\phi/\ln 2} \cdots (13)$$

단; k_{i0}=製品 i의 現在의 標準所要工數
Q_i=製品 i의 現在까지의 累積生産量
ϕ=熟達係數

以上의 式 (11—a), (11—b), (12), (13)을 이용하여 目的函數와 Parametric Decision Rule을 다시 쓰면 다음과 같다.

目的函數

$$\underset{\{W_t, P_{it}\}}{\text{Minimize}}\ TC = \Sigma_{t=1}^{T}\ TC_t \cdots\cdots\cdots\cdots (14)$$

$$TC_t = \{c_1\cdot W_t + c_2\} + \{c_3(W_t - W_{t-1} + W_{t-1}\cdot R_{t-1})^2 + c_4\} + \{c_5(L_t - A_t + c_6)^2 + c_7\cdot A_t + c_8\cdot A_t\cdot L_t + c_9\cdot L_t + c_{10}\} + \Sigma_{i=1}^{N}\{c_{i1}(I_{it} - c_{i2}\cdot S_{it})^2 + c_{i3}\cdot I_{it}\cdot S_{it}\}$$

$$L_t = \frac{1}{U_t}\cdot\Sigma_{i=1}^{N}k_{it}\cdot P_{it}$$

$$A_t = H_t\cdot W_t$$

$$k_{it} = \{(Q_i + \Sigma_{j=1}^{t}S_{ij})/Q_i\}^{\ln\phi/\ln 2}$$

subject to $I_{it} = I_{i,t-1} + P_{it} - S_{it}$

단; R_t=t 期의 離職率
U_t=t 期의 工數利用率
k_{it}=t 期의 i 製品 標準所要工數
H_t=t 期의 正規作業時間
Q_i=i 製品 累積生産量
ϕ=製造熟達係數
N=製品 數
T=計劃期間長

Parametric Decision Rule

$$\text{WR} = a\cdot\text{WO} + (1-a)\cdot\text{WD} \cdots\cdots (15\text{—a})$$

$$\text{WD} = \Sigma_{i=1}^{N}\text{WD}_i$$

$$\text{WD}_i = b_1\cdot k_{i1}\cdot(I_{i1}^* - I_{i0})/(U_1\cdot H_1) + \Sigma_{t=1}^{T}b_t\cdot k_{it}\cdot S_{it}/(U_t\cdot H_t)$$

$$PR_i = c\cdot(\text{WR}\cdot\text{WD}_i/\text{WD})\cdot(U_1\cdot H_1/k_{i1}) + (1-c)\cdot\{d_{i1}\cdot(I_{i1}^* - I_{i0}) + \Sigma_{t=1}^{T}d_{it}\cdot S_{it}\} \cdots\cdots\cdots\cdots (15\text{—b})$$

$$I_{i1}^* = S_{i1}\cdot(c_{i3} + 2c_{i1}\cdot c_{i2})/2c_{i1}$$

$$b_t = B^t/\Sigma_{t=1}^{T}\ B^t$$

$$d_{it} = D_i^{\,t}/\Sigma_{t=1}^{T}\ D_i^{\,t}\ \ (i=1,2,\cdots,N)$$

단; WO=旣存의 保有人員
I_{i0}=i 製品 期初在庫量
$a, B, c, D_1, \cdots, D_N$=Parameters [0, 1]

2) Pattern Search 方法에 의한 最適化

본 모델(MPDR)의 最適化를 단계적으로 설명하면 대략 다음과 같다.

i. 生産體制를 分析하여 目的函數(식 14)의 형태를 決定하고, 이에 필요한 係數(c_i, c_{ij})들을 推定한다.

ii. 生産體制 固有의 常數($H_i, U_i, R_i, \phi, k_{ii}$)와 需要豫測値($S_{it}$)를 얻는다.

iii. Parametric Decision Rule(식 15—a, 15—b)의 初期値(WO, I_{i0})를 구하고, Parameter ($a, B, c, D_1, D_2, \cdots, D_N$)에 임의의 초기값을 준다.

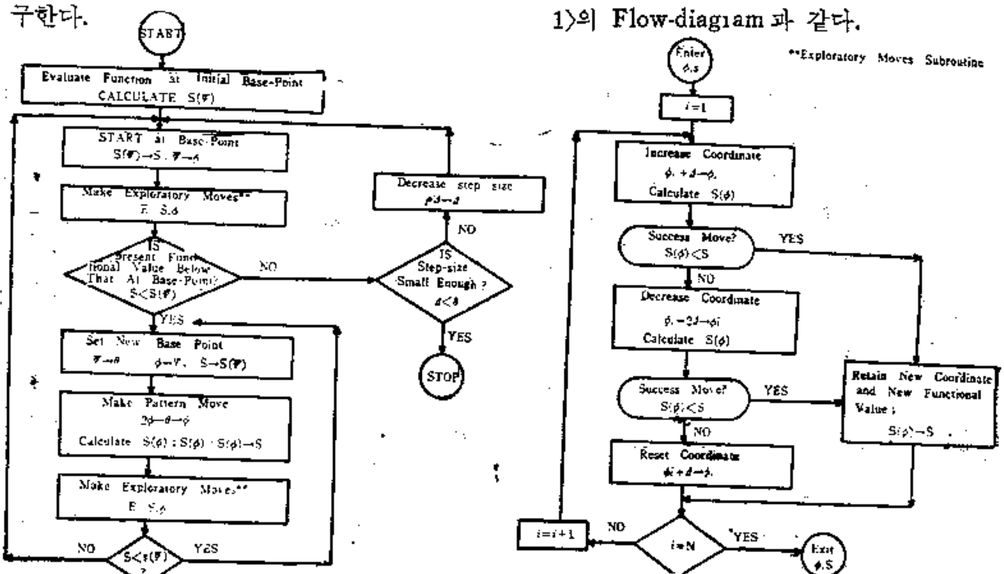
iv. Parametric Decision Rule을 이용하여 作業者數(W_t) 및 製品別 生産量(P_{it})을 차례로 구한다.

v. 위에서 구한 決定變數(W_t, P_{it})의 값들을 目的函數(식 14)에 차례로 代入하여 일정기간동안의 總 費用을 구한다.

이때 在庫量은 $I_{it}=I_{i,t-1}+P_{it}-S_{it}$의 관계에 의하여 차례로 구해진다.

vi. Pattern Search 方法에 의하여 iv.와 v.의 단계를 체계적으로 반복함으로써 目的函數의 값이 最少가 되게 하는 Parameter($a, B, c, D_1, D_2, \cdots D_N$)의 값을 찾는다.

Pattern Search란 일종의 Direct Search 方法인데 이를 槪略的으로 설명하면 다음 〈그림 1〉의 Flow-diagram과 같다.



Where ; Ψ = Current base point (N-dimensional Vector)
θ = Previous base point
ϕ = Temporary base point
$S(\Psi)$ = Functional value at the base point
S = Functional value before this move
Δ = Current step-size
δ = Minimum step-size

〈그림 1〉 Flow diagram for Pattern Search

Ⅳ. 모델의 適用

모델의 適用可能性과 使用方法의 例를 보이기 위하여 G會社(Truck Assembly)의 生産體制에 대한 事例硏究를 수행하였다.

當社는 8종류의 製品을 生産하고 있는데 실제의 자료가 미비한 점이 많고 또 이를 蒐集하고 分析함에 있어서 여러가지 제약이 따르기는 하였지만, 대체로 모델이 요구하고 있는 假定들을 만족시키고 있다고 볼 수 있었다.

1) 固定賃金 WR_t

약 160여명의 作業者 全部가 月給으로 賃金을 지급받고 있는데, 上位그룹 100여명의 平均賃金은 약 40,000원이고 나머지 下位그룹의 平均賃金은 약 25,000원 水準이다(賞與金 및 手當 제외).

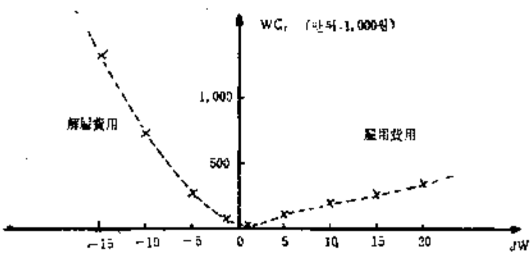
한편 作業人力의 變動은 주로 下位그룹에서 發生되기 때문에, 期間(月) t의 作業者數 W_t와 固定賃金 WR_t와의 관계는 다음의 式으로 표시될 수 있다.

$$WR_t = 25W_t + 750 \cdots\cdots\cdots\cdots (16)$$

단 ; $100 \leq W_t \leq 230$ (단위 ; 1,000원)

2) 解雇 및 雇用費用 WC_t

計劃에 의하여 作業人員을 變動시키는 경우에는 일반적으로 事務經費, 面接 및 試驗費用, 訓練敎育費, 個人惠澤, 作業班混線, 解職補償, 作業者士氣, 기타의 費用要因이 發生한다. 이러한 諸般費用의 期待値를 變動人員의 數에 대하여 나타낸 결과 대략 다음의 <그림 2>와 같았다.



<그림 2> G會社의 解雇 및 雇用費用

한편 G會社의 離職率(月)은 약 1.5%로 推定되었기 때문에 이러한 離職에 의한 作業人力의 자연감소를 고려하여 <그림-2>의 관계를 最少自乘法에 의하여 函數로 나타내면 식(17)과 같다[1].

$$WC_t = 1.82(\Delta W_t+2)^2 - 1.58(\Delta W_t+2) \cdot |\Delta W_t+2| - 10.9(\Delta W_t+2) + 18.6 |\Delta W_t+2| \quad \cdots\cdots (17)$$

단 ; $\Delta W_t = W_t - W_{t-1}$

3) 變動生産費用 VC_t

G會社에서는 이 費用은 주로 特勤手當(정상급의 150%)과 休務補償(정상급의 60%)에 관련하여 發生한다.

可用工數 A_t와 所要工數 L_t의 차이만큼 特勤 혹은 休務가 기대되지만, 실제로는 休務가 있거나 特勤이 많아지면 生産性의 현저한 하락이 나타난다.

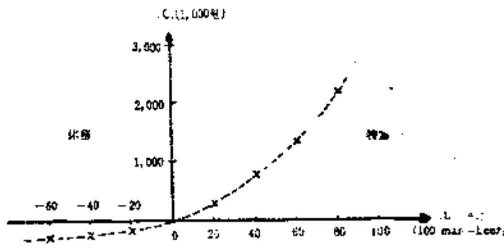
이러한 費用關係를 推定하여 그림으로 圖示한 결과 <그림-3>을 얻었다.

이 결과를 最少自乘法에 의하여 函數로 表示하면 다음 式 (18)이 된다[1].

$$VC_t = 0.184(L_t - A_t)^2 + 15.74(L_t - A_t) + 87.36 \quad \cdots\cdots (18)$$

단 ; (단위 ; 1,000원 - 100man-hour)

또 G會社의 製造熟達을 推定하기 위하여 生産實績이 비교적 오래된 4종류의 製品에 대



<그림 3> 會社의 變動生産費用

한 자료를 分析한 결과 當社의 熟達係數 ϕ는 약 0.9가 되었다. 따라서 미래의 標準所要工數 k_{it}는 다음의 관계식을 이용하여 推定한다.

$$k(X) = k_0 \left\{(Q+X)/Q\right\}^{\ln 0.9/\ln 2} \quad \cdots (19)$$

단 ; k_0=現在의 單位 標準所要工數

Q=現在까지의 累積生産量

$k(X)$=앞으로 X만큼의 生産이 계속된 이후의 標準所要工數

또 G會社의 工數利用率 U_t를 推定하는데는 다음의 관계식이 적합함을 알았다.

$$U_t = 0.95 - 3.6/(t+24) \quad \cdots\cdots (20)$$

(1974년末 現在)

<표 1> 각 제품 한단위에 대한 재고유지비용(CI) 단위 : 1,000원

제품 i	직접제조원가 D_i	기회비용 $0.025\,D_i$	인건비	경비	사고·파손	재고유지비용 $(CI)_i$
1	2,250	56.25	0.3	0.25	0.30	57.10
2	2,550	63.75	0.35	0.23	0.25	64.30
3	3,180	79.50	0.40	0.30	0.25	80.45
4	3,630	90.75	0.42	0.34	0.35	91.86
5	6,210	155.25	0.70	0.28	0.30	153.53
6	5,870	146.75	0.75	0.37	0.30	148.17
7	1,820	45.50	0.20	0.20	0.15	46.05
8	860	21.50	0.30	0	0.12	21.92

4) 在庫關係費用IC_t

完製品의 在庫를 1個月間 維持하고 管理하는데 소요되는 費用과, 1個月동안의 注文殘庫費用(Back-order Cost)은 製品別로 각각 다음의 〈표-1〉 및 〈표-2〉와 같았다.

〈표 2〉 제품별 주문잔고비용의 추정(Cd)

(단위 : 1,000원)

제품 i	이익및간접비배분* R_i	경쟁상태** S_i	추정비율*** R_i	주문잔고비용$(Cd)_i = P_i * R_i$
1	1,450	1.0	0.15	217.5
2	1,830	0.8	0.13	237.9
3	2,210	0,5	0.09	198.9
4	2,350	0.7	0.11	258.5
5	3,720	0	0.03	111.6
6	3,250	0.2	0.05	162.5
7	1,230	0.7	0.11	135.3
8	530	0.5	0.09	47.7

* 이익및 간접비배분=매출원가−직접제조비

** $S=0$; 완전독점제품

$S=1$; 완전경쟁제품

*** $R_i=0.03+0.12\ S_i$

以上의 推定値 CI_i, Cd_i를 구한 다음 이들을 이용하여 在庫關係의 期待費用을 函數로 表示하기 위하여는 보다 복잡한 分析과 硏究가 요구된다(註 2).

當期의 販賣可能量 A는 期初在庫 I_0와 當期生産量 P의 合이 되며, 실제의 販賣量 S는 確率變數로 볼 수 있기 때문에 期末在庫 I_1도 역시 確率的으로 決定되는데, 이러한 관계를 식으로 나타내면 다음과 같다.

$$A=I_0+P=I_1+S$$

한편 實際의 需要가 當期의 販賣可能量 A와 차이가 생기면 이에 해당하는 注文殘庫費用 Cd나 在庫維持費用 CI가 發生하게 되고, 또 實際의 生産過程에 있어서는 原資材의 확보 및 他 製品과의 生産日程 등에 제약이 따르기 때문에, 일반적으로 한번 수립된 生産計劃의 一時변경은 어렵게 된다.

以上의 관계에 의하여 在庫關係의 期待費用 IC는 다음과 같은 積分式으로 나타낼 수 있을 것이다[1].

$$(IC)=CI\cdot\int_0^A (A-S)\cdot f(S)\,dS+Cd\cdot\int_A^\infty (S-A)\cdot f(S)\cdot dS \cdots\cdots (21)$$

단 ; $A=I_1+S$

$f(S)$=販賣量(月)의 분포함수

한편 G會社의 販賣資料를 조사한 결과 모든 製品의 月間販賣量은 均一한 變動係數(Coefficient of Variation)를 갖는 확률변수이고, 또 實驗的인 검증에 의하여 Log-normal 分布가 됨을 알았다(註 3).

따라서 月間 販賣量 S의 分布函數 $f(S)$는 다음과 같은 形態가 될 것이다.

$$f(S)=(2\pi\sigma^2)^{-1/2}\mathrm{Exp}[-(\ln S-\mu)^2/(2\sigma^2)] \cdots\cdots (22)$$

$$\sigma^2=\ln(v^2-1)$$

$$\mu=\ln[S]-\frac{1}{2}\ln(v^2+1)$$

단 ; v=변동계수(Coefficient of Variation)推定値

S=販賣量의 不偏推定値

식 (22)를 식 (21)에 대입하여 정리하면 在庫關係費用 IC는 다음과 같이 표시된다.

$$(IC)=A\cdot S\cdot[(CI+Cd)\cdot\Phi(a)-Cd] -S^2\cdot(v^2+1)\cdot[(CI+Cd)\cdot\Phi(a-\sigma) -Cd] \cdots\cdots (23)$$

$$\Phi(a)=\int_{-\infty}^{a}(2\pi)^{-1/2}\ \mathrm{Exp}(-x^2/2)\,dx$$

$$a=(\ln A-\ln S-\sigma^2/2)/\sigma$$

$$A=I_1+S$$

$$\sigma^2=\ln(v^2+1)$$

단 ; S=販賣量의 不偏推定値

v=變動係數의 推定値

CI=재고유지비용, Cd=주문잔고비용

그런데 式(23)은 A와 S에 관한 同次式이므로, 이 式은 近似的인 展開에 의하여 (Taylor Series에서 3차항 이상은 버림) 다음의 2차식으로 표시된다.

$$(IC)=\alpha_1 A^2+\alpha_2\cdot A\cdot S+\alpha_3\cdot S \cdots\cdots (24)$$

또 $A=I_1+S$의 관계를 (24)式에 代入하면 우리가 구하고자 하는 在庫關係費用式을 얻을 수 있다. 즉

$$(IC)=\beta_1(I_1+\beta_2\cdot S)+\beta_3\cdot I_1\cdot S \cdots\cdots (25)$$

그러나 意際로 式(25)의 係數 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$를 決定하려면 式(23), (24)에서 $z=\frac{A}{S}$로 놓고

註 2) 다른 假定下에서의 推定値 및 在庫關係費用函數를 구하는 方法 및 過程은 Holt [10], pp. 75~78, Begstrom [2], pp.623~625 참조.

註 3) 販賣量의 分布函數에 관한 分析은 Holt [10], Chapter 15를 참조하고 실제적인 유도과정과 결과는 참고문헌 [1]을 참조.

x의 값을 변화시켜 가면서 最少自乘法으로 式(24)의 係數 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$를 定한 다음 이를 다시 式(25)로 바꾸어주면 된다.

以上의 과정에 따라서 G會社의 在庫費用式을 구한 결과 다음을 얻었다.

$$IC_t = \Sigma_{i=1}^{8} \{c_{i1}(I_{it} - c_{i2} \cdot S_{it})^2 + c_{i3} \cdot S_{it} \cdot I_{it}\}$$

〈표 3〉 제품별 재고관계비용식의 계수

제 품 i	재고유지비용 (CI)₩1,000	주문잔고비용 (Cd)₩1,000	비용관계함수의 계수		
			C_{i1}	C_{i2}	C_{i3}
1	57.10	217.50	64.9024	0.6839	28.1583
2	64.63	237.90	71.5037	0.6719	32.0823
3	80.45	198.90	66.0250	0.5146	40.6486
4	91.86	258.50	82.8084	0.5691	46.6477
5	156.53	111.60	63.3732	(**) −0.1112	50.0569
6	148.17	162.50	73.4276	0.1149	60.0118
7	46.05	135.30	42.8625	0.5866	23.3734
8	21.92	47.70	16.4549	0.4578	10.9228

5) 目的函數 및 Decision Rule

以上의 각 부문별 費用函數를 합하고, 이를 다시 計劃期間長(註 4)에 대하여 합한 目的函數는 다음과 같다.

$$\underset{\{W_t, P_{it}\}}{\text{Minimize}}: TC = \Sigma_{t=1}^{10} TC_t$$

$$\begin{aligned} TC_t = & \{25W_t + 750\} \\ & + \{1.82x^2 - 1.58x \cdot |x| - 10.93x \\ & + 18.6|x|\} + \{0.184(L_t - A_t)^2 \\ & + 15.74(L_t - A_t) + 87.36\} \\ & + \Sigma_{i=1}^{8} \{c_{i1} \cdot (I_{it} - c_{i2} \cdot S_{it})^2 \\ & + c_{i3} \cdot I_{it} \cdot S_{it}\} \end{aligned}$$

subject to; $I_{it} = I_{it-1} + P_{it} - S_{it}$

$x = (W_t - W_{t-1} + 2)$

$L_t = \dfrac{1}{U_t} \Sigma_{i=1}^{8} k_{it} \cdot P_{it}$

$A_t = H_t \cdot W_t$

U_t, k_{it}: 式(19), (20) 참조

c_{i1}, c_{i2}, c_{i3}: 식(26) 및 〈표-3〉 참조

한편 3章의 方法에 따라 最適化를 수행함에 있어서, 計劃期間長은 10개월로 하고 2年(24개월) 간의 總 費用을 비교하였다. 또 Pattern Search의 效率과 Parametric Decision Rule의 一貫性을 試驗하기 위하여 3종류의 서로 상이한 需要豫測値와 Parameter의 初期値, Step-size, 및 Minimum-step 등을 변화시켜가면서 最適化를 수행한 결과 〈그림 4〉의 결과를 얻었다.

〈그림 4〉에서 보는 바와 같이 본 모델에 의한 最適化는 매우 효과적인 方法이 됨을 알 수 있다.

실제로 CYBER-72 컴퓨터에 의한 最適化는 一回에 평균 54초의 CPU-time이 소요되었는데 실용적인 관점에서 보면 만족할만 하다고 볼 수 있겠다.

以上의 結果에 의하여 G會社의 短期生産計劃을 위한 Parametric Decision Rule은 다음의 형태가 된다.

Work-Force Rule

$WR = 0.298WO + 0.702WD$

$WD = \Sigma_{i=1}^{8} WD_i$

$WD_i = 0.285k_{i1}(I_{i1}^* - I_{i0}) + \Sigma_{t=1}^{10} b_t \cdot k_{it} \cdot S_{it}/(U_t \cdot H_t)$

$(b_1 = 0.285,\ b_2 = 0.207, b_3 = 0.151, \cdots, b_{10} = 0.162)$

Production Rules

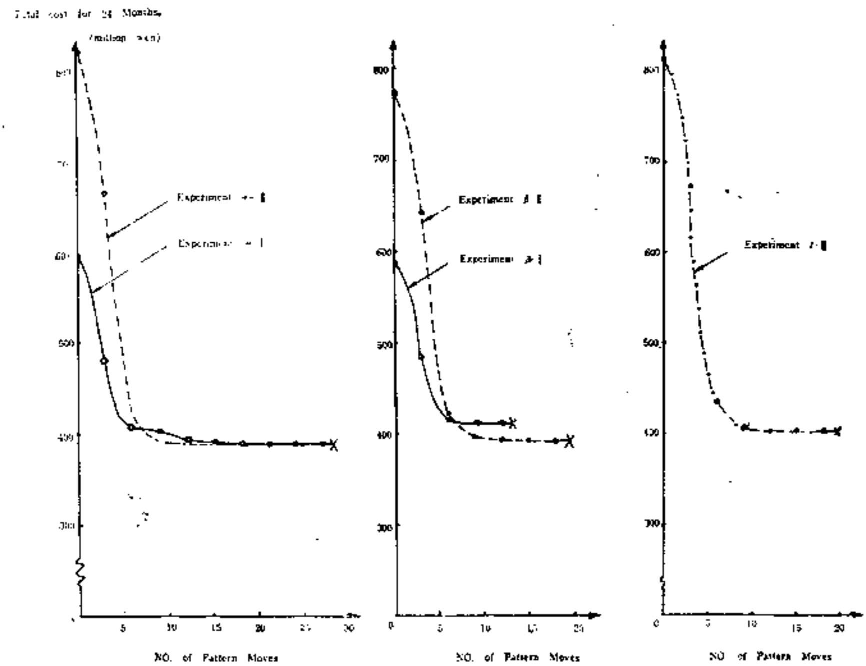
$PR_i = 0.9989(WR \cdot U_1 \cdot H_1 \cdot WD_i)/(WD \cdot k_{i1}) + 0.0011(I_{i1}^* - I_{i0})$

$(D_1 = D_2 = \cdots = D_8)$

$I_{i1}^* = S_{i1} \cdot (c_{i3} + 2c_{i1}\ c_{i2})/(2c_{i1})$ (式-12)

** CI>Cd에서는 항상 Back-order를 두어야 한다.

註 4) 計劃期間長이란 理論的으로는 當期의 意思決定이 未來의 意思決定에 영향을 미치는 最大의 期間長을 의미한다. 그러나 實際問題를 다룸에 있어서 Holt [10]는 12개월 Bergstrom [2] 및 Taubert [18]는 10개월을 사용하고 있으며 本모델에서는 10개월로 잡고 있다.



〈그림 4〉 Pattern Search에 의한 최적화 결과

Ⅴ. 結 論

本 모델은 보다 現實的인 生産體制에 대한 計量的인 意思決定體係를 다루고 있는데, Parametric Decision Rule을 Multi-item 모델에 도입함으로써 計算上의 어려움을 극복하였을 뿐 아니라 實際的인 適用에도 도움이 될 수 있도록 하였다.

이러한 計量的인 모델은 製品에 대한 需要가 심한 季節變動을 나타낼 때에 특히 그 效用性이 증대되지만 일반적으로 生産體制가 불안정한 우리나라의 기업현실에 비추어 볼 때 그 적용에 한계를 지닌다. 또 本 모델과 같은 Heuristic Model에서는 推定變數(Estimated Variables)에 대한 感度分析(Sensitivity Analysis)이 어렵기 때문에 推定誤差를 감안하기가 힘들다는 短點이 있다. 그러나 대부분의 實際的인 모델이 그렇듯이 이렇한 計量的 方法의 效用性은 이를 사용함으로써 얻어지는 意思決定의 向上에 있는 것이다.

〈감사의 말〉

本 硏究를 끝까지 指導하여 준 韓國科學院의 裵道善교수와, 事例硏究를 알선하여주고 또 論文심사 과정에서 값있는 助言을 준 지도교수 李 南基박사 및 연구의 主題選定을 도와준 高麗大學의 金 永輝 교수께 진심으로 감사를 드린다.

참 고 문 헌

〔1〕 崔炳奎, 生産 在庫 및 人力管理計劃을 위한 모델, 1975. (미출판 석사 학위 논문)

〔2〕Bergstrom, G.L. and Smith, B.E."Multi-item production planning…An extension of the HMMS rules," *Management Science*, Vol.16, No. 10, June, 1970.

〔3〕 Bowman, E.H. "Production scheduling by the transportation method of linear programming," *Operations Research*, Vol.4, 1956

〔4〕 Bowman, E.H. "Consistancy and optimality in managerial decision making," Management Science, Vol. 9, No. 2, Oct., 1963.

〔5〕 Damon, W.W. and Schram, R. "A simultaneous decision model for production, marketing and finance," *Management Science*, Vol. 19, No. 2, Oct., 1972.

〔6〕 Goodman, D.A. "A goal programming approach to aggregate planning of production and work-force," *Management Science*, Vol. 13, No.

〔7〕 Goodman, D.A. "A new approach to scheduling aggregate production and work-force," *AIIE transaction*, Vol. 20, june, 1973.

[8] Hadly, G. *Non-linear programming and dynamic programming*, Addision Wesly, 1964.

[9] Hanssman, F. and Hess, S.W. "A linear programming approach to production and employment scheduling," *Managent Technology* Monograph, No. 1, Jan., 1960.

[10] Holt, C., Modigliani, F., Muth, J., and Simon, H. *Planning production, inventories, and work-force*, Prentice-Hall, 1960.

[11] Jones, C.H. "Parametric production planning," *Management Science*, Vol. 13, No. 11, Jul., 1967.

[12] Kriebel, C.H. "Coefficient estimation in quadratic programming models," *Management Science* Vol. 13, No. 8, Apr.,

[13] Lee, W.B. "Simulation testing of aggregate, production planning models in an implement ation methology," *Managment Science*, Vol. 20, No. 6, Feb., 1974.

[14] Panne, V.D. "Sensitivity analysis of coefficient estimation," *Management Science*, Vol. 9, Oct., 1962.

[15]Schwartz, B.L. "A new approach to stockout penaties," *Management Science*, Vol. 12, No. 12, Aug., 1966.

[16] Silver, E.A. "A tutorial on production smoothing and work-force balancing," *Operations Research*, Vol. 20, Nov-Dec., 1967.

[17] Simon, H.A. "On the application of servomechanism theory in the study of production control", *Econometrica*, Vol. 20, Apr., 1952.

[18] Taubert, W.H. "A search decision rule for the aggregate scheduling problem," *Management Science*, Vol. 14, No. 6., 1968.

[19] Vergin, R.C. "Production scheduling under seasonal demand," *Journal of I.E.*, May, 1966.