

<論文>

解析的 解法에 의한 흐름의 豫測

Flow Prediction by Analytical Response Function

尹 泰 勳
Yoon, Tae Hoon

ABSTRACT

A linear and optimum linear systems have been reviewed in some detail. The procedure of the solution of the Wiener-Hopf equation analytically in time domain is given and the prediction of downstream outflow for given upstream inflow are made. The predicted results are fairly satisfactory. The intended physical interpretation of the analytical solution could be descriptable but it was found that the evaluation of the parameters of the response function is rather difficult due to complicity and a great deal of works.

1. 序 論

많은 物理的 顯象을 임의의 境界內로 압축하여 생각 할때 이 境界의 一部에서 外的인 변화가 일어나면 이 境界의 다른 부분에서 이 外的인 변화에 대한 反應이 있게된다. 따라서 이러한 境界를 하나의 系로 볼수 있으며 外的변화는 이 系의 入力이 되고 反應은 出力이 된다.

電子工學에서 入出力 信號에 대한 回路, 原料와 生産에 대한 工場, 降雨와 流出에 대한 流域, 上流端流入과 下流端流出에 대한 河道區間 등은 이러한 系의 例가 될 수 있다. 實際問題에서는 어떤 系에 주어진 入力에 대하여 出力이 어떻게 되는지 豫測하는 것이 대단히 중요한 문제다.

그러나 이러한 系를 實크기와 상태로 再現하는 것이 非經濟的 내지 不可能하므로 系를 數學的인 模型으로 대표하여 주어진 入力에 대하여 出力을 豫測하는 방법을 택하고 있다. 따라서 주어진 入力 $x_i(t)$ 에 대한 數學的인 模型으로부터 얻어지는 系의 出力 $x_o(t)$ 가 실제에 있어서 요구되는 出力 $x_a(t)$ 에 같도록 또는 $e(t) = x_a(t) - X_o(t)$ 를 최소화하는 系 즉 最適系가 요망된다. 最適系를 구하는데 物理的 顯象에 대한 系가 線形이면 문제는 비교적 간단하나 많은 부분이 非線形이 되어 最適系를 求하는 문제가 대단히 어렵게된다. 水文分野

에서 이러한 非線形 문제가 다수 취급되어 왔으나 어려움을 피하기 위하여 주로 線形으로 假定하여 취급되어 왔다. 河道의 흐름을 追跡하는데 본 논문에서는 河道의 흐름계를 線形으로 假定하여 흐름계의 構造와 物理的인 意味를 체득하는데 도움을 기하기 위하여 解析的 解法이 試圖된다.

2. 線形系의 再考

線形^{3,6,13,14}과 非線形^{1,7,9,11,12,15}에 대한 文獻이 다수 소개되었으나 그 중요성으로 보아 線形에 관하여 선형으로 간단히 기술된다. 線形系는 單位衝擊作用에 대한 反應으로 特性지워진다. 즉 時間領域에서 系가 어떤 函數로 정의될 때 線形系의 出力은 入力과 特性 函數 즉 應答函數의 項으로 나타낼 수 있으며 周波數 領域에서는 轉換函數의 項으로 된다. 單位面積의 직사각형 pulse로서 幅이 dt 높이는 無限大에 接近한다. 單位衝擊 $u(t)$ 는 dt 밖에서는 零이 되— $u(t)$ 가 $t=0$ 에 적용되므로 $t<0$ 에 대하여 出力을 갖는다는 것은 물리적으로 불가능하다. 즉 系는 初期에 정지상태에 있으므로 應答函數를 $h(t)$ 로 나타낼 때 식(1)의 성립이 필요하다(그림 1a).

$$h(t) = 0 \quad t < 0 \dots \dots \dots (1)$$

應答函數 $h(t)$ 가 系의 行爲를 특징지우는 例로 單位衝擊 $u(t)$ 의 적용이 $t=\sigma$ 만큼 遲延되면 $h(t)$ 도 똑같은 시간만큼 遲延된다. 즉 入力 $u(t-\sigma)$ 에 대한 出力은 $h(t-\sigma)$ 가 된다(그림 1b).

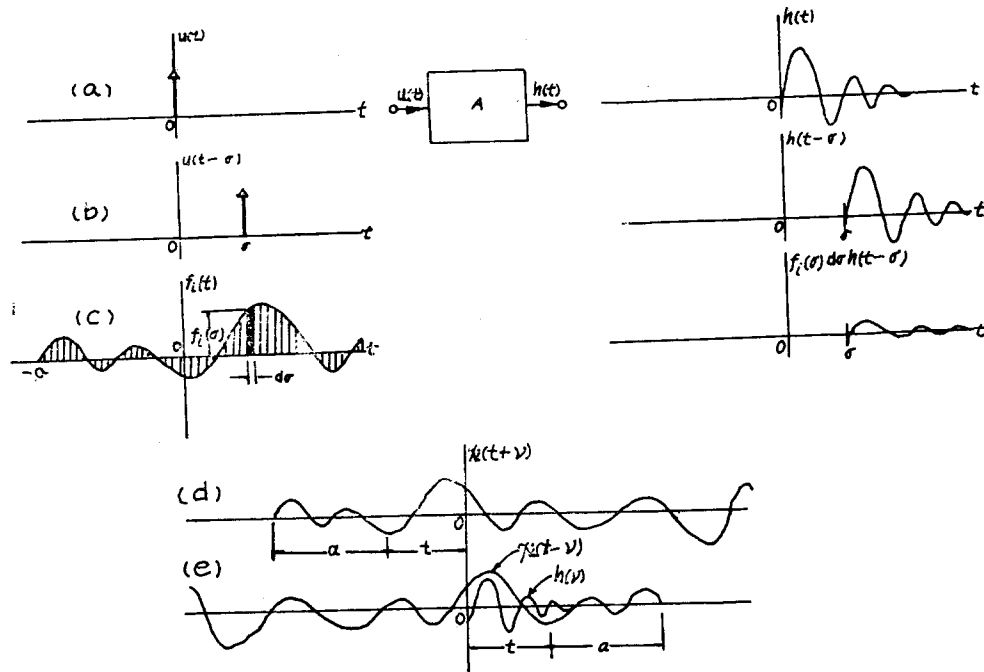


그림 1. 線形系의 重疊原理과 回積積分의 解析

여기서 時間的인 移動에서 系의 入出力 關係가 不變이 되는 사실이 주목되는데 이는 線形系의 基本條件이 되다. 그림 1c에 보인 바와 같이 周期, 非周期, 또는 無作爲函數로 構成되고 $t=-a$ 에서 시작하는 入力函數 $x_i(t)$ 를 생각한다. $t=\sigma$ 에서 幅 $d\sigma$ 높이 $x_i(\sigma)$ 인 單位衝擊에 대한 出力은 $h(t-\sigma)$ 가 되나 이는 면적이 $x_i(\sigma)d\sigma$ 인 無限小面積이므로 이에 대한 出力은 $x_i(\sigma)d\sigma h(t-\sigma)$ 가 되고 出力의 微分을 $dx_o(t)$ 로 표시하면

$$dx_o(t) = x_i(t) d\sigma h(t-\sigma) \dots \dots \dots (2)$$

出力은 衝擊의 面積 (또는 幅이 같을때 높이)에 比例하므로 入力を k 배하면 出力도 k 배된다. 이 사실이 重疊을 가능하게 하는 線形式의 성질로 線形系의 出力은 개개로 작용하는 入力에 의한 出力成分의 重첩으로 주어진다. 즉 連續的인 入力 $x_i(t)$ 에 대한 시간 t 에서의 出力 $x_o(t)$ 는

$$x_o(t) = \int_{-a}^t x_i(\sigma) h(t-\sigma) d\sigma \dots \dots \dots (3)$$

式 (3)은 入力과 單位衝擊應答函數項으로 線形系의 出力을 주는 回積積分이다. 式 (3)에서

$\nu = t - \sigma$ 로 놓으면

$$x_o(t) = \int_0^{t+a} h(\nu) x_i(t-\nu) d\nu \dots \dots \dots (4)$$

그림 1d의 $x_i(t+\nu)$ 는 그림 1c에서 시간 t 가 經過한

系의 入力으로 현재의 순간 $\nu=0$ 까지의 과거 기록이 되고 $\nu>0$ 에 대해 $x_i(t+\nu)$ 는 系에 아직 당도 하지 않은 入力의 未來의 값이다.

구간 $(0, t+a)$ 밖에서는 $h(\nu)x_i(t-\nu)$ 가 零이 됨이 주목된다. 따라서 變의상 積分限界를 $(-\infty, \infty)$ 로 하면 식 3, 4는

$$x_o(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\nu) x_i(t-\nu) d\nu \dots \dots \dots (5)$$

$$x_o(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x_i(\nu) h(t-\nu) d\nu \dots \dots \dots (6)$$

降雨流出 문제에서는 $h(t)$ 가 瞬間單位圖가 됨을 쉽게 알 수 있다⁴⁾.

實際로 問題가 되는것은 系의 特性을 지우는 應答函數 $h(t)$ 를 求하는 것으로 式 (6)에 Fourier, Laplace, Z變換에 의하여 다음과 같이 周波數領域에서의 $h(t)$ 즉 轉換函數 $H(w)$ 를 求한다⁵⁾. $x_i(t)$, $x_o(t)$, $h(t)$ 의 變換을 각각 $F_i(w)$, $F_o(w)$, $H(w)$ 로 표시하면

$$F_o(w) = H(w) \cdot F_i(w) \dots \dots \dots (7-a)$$

$$\text{또는 } H(w) = \frac{F_o(w)}{F_i(w)} \dots \dots \dots (7-b)$$

轉換函數 $H(w)$ 의 逆變換을 취하므로써 單位衝擊 應答函數 $h(t)$ 가 구해진다. 식 (7)은 入力이 周期 또는 非周期函數인 경우엔 적용 가능하나 無作爲函數는 變

換을 갖지 않으므로 入力이 無作爲函數인 경우에는 식 (7)에 의하여 $h(t)$ 를 구하는 것이 불가능하다. 따라서 이러한 경우에는 變換을 하기 전에 無作爲函數를 共分散函數로 變換하므로써 가능하다.

定義에 의하여 出力의 自己共分散函數는

$$\phi_{00}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x_0(t)x_0(t+\tau)dt \dots\dots(8)$$

式(8)에 式(5)를 대입하고 式(8)에서 x_0 대신에 x_i 를 대입하므로써 얻어지는 入力의 自己共分散함수 ϕ_{ii} 를 고려하여 정리하면

$$\phi_{00}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\nu)d\nu \int_{-\infty}^{\infty} h(\sigma)d\sigma \phi_{ii}(\tau+\nu-\sigma)\dots(9)$$

式(9)의 Fourier 변환을 취하여 정리하면

$$\Phi_{00}(w) = |H(w)|^2 \Phi_{ii}(w) \dots\dots\dots(10)$$

여기서 $\Phi_{00}(w)$, $\Phi_{ii}(w)$ 는 自己共分散函數의 Fourier 變換으로 定義되는 出力, 入力의 스펙트럼(power density spectrum)이다. 無作爲函數의 경우에는 相互共分散函數의 定理에 의하여도 $H(w)$ 를 구할 수 있다. 入出力 $x'(t)$ 와 $x_0(t)$ 의 相互共分散函數는

$$\phi_{i0}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-\infty}^{\infty} x_i(t)x_0(t+\tau)dt \dots\dots(11)$$

式(3-11)에 式(3-6)을 대입하고 入力 $x_i(t)$ 의 自己共分散函數 $\phi_{ii}(\tau)$ 를 고려하면

$$\phi_{i0}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\nu)\phi_{ii}(\tau-\nu)d\nu \dots\dots(12)$$

式(3-12)의 Fourier 變換을 취하면

$$\Phi_{i0}(w)\Phi_{ii}(w) \dots\dots\dots(13)$$

여기서 $\Phi_{i0}(w)$ 는 入出力의 스펙트럼이다.

3. 最適線形系

系の 入力은 일반적으로 入力 자신과 雜音으로 구성된다. 즉 $x_i(t)+n(t)$ 여기서 $x_i(t)$ 와 $n(t)$ 는 定常無作爲過程이다. 雜音등의 이유로 線形系에서 出力으로 $x_i(t)$ 의 再現은 不可能하다. 그러나 이러한 이상적인 出力을 생각하여 이를 要求出力 $x_d(t)$ 라 하면 이는 실제에 있어서 出力으로의 觀測值가 되고 模型인 系の 出力을 $x_0(t)$ 로 나타내면 이들은 $e(t)$ 만큼 다르게 된다.

$$e(t) = x_0(t) - x_d(t) \dots\dots\dots(14)$$

$e(t)$ 를 最少로 하는 最適系가 要望되며 이러한 最適系를 誘導하는 基準으로 平均自乘誤差를 택하면 다음과 같다.

$$e^2(\bar{t}) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T [x_0(t) - x_d(t)]^2 dt \dots\dots(15)$$

식(5)를 대입하면

$$e^2(\bar{t}) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \int_{-T}^T h(\tau)x_i(t-\tau)dt - x_d(t) \dots\dots(16)$$

식(16)를 自己共分散函數 $\phi_{ii}(\tau)$ 와 相互共分散函數 $\phi_{i0}(\tau)$ 의 項으로 나타내면

$$e^2(\bar{t}) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)d\tau \int_{-\infty}^{\infty} h(\sigma)d\sigma \phi_{ii}(\tau-\sigma) - 2 \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)d\tau \phi_{i0}(T+\tau) + \phi_{i0}(0) \dots(17)$$

식(17)은 functional $e^2(\bar{t})$ 를 最少로 하는 h 를 구하는 문제이므로 變分原理를 적용하여 결과만 쓰면¹⁴⁾

$$\int_{-\infty}^{\infty} \eta(\tau) \left[\int_{-\infty}^{\infty} h(\sigma)\phi_{ii}(\tau-\sigma)d\sigma - \phi_{i0}(\tau) \right] d\tau = 0 \dots\dots(18)$$

여기서 $\eta(\tau)$ 는 微分可能한 함수이다. 따라서 []의 값이 0이 되어야 한다. 平均自乘誤差 functional $e^2(\bar{t})$ 가 單位衝擊應答函數 $h(t)$ 에 대하여 最少值를 갖기 위한 조건으로 구간 $\tau \geq 0$ 에서 다음 식이 성립되어야 한다.

$$\int_{-\infty}^{\infty} h(\sigma)\phi_{ii}(\tau)d\sigma - \phi_{i0}(\tau) = 0 \quad \tau \geq 0 \dots\dots(19)$$

식(19)는 Wiener-Hopf 식이며 이 식이 變分解析의 Lagrange 微分方程式임을 주지한다. 따라서 變分 $\eta(\tau)$ 의 계수가 0이 되는 사실은 더욱 명백해지고 식(1)의 조건에 따라 식(19)는 $\tau \geq 0$ 의 범위에서 유효하다.

식(19)의 解는 最適線形系를 의미하므로 最適系의 單位衝擊應答函數 eh_{opt} 를 쓰면

$$\phi_{i0}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} h_{opt}(\sigma)\phi_{ii}(\tau-\sigma)d\sigma \quad \tau \geq 0 \dots\dots(20)$$

식(20)의 오른쪽 項은 相互共分散 定理에 의하여 最適系의 出力共分散 $[\phi_{i0}(\tau)]_{h_{opt}}$ 와 같아야 한다.

즉

$$\phi_{i0}(\tau) = [\phi_{i0}(\tau)]_{h_{opt}} \quad \tau \geq 0 \dots\dots(21)$$

그러나 $[\phi_{i0}(\tau)]_{h_{opt}}$ 의 범위는 $(-\infty, \infty)$ 이므로 식(21)은 식(20)과 다르게 되고 또한 식(20)이 回路積分이지만 Fourier 변환을 취하는 것이 不可能하므로 식(21)에서와 같이 最適系를 구하는 것이 가능하지 않다.

4. Wiener-Hopf 積分方程式의 解

副題目

Wiener의 스펙트럼因數積(Wiener-spectrum factorization)에 의하여 주어지는 식(20)이 解인 轉換函數(周波數領域)의 이해를 돕기 위하여 시간 t 이전의 지식으로부터 시간 $(t+T)$ 에서 예측하는 문제를 고려한다. 白色雜音을 入力으로 하고 그의 出力이 入力記錄 $x(t)$ 의 스펙트럼 $\Phi_{ii}(w)$ 와 같은 스펙트럼을 갖는 필터 소위 shaping filter를 생각한다. 이 shaping의 filter의 轉換函數를 $H_i(w)$, 이에 대응하는 應答函數를 $h_i(t)$ 이라 한다. 그러면 $H_i^{-1}(w)$ 에 入力 $x(t)$ 를 통과시키면 白色雜音을 얻게 된다. 따라서 문제는 $x(t+T)$ 를 구하기 위하여 이러한 白色雜音에 적용할 最適系를 찾

는 것이 된다. 이러한 最適系의 應答函數를 $h_2(t)$ 로 나타내면¹³⁾

$$h_2(t) = \begin{cases} h_1(t+T) & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

$h_2(t)$ 에 대응하는 轉換函數를 $H_2(w)$ 로 나타내면 이 $H_2(w)$ 는 $x(t)$ 를 入力으로하는 $H_1^{-1}(w)$ 에 의하여 發生되는 白色雜音에 대하여 작용한다. 따라서 $x(t)$ 에 적용되는 最適豫測 轉換函數 $H(w)$ 는 이들 결과를 종합하여 얻어진다.

$$H(w) = \frac{1}{H_1(w)} H_2(w) \dots \dots \dots (23)$$

$H(w)$ 는 周波數領域에서 最適系의 일반형이므로 식(20)의 周波數領域에서의 解도 식(23)의 型으로 주어짐을 예견할 수 있다. 그러면 식(20)의 解를 얻는 과정이 간단히 기술된다.

副題目 Wiener-Hopf 식의 周波數領域解 식(19)로부터 다음과 같이 $d(t)$ 를 정의하면

$$d(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h_{opt}(\sigma) \phi_{ii}(\tau - \sigma) d\tau \quad \phi_{id}(\tau) \tau \geq 0 \dots (24)$$

식(24)의 Fourier 變換을 취하면

$$D(w) = H(w) \phi_{ii}(w) - \phi_{id}(w) \dots \dots \dots (25)$$

식(20)으로부터 $\tau \geq 0$ 에 대하여 $d(\tau) = 0$ 임을 필요로 하며 이는 $D(w)$ 가 上半平面에서 極을 갖지 않음을 의미한다.

여기서 $\phi_{id}(w)$ 는 入力과 要求出力과의 相互스펙트럼이고 $\phi_{ii}(w)$ 는 入力의 自己스펙트럼이다.

$$\phi_{ii}(w) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \phi_{ii}(\tau) e^{-i w \tau} d\tau \dots \dots \dots (26)$$

$$\phi_{id}(w) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \phi_{id}(\tau) e^{-i w \tau} d\tau \dots \dots \dots (27)$$

自己 스펙트럼 $\phi_{ii}(w)$ 를 復素數 平面의 上半平面에 極과 零을 갖는 $\phi_{ii}^+(w)$ 와 下半平面에 極과 零을 갖는 $\phi_{ii}^-(w)$ 의 두 成分의 因數積으로 나타내면 식(25)는 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\frac{D(w)}{\phi_{ii}^-(w)} = H(w) \phi_{ii}^+(w) - \frac{\phi_{id}(w)}{\phi_{ii}^-(w)} \dots \dots \dots (28)$$

따라서 $\frac{D(w)}{\phi_{ii}^-(w)}$ 는 下半平面에서만 極을 갖게 되므로 右項 $H(w) \phi_{ii}^+(w) - \frac{\phi_{id}(w)}{\phi_{ii}^-(w)}$ 는 上半平面에서 極을 갖지 않게 된다. 그러나 $H(w) \phi_{ii}^+(w)$ 는 上半平面에서만 極을 갖으므로 $\frac{\phi_{id}(w)}{\phi_{ii}^-(w)}$ 의 partial fraction expansion에서 上半平面에서만 極을 갖는 項을 $\left\{ \frac{\phi_{id}}{\phi_{ii}} \right\}_{UHP}$ 로 표시하면 이는 $H(w) \phi_{ii}^+(w)$ 와 같아야 한다. 따라서 $H(w)$ 는 다음과 같이 주어진다.

$$H(w) = \frac{1}{\phi_{ii}(w)} \left\{ \frac{\phi_{id}(w)}{\phi_{ii}^-(w)} \right\}_{UHP} \dots \dots \dots (29)$$

[]_{UHP}의 逆變換을 $h_2(\tau)$ 로 나타내면

$$h_2(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\phi_{id}(w)}{\phi_{ii}^-(w)} e^{i w \tau} dw \dots \dots \dots (30)$$

따라서 식(29)는

$$H(w) = \frac{1}{2\pi \phi_{ii}^-(w)} \int_0^{\infty} h_2(\tau) e^{-i w \tau} d\tau$$

$$\text{또는 } H(w) = \frac{1}{2\pi \phi_{ii}^-(w)} \int_0^{\infty} e^{-i w \tau} d\tau \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\phi_{id}(w)}{\phi_{ii}^-(w)} e^{i w \tau} dw \dots \dots \dots (31)$$

식(31)은 일반해인 식(23)과 동일한 형임을 알 수 있으며 식(20)의 周波數領域의 解이다¹³⁾.

실제 모든 水文記錄은 時間領域이므로 식(31)을 적용 가능하도록 하기 위하여 時間領域으로 變하는 것이 필요하며 降雨流出의 경우는 Hino¹⁰⁾에 의하여 취급되었다. 식(31)의 積分을 수행하기 위해서는 스펙트럼이 有理函數로 주어지는 것이 요구된다. 실제 문제에서는 Fourier 變換을 취해서 有理函數가 되도록 共分散函數를 구하는 것이 편리하다. 이러한 성질의 共分散函數는 指數函數나 指數의 乘積으로 減衰하는 餘弦函數로 주어진다 즉 指數函數로 주어지는 共分散數의 스펙트럼은 有理函數이다. 이러한 指數函數는 다음과 같은 형을 취한다.

$$f(t) \approx C_1 \mu_1^t + C_2 \mu_2^t + \dots \dots \dots C_n \mu_n^t \dots \dots \dots (32)$$

$$\mu_k = e^{a_k} \dots \dots \dots (33)$$

일반적으로 C 와 μ 가 다같이 未知이고 이들을 prony 方法(8)로 구해진다. μ_k 의 값이 負數이거나 復素數인 경우는 스펙트럼을 因數積으로 나타내는 것이 매우 복잡하거나 불가능하게 되므로 共分散函數로부터 curve fitting에 의하여 直接 구하는 것이 효과적이다. 식(32)에 의한 共分散函數가 다음과 같이 구해진다

$$\phi_{ii}(\tau) = \sum_{i=1}^n A_i e^{-a_i |\tau|} \dots \dots \dots (34)$$

$$\phi_{id}(\tau) = \sum_{i=1}^n B_i e^{-b_i \tau} \dots \dots \dots (\tau > 0) \dots \dots \dots (35)$$

흐름 追跡의 경우 식(34)는 모든 τ 에 대하여 成立되는데 반하여 식(35)는 $\tau > 0$ 에 대해서만 성립됨이 주목된다. 여기서 A, a, B, b ,는 상수이고 n 은 定數로서 項수를 결정하는 項의 數로서 정해진다. 相互共分散函數 $\phi_{id}(\tau)$ 는 다음과 같은 이유로 간단해진다.

① ϕ_{id} 의 最大値는 $\tau=0$ 에서 일어나며 특히 日流量 記錄에서 이 사실이 明白하게 된다.

② $\tau \geq 0$ 의 領域에서만 Wiener-Hopf 식이 존재하므로 $\tau < 0$ 에 대해서는 ϕ_{id} 를 고려할 필요가 없다.

ϕ_{ii}, ϕ_{id} 의 Fourier 變換을 구하면 다음과 같은 스펙트럼을 얻는다.

$$\Phi_{ii}(w) = \frac{1}{\pi} \sum_{i=1}^n \frac{a_i A_i}{a_i^2 + w^2} \dots\dots\dots (36)$$

$$\Phi_{id}(w) = \frac{1}{2\pi} \sum_{i=1}^n \frac{B_i}{b_i + jw} \dots\dots\dots (37)$$

여기서 $\Phi_{ii}(w)$ 를 두개의 因數積으로 나타내면 ($\Phi_{ii}(w)$ 의 物理的으로 實現性部分을 $\Phi_{ii}^+(w)$ 에 부여한다)

$$\Phi_{ii}(w) = \Phi_{ii}^+(w) \Phi_{ii}^-(w) \dots\dots\dots (38)$$

$$\Phi_{ii}^+(w) = \sum_{i=1}^n \frac{\sqrt{a_i A_i}}{\sqrt{\pi} (a_i + jw)} \dots\dots\dots (39)$$

$$\Phi_{ii}^-(w) = \sum_{i=1}^n \frac{\sqrt{a_i A_i}}{\sqrt{\pi} (a_i - jw)} \dots\dots\dots (40)$$

식 (38) (39) (40)을 대입하여 정리하면 식(31)은

$$H(w) = \sum_{i=1}^n \frac{B_i(a_i + jw)}{4\pi a_i A_i} \int_0^\infty e^{-jw\tau} d\tau \int_{-\infty}^\infty \frac{a_i - ju}{b_i + ju} e^{ju(\tau+\tau')} du \dots\dots\dots (41)$$

物理的實現性에 따라 식(41)의 첫째 積分의 下限積分限界는 豫測期間 T로 되며 식(31)의 積分은 Residue 定理에 의하여 極에서의 Residue의 總에 $2\pi j$ 를 곱함으로 구해진다⁵⁾.

즉

$$H(w) = \sum_{i=1}^n \frac{B_i(a_i + b_i)e^{-2b_i\tau}}{2a_i A_i} \frac{a_i + jw}{b_i + jw} e^{-jw\tau} \dots\dots\dots (42)$$

時間領域에서 식(20)의 解인 最適系의 應答函數 $h(\tau)$ 는 轉換函數 식(42)의 逆變換으로 얻어진다.

$$\text{즉 } h(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty H(w) e^{jw\tau} dw \dots\dots\dots (43)$$

식(43)의 積分은 周積分에 의하여 上半平面的 極의 Residue($\tau \geq 0$)와 下半平面的 極의 Residue($\tau < 0$)의 總에 $2\pi j$ 를 곱함으로서 얻어진다. 下半平面에서는 極이 존재하지 않으므로 $h(\tau) = 0$ ($\tau < 0$)은 쉽게 알 수 있다.

$$h(\tau) = \begin{cases} 0 & \tau < 0 \\ \sum_{i=1}^n \frac{a_i e^{-2b_i\tau}}{2} \frac{B_i}{A_i} \left(1 - \left(\frac{b_i}{a_i}\right)^2\right) e^{-b_i\tau} & \tau \geq 0 \end{cases} \dots\dots\dots (44)$$

또는

$$h(\tau) = \begin{cases} 0 & \tau < 0 \\ \sum_{i=1}^n \frac{(1 - (b_i/a_i)^2) e^{-2b_i\tau}}{2A_i/a_i} \phi_{id}(\tau) & \tau \geq 0 \end{cases} \dots\dots\dots (45)$$

洪水波의 경우에는 상수 a, b 를 damping 또는 減衰因子로 볼 수 있으므로 b/a 를 追跡區間의 流入과 流出水文曲線의 尖頭의 遲滯나 크기의 函數로 표시 가능하다고 고려된다.

$$\phi_{ii}(0) = x_i^2(t) = A_0 e^{-a|t|} |_{\tau=0} = A \dots\dots\dots (46)$$

또한 식(46)을 고려하면 A는 流量의 平均自乘을 나타내므로 B/A는 全期間에 대한 流入量과 流出量積의 平均과 流入량의 平均自乘과의 比가 된다. 따라서 B/A

는 追跡區間의 貯溜率의 函數로 나타낼 수 있을 것이다. 그러나 실제 流量記錄으로부터 b/a 와 B/A를 推定한다는 것은 많은 追跡區間의 結果를 要하므로 매우 어려운 일이다. 흐름 追跡에서는 系의 出力이 實際로 遲滯되거나 先行되는 것이 아니라 단순히 주어진 入力에 대한 系의 出力이므로 식(44), (45)의 $e^{-b\tau}$ 는 탈락된다.

5. 結果解析

錦江水系의 沃川—松浦區間을 흐름 追跡區間으로 선정하여 兩地點의 流量記錄으로부터 구한 自己共分散函數(沃川地點)과 相互共分散函數는 그림 (2)에 보인 바와 같으며 이들로부터 prony 方法에 의하여 구한 共分散函數는 다음과 같다.

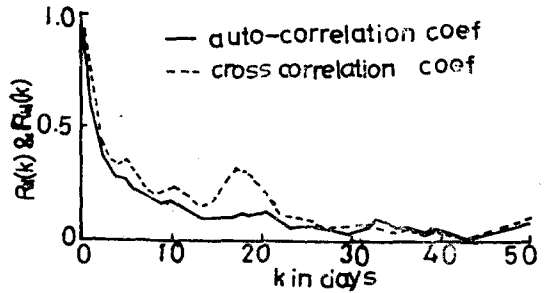


그림 2 自己 및 相互共分散函數

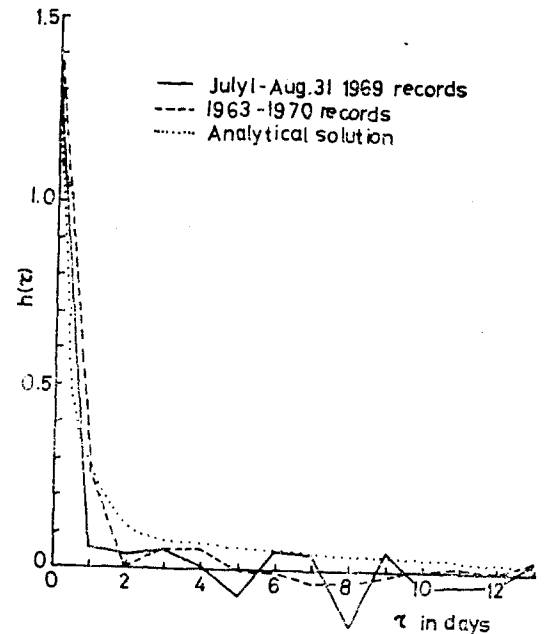


그림 3 應答函數

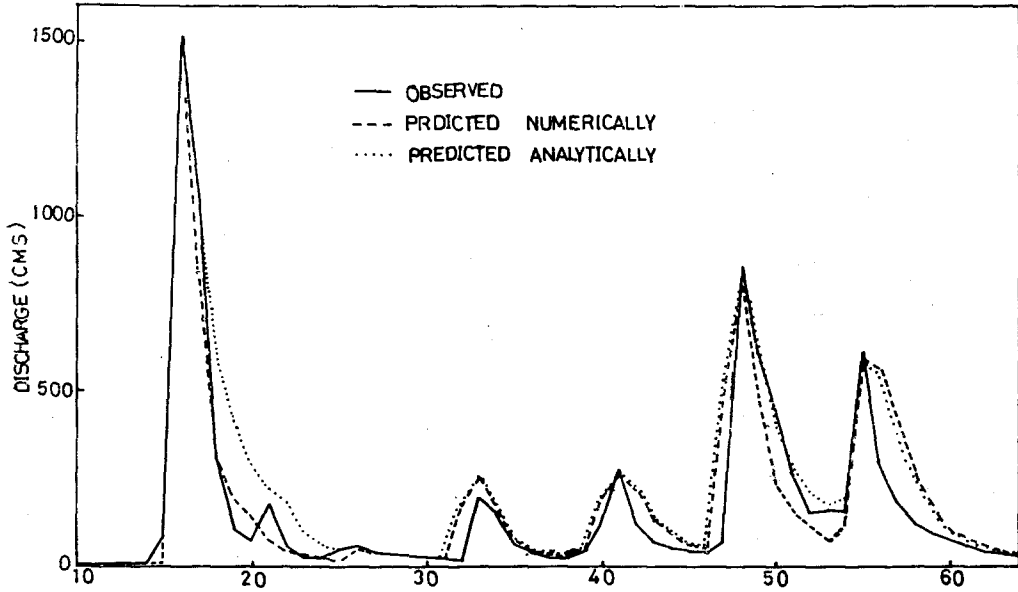


그림 4 흐름 추적 錦江水系 松浦地點

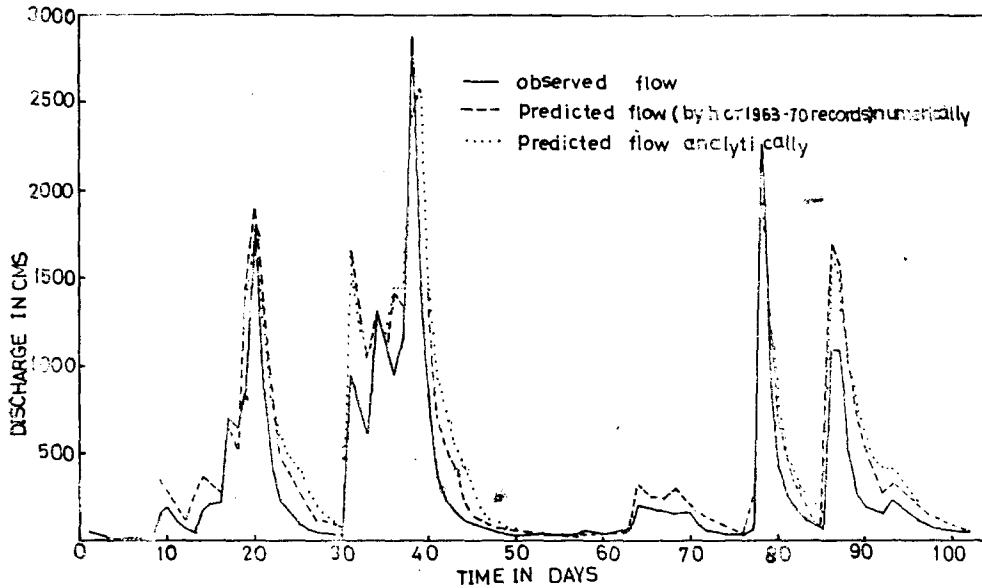


그림 5 흐름 추적 錦江水系 松浦地點

$$\phi_{ii}(\tau) = 0.55e^{-0.58\tau} + 0.449e^{-2.5\tau} \cos \pi\tau \dots (47)$$

$$\phi_{id}(\tau) = 0.253e^{-0.12\tau} + 0.743e^{-1.86\tau} + 0.00093e^{-0.89\tau} \cos \pi\tau \dots (48)$$

식(32)에서 μ 의 負數로 因하여 나타나는 自己共分散函數 $\phi_{ii}(\tau)$ 의 둘째項은 周波數領域에서 因數積을 복잡하게 하므로 curve fitting에 의하여 다음과 같이 구했다.

$$\phi_{ii}(\tau) = 0.43e^{-0.44\tau} + 0.572e^{-2.9\tau} \dots (49)$$

식(48)의 셋째항을 무시하면 식(36), (37)의 상수값

은 $A_1=0.43, A_2=0.572, a_1=-0.44, a_2=-2.9, B_1=0.253, B=0.743, b_1=-0.12, b_2=-1.86, n=2$ 로 되어 應答函數는 다음과 같다.

$$h(\tau) = \begin{cases} 0 & \tau < 0 \\ 0.1195e^{-0.122\tau} + 1.12e^{-1.86\tau} & \tau \geq 0 \end{cases} \dots (50)$$

식(50)에 의하여 應答函數 $h(\tau)$ 와 上流端에서의 流入量 $x_i(t)$ 를 回路積分 한으로서 下流端에서의 流出量 $x_d(t)$ 가 구해진다. 追跡區간의 흐름의 流計의特性和 數值解法에 의한 應答函數와 이에 의한 追跡結果과 주

어진 바가 있다¹⁶⁾.

식(50)으로 주어지는 應答函數가 數直解法에 의해 구한 應答函數와 같이 그림 3에 보인바와 같으며 이를 利用해서 흐름을 追跡한 結果가 그림 4, 5에 주어진다.

解析의 解에 의한 結果가 數直解法에 의한 結果보다 誤差가 많이 나타나는데 이는 數直解法에서는 共分散 函數가 그대로 完全히 活用되는데 반하여 解析的 解法에서는 指數函數로 近似시킴으로 인한 誤差에 의한 結果로 고려된다. 따라서 近似過程을 개선한다면 追跡 結果도 개선되리라 본다.

6. 結 論

Wiener-Hopf식의 解析的解法을 위한 線形系와 最適系가 記述되었으며 스펙트럼이 有理函數가 되도록 共分散函數를 指數函數로 나타내는 과정을 포함하는 解析的 解法은 數學的인 기교에 따라 結果를 개선할 수 있다고 고려되며 本研究에서의 結果는 實測值에 倂근사하다. 本研究의 보다 큰 意味는 흐름 追跡의 物理的 意味를 究明하고 또한 應答函數의 係數와 媒介變數를 흐름과 追跡區間河道의 特性과의 相關을 통하여 誘導하는 것으로 前者은 다소 說明됐다고 하겠으나 後者은 다수의 追跡區間을 필요로 하는 龐大한 作業量으로 시도되지 못했다.

參 考 文 獻

1. Amoroch, J.; Measure of Linearity of Hydrologic Systems, J. of Geo, Res, Vol.68, No.8, Apr. 1963, pp.2237-2249.
2. Bode, H.W. and Shannon, C.E.; A Simplified Derivation of Linear Least Square Smoothing and Prediction theory, Proc. IRE, Vol.38, 1950, pp.417-425.
3. Cheng D.K.; Analysis of Linear System, Addison Wesley. 1966.
4. Chow, V.T. Ed. Handbook of Applied Hydrology, McGraw Hill, N.Y. 1964, p.14-24.
5. Churchill, R.V.; Complex Variable and Applications McGraw-Hill, 1960.
6. Delleur J.W. and R.A.; Linear Systems Analysis in Hydrology-The Transform Approach, The Kernel Oscillations and the Effect of Noise, proc., of the 1st Bilateral U.S.-Japan Seminar in Hydrology, Systems Approach to Hydrology, Water Resources Pub., Fort Collins, Colo., 1971, pp.116-142.
7. Deutech. R.; Nonlinear Transformation of Random Process, Prentice, 1962.
8. Hildebrand, F.B.; Introduction to Numerical Analysis, McGraw-Hill, 1956, p.378.
9. Hino, M.; Runoff Forecasting by Variable Transformation, J. of Hydranlic Div., ASCE, Vol.96, No. Hy 4, Apr. 1970, pp.871-878.
10. Hino, M.; Runoff. Forecasts by Lineaur Prediction fillter, J. of Hydranlics Div., ASCE, Vol.96, No. Hy. 3, March 1970, pp.68-702.
11. Jacoby, S.L.S.; A Mathematical Model for Non-linear Hydrologic System, J. of Geo, Res., Vol.71, No.20 pp.4811-24, 1966.
12. Keefer, T.N. and McQuivey, R.S.; Multiple Linearization Flow Routing Model, J. of Hydraulic Div., ASCE, Vol.100, No.Hy 7, July 1974, pp.103-11046.
13. Laning J.H. and R.H. Battin; Random Process in Automatic Control, McGraw Hill, p.273, 1956.
14. Lee Y.W.; Statistical Theory of Communication, John Wiley and Sons, 1960.
15. Saaty, T.L. and J. Biam.; Nonlinear Mathematics, McGraw Hill, 1964.
16. 尹泰勳; 應答函數에 의한 흐름의 豫測, 大韓土木學會誌, 第23卷, 第1號, 1975年 3月 pp.69-77.