# 自己回歸模型의 應用的 制約性

金 俊 輔*

## I. 自己回歸係數의 傳統的 推定法

經濟的 循環의 규정이나 經濟豫測의 手段으로서 많이 쓰여지는 確率定差方程式體系로서의 自己回歸模型(autoregressive model)에 관해서는 理論의 精密化 方向에서 近者 많은 業績이 쌓여지고 있다.[1] 비교적 새로운 開拓分野란 점 또한 그 理由의 하나인 것 같다.

그러나 自己回歸模型의 現實的 利用에는 아직 難點이 많다. 특히 그 係數推定의 方式에 관한 限, 오히려 致命的 制約性이 그대로 남아 있다고 보는 데 바로 本稿의 起點이 있다.

우선 任意($p$次)의 自己回歸模型

$$x_t = \alpha_1 x_{t-1} + \alpha_2 x_{t-2} + \cdots\cdots + \alpha_p x_{t-p} + \alpha_0 + \varepsilon_t \tag{1}$$

을 생각하고, 각 係數 $\alpha$를 推定한다고 하자. 이에 관해서는 일찌기(1943年) 「만」(H.B. Mann)과 「왈드」(A. Wald)[2]에 의한 最尤推定值(maxinum likelihood estimate)의 誘導法과 그것의 體系的 證明이 나와 있다. 이 土臺는 오늘날 흔히 취하는 바와 같이 (i) 確率誤差(衝擊) $\varepsilon_t$가 時間 $t$에 관하여 獨立的으로 同一分布를 취한다는 것(自己相關이나 系列相關은 없다는 것), (ii) 特性方程式

$$\rho^p - \alpha_1 \rho^{p-1} - \cdots\cdots - \alpha_p = 0 \tag{2}$$

의 모든 根($\rho$)의 絕對值가 1보다 작다는 것(安定條件), (iii) 그리고 $\varepsilon_t$의 모든 「모멘트」(moment)는 有限으로서 存在한다는 세가지 假定으로 되어있다. 그럼으로써 變數間의 非獨

---

* 高麗大學校 敎授

1) M. Kendall and A. Stuart, *The Advanced Theory of Statistics*, Vol. 3, New York: Hafner Pub., 1966, p. 476 以後, H. Wold, *A Study in the Analysis of Stationary Time Series*, 2nd ed., Stockholm: Almqvist and Wicksell, 1954, Chaps. 3~4, 그리고 G. Tintner, *Econometrics*, New York: Wiley, 1954, p. 255 以後 참조.

2) H. B. Mann and A. Wald, "On the Statistical Treatment of Linear Stochastic Difference Equations," *Econometrica*, Vol. 11 (1943), 3~4. (J. Hooper and M. Nerlove, *Selected Readings in Econometrics from Econometrica*, 1970,)

立性에도 불구하고, 一般의 最尤推定法에 의한 $\alpha$의 推定値가 大標本의 경우 一致推定値로서 얻어진다는 것, 그리고 이 推定値는 最小自乘法에 의한 것과 一致된다는 점, 따라서 最小自乘法을 그대로 適用하여 係數推定을 할 수 있다는 점이 그 요점으로 되어 있다. 그리하여 傳統的 自己回歸模型의 係數推定인즉 基本的으로 이에 따르고 있다. 다만 小標本의 경우 旣決 獨立變數 사이의 相關性(multicollinearity)이라든지, 誤差項 $\varepsilon_t$의 系列相關性이 檢出되는 경우에 偏向性(bias)을 어떻게 處理할 것인가에 대한 方法이 여러모로 硏究되고 있는 실정이다.

그러면 위와같은 分析의 方式에 어떠한 本質的 缺陷은 없는 것인가?

## Ⅱ. 安定條件의 假定과 誤差項

우리는 우선 위의 傳統的 自己回歸分析이 現實的 應用面에 있어서 매우 어려운 假定위에서 있다는 점을 指目하지 않을 수 없다. 첫째로 一般의 線型模型에서 볼 수 없는 그것의 安定條件(假定 ii)이 곧 誤差項 $\varepsilon_t$의 分布에 대하여 뜻하지 않은 制約을 가져오게 된다는 점이 커다란 關心事이다.

지금 式 (1)의 가장 간단한 경우로서 1次의 自己回歸模型

$$x_t = \alpha x_{t-1} + \varepsilon_t \tag{3}$$

을 들어서 위의 關係를 살펴 볼 때 $x_t$가 擴散하지 않고 安定的으로 進行하는 條件은 위의 假定(ii) 밑에 $|\alpha|<1$이라는 것임을 우리는 알고 있다. 그리고 2次의 경우라면

$$x_t = \alpha_1 x_{t-1} + \alpha_2 x_{t-2} + \varepsilon_t \tag{4}$$

로서 그것의 安定條件은 주지하는 바와 같이 $|\alpha_1| \leqq 2$, $-1 \leqq \alpha_2 < 0$으로 되어 있다. 따라서 自己回歸模型이 취하는 係數의 範圍는 어느 정도 制約되어 있어서 당초 式 (3)이나 式 (4)가 符合될 것이 엿보이는 時差資料에 있어서도 이들 式이 반드시 適用될 수 있을는지 당장 保障은 없다. 구태어 式 (3)을 들어서 볼 때 그것은 $|\alpha|<1$의 限度에서 구체적으로 成立되는 만큼 $\varepsilon_t$의 分布에 어떠한 制約을 주게 마련이다. 즉 $x_t$의 定常的 變動이 비록 위의 條件에 一般的으로 適合되는 경향에 있다 하더라도 現實的으로 擴散的 傾向性을 갖는 $x_t$의 進行이 그 가운데 없을 수 없다. 그렇다면 결국 구체적으로 얻어진 自己回歸模型은 처음부터 統計資料를 條件에 맞는 것으로 選擇하여 놓고 보지 않는 限, 있을 수 있는 당초의 $\varepsilon_t$(따라서 $x_t$)의 分布를 그만큼 制約한 셈이다.

물론 우리는 당초부터 위의 條件에 알맞는 統計資料를 假定할 수 없지 않다. 사실 傳統的 理論은 그렇게 보고 模型을 設定하였다고 보아진다. 그러나 이 또한 반드시 現實的 分析

法이라 볼 수 없을 뿐만 아니라 條件의 制約이 붙어 있는 限, 資料를 끝까지 그에 맞추어 놓아야 하는 것이 분명한 사실이다.

그렇다면 理論的으로나 구체적 應用面에 있어서 일단 設定된 自己回歸模型의 誤差項 $\varepsilon_t$가 위의 安定條件에 의하여 制約된다는 관계는 不可避한 特性이라고 볼 수 밖에 없다. 따라서 처음부터 獨立的 自己分布(假定 i)를 취하였다 하더라도 制約된 模型에서 과연 그러한 假定이 그대로 지켜질 것인가, 이점이 問題가 아닐 수 없다. 그리하여 만약 그 分布形式이 처음부터 非自由的인 것이라 하면 그것은 위의 安定條件에 基因하는 歪曲 現象이므로 性質上 그 分布 역시 獨立變數 $x_{t-1}$과 전적으로 無關하다 할 수 없다. 여기에 獨立變數와 誤差 $\varepsilon_t$가 表現上 時差를 달리하여 相互獨立的으로 보이는 가운데 있어서도 內面的으로 連結되는 契機는 숨어 있다고 우리는 보는 것이다.

더욱 주목되는 것은 위의 安定條件이 따르게 될 때 당초 誤差項 $\varepsilon_t$ 사이에 있을 수 있는 系列相關性이 높아질 수 있다는 점이다. 이 점 처음 假定(ii)와 (i) 사이에 相衝性을 加重하는 關係이다. 즉 假定(i)은 처음부터 誤差項 사이에 系列相關이 없다고 본 것이지만 그것은 사실상 어려운 假定일 뿐 아니라, 安定條件의 요구에 따른 資料의 制約은 필경 同質的 要因의 集約化를 가져옴으로써 事態의 進展을 가져올 수 있다. 이러한 경향은 비단 誤差項 사이에서 볼 수 있을 뿐 아니라 獨立變數와 誤差項 사이에 있어서도 相關度를 높히는 契機로서 나타나는 性質이다.

그 밖에 自己回歸의 경우 各種 變數 사이에 系列相關은 분명하므로 이들 構成인 誤差項 사이의 相關性은 적극적으로 인정된다. 왜냐하면 원래 위에서 $\varepsilon_t$系列과 $x_t$系列은 분명히 相關關係에 놓여 있는 바, 지금 만약 $x_t$와 $x_{t-1}$ 사이에 系列相關이 인정된다면 돌아가서 $\varepsilon_t$와 $\varepsilon_{t-1}$ 사이의 相關性은 數理上 自明한 까닭이다.

우리는 自己回歸模型이 더욱 安定條件下에 誤差의 集積現象을 보이는 가운데 이들이 內生變數의 內容을 꾸미고 있다는 사정을 알 수 있다. 즉 式 (3)에서

$$\begin{aligned} x_t &= \alpha x_{t-1} + \varepsilon_t \\ &= \varepsilon_t + \alpha(\alpha x_{t-2} + \varepsilon_{t-1}) \\ &= \varepsilon_t + \alpha\varepsilon_{t-1} + \alpha^2(x_{t-3} + \varepsilon_{t-2}) \\ &= \varepsilon_t + \alpha\varepsilon_{t-1} + \alpha^2\varepsilon_{t-2} + \alpha^3\varepsilon_{t-3} + \cdots\cdots \end{aligned} \tag{5}$$

그리고 式 (4)에서 또한 결과만을 보건대[1] 다음과 같다.

$$x_t = \varepsilon_t + \sum_{j=2}^{\infty} k_j \varepsilon_{t-j+1} \tag{6}$$

1) M. Kendall, *The Advanced Theory of Statistics*, Vol. 2, New York: Hafner Pub., 1946, p. 414ff.

단, $k_j=\dfrac{2}{\sqrt{4\alpha_2-\alpha_1^2}}R^j\sin\theta_j$, $R=\sqrt{\alpha_2}<1$, $\cos\theta=-\alpha_1/2\sqrt{\alpha_2}$

## Ⅲ. 衝擊要因 및 獨立變數의 屬性

自己回歸模型이 위에서와 같이 처음부터 單一方程式으로 表現되는 경우이거나 또는 어떠한 聯立方程式體系에서 誘導되는 경우[1]를 가릴것 없이 傳統的 模型에서의 誤差項은 獨立性이 假定된 가운데 外生變數的 性格이 짙다. 그것을 衝擊(shock)이라 부르는 所以이다. 그것($\varepsilon_t$)은 두말할 것 없이 未知의 確率的 變數로서 從屬變數의 原因이 될 지언정 그 反對는 되지 않는다는 것이고 그 原因的 要素의 進行이 累積되어 바로 時系列($x_t$)의 循環的 動態를 形成한다고 보는 것이 (式 (5) 참조) 곧 이 理論體系의 特徵이다.

그러나 自己回歸型의 制約條件은 고사하고 위에서 본 바와 같이 內生的 要因을 포함하지 않는 衝擊 그것이 集積되어 內生的 要因($x_t$)이 된다는 데는 사실상 論理的 難點이 介在한다. 더욱 그들이 內生的 效果를 가져오는 素因이라 한다 하더라도 끝까지 旣存의 自己集積體인 內生的 要因에 의하여 影響을 받을 수 없다는 假定은 無理이다. 따라서 위의 一般的 自己回歸模型을 생각할 때 誤差項 $\varepsilon_t$를 外生的인 것으로만 본다는 分析은 現實的으로 不安하다. 무엇보다 $x_t$를 설명함에 있어서 時差的 獨立變數만으로써 內生的 關係가 분명히 주어지는 에는 거의 없다고 보아지기 때문이다.

그렇다면 비록 衝擊이라 하지만 그 가운데는 반드시 內生的 要因이 內包되어 있다고 보는 것이 現實的이라 할 수 있다. 따라서 獨立變數와의 相關性이나 自己相關性은 도저히 否認할 수 없다고 보는 것이 또한 당연한 論理이다.

물론 自己回歸模型의 次數가 높아짐에 따라서 衝擊에 內包되는 內生變數的 效能이 희박해 질 것은 당연하다. 사실 從屬變數는 대부분 처음 獨立變數의 影響力에 의하여 크게 규제되는 性向이 있다. 그러나 생각컨대 旣決變數 $x_{t-p}$와 誤差項 $\varepsilon_t$ 사이에 完全한 無相關性을 보일만큼 內生變數의 要因이 $\varepsilon_t$ 안에 內包되어 있지 않다고 끝까지 보는 것은 速斷에 불과하다. 이미 보아온 바, 安定條件의 要求에서도 總體的 相關性이 附與될 수 있거니와 적어도 있을 수 있는 $x_{t-p-1}$와 $x_{t-p}$ 사이에는 원래 $x_t$와 $x_{t-1}$ 사이에서 본 바와 같은 相關性이 認定되는 까닭이다.

물론 獨立變數와 衝擊 사이에 다소의 相關性이 있다 하더라도 從屬變數를 支配하는 大勢는 支配的 獨立變數와의 關係에서 주어지는 점을 우리는 알고 있다. 그러나 이 또한 獨立變

1) H. Wold, *Demand Analysis; A Study in Econometrics*, New York: Wiley, 1953, p. 48.
R. Benzel and H. Wold, "On Statistical Demand Analysis from the View Point of Simutaneous Equations," *Skandinavisk Aktuarietidskrift*, Vol. 29 (1946).

數간의 相關性이 희박한 경우에 타당성이 是認되는 命題일 뿐이다. 傳統的인 自己回歸模型에 관한 限, 獨立變數간의 非獨立性은 理論上 從屬變數와의 그것과 本質的으로 다름이 없다. 여기에 이 模型의 難點이 새삼 指目되는 관계이다. 이 때에 더구나 誤差項사이의 系列相關이 一般이라는 性格을 아울러 놓고 볼 때, 傳統的 自己回歸模型이 存立하는 假定의 土臺는 매우 不安定하다. 이점 本來의 假定에도 불구하고, 誤差項의 獨立性에 관련하여 특별히 이 模型에 대한 偏向性[1]이 많이 論議되는 所以이다.

## Ⅳ. 結　論

우리는 自己回歸模型의 典型的 分析法으로서 처음에 提示한 「만」과 「왈드」 등의 假定이 現實에 비추어 너무나 단순함을 지적하지 않을 수 없다. 오히려 理論的 矛盾性과 더불어 非現實性이 指目되는 내용이다. 즉,

1) 주어진 時系列資料에 安定條件을 갖는 그들 自己回歸模型을 適用하려 할 때 그 條件에 따른 誤差項($\varepsilon_t$)의 獨立的 分布는 必然的으로 制約된다. (이 점 그들의 假定은 相互間에 本質的으로 背反된다.)

처음부터 安定條件에 부합된 資料만을 取擇하였을 때 스스로 統計資料의 制約을 가져온다.

2) 위의 制約條件(安定條件)은 필경 誤差의 系列相關性이나 誤差項과 獨立變數間의 相關度를 높일 可能性을 보여준다.

3) 獨立變數間의 非獨立性은 처음부터 本質的인 것이나 이들이 誤差項間의 系列相關을 必然的으로 가져온다.

물론 우리는 단순한 最小自乘法의 回歸推定이 가져온 偏向의 規制法을 알고 있다.[2] 그러나 적어도 一般의 經濟統計에 관한 限, 資料의 取得難과 더불어 위의 制約性은 거의 傳統的 自己回歸分析이 有效할 것인지 크게 疑問視되는 정도이다. 따라서 바야흐로 偏向의 단순한 除去法이 아니라 이 模型에 대한 根本的 改新의 構想이 우리에게 요구되고 있는 것도 같다. 이 점이 바로 우리의 宿題인 동시에 本稿의 結論이다.

---

1) L. Hurwicz, "Bias in Time Series," *Statistical Inference in Dynamic Economic Models*, ed. by Koopmans, New York: Wiley, 1950, p. 365.

2) J. Johnston, *Econometric Methods*, 2nd ed., New York: McGraw-Hill, 1963, p. 303.

## 參考文獻


[1] Benzel, R., and Wold, H., "On Statistical Demand Analysis from the View Point of Simultineous Equations," *Skandinavisk Aktuarietitidskrift*, Vol. 29 (1946).

[2] Hurwicz, L., "Bias in Time Series," *Statistical Inference in Dynamic Models*, ed. by Koopmans, New York: Wiley, 1950.

[3] Johnston, J., *Econometric Methods*, 2nd ed., New York: McGraw-Hill, 1963.

[4] Kendall, M., *The Advanced Theory of Statistics*, Vol. 2, New York: Hafner, 1946.

[5] Kendall, M. and Stuart, A., *The Advanced Theory of Statistics*, Vol. 3, New York: Hafner, 1966.

[6] Mann, H. B. and Wald, A.,"On the Statistical Treatment of Linear Stochastic Difference Equations," *Econometrica*, Vol. 11 (1943), 3~4.

[7] Tintner, G., *Econometrics*, New York: Wiley, 1954.

[8] Wold, H., *A Study in the Analysis of Stationary Time Series*, 2nd ed., Stockholm: Almquist and Wiksell, 1954.

[9] Wold, H., *Demand Analysis; A Study in Econometrics*, New York: Wiley, 1953.


## SUMMARY

# Some Limitations in the Use of Traditional Autoregressive Models

J. B. Kim*

In the use of a traditional autoregressive linear equation, there are a number of obvious limitations which may not be conventionally neglected. This paper attempts to disclose some of them with respect to the assumptions made about error terms, conditions of convergence of the equation, properties of estimators, etc.

* Professor, Korea University