

有限要素法에 係한 Bracketed Connection 의 解析

任 尙 鎭* · 宋 俊 泰**

Analysis of Bracketed Connection by a Finite Element Method

by

S. J. Yim, J. T. Song

Abstract

Because of the simplicity in analysis and design of steel structure, the connections of members are assumed either as perfectly hinged or rigidly fixed.

However, a more economical design would result if the effect of restraint in connections were included in analyzing frame structure. From this point of view, stiffness matrices of a member with bracketed connections are presented in the form of the stiffness matrices for member with variable moment of inertia, modified by a correction matrix, whose elements are functions of fixity factors of the connections. To obtain fixity factors, the displacements and stress distribution of bracketed connections are investigated by using of the digital computer program, which have been developed to make computing time shorten and the round off errors smaller.

The relationship of moments and slip angle in bracketed connections are presented in the form of curves, which can be used in establishing a stiffness matrices for member with bracketed connections.

1. 結 論

一般的으로 뼈대構造物的 解析時 部材間의 連結點은 完全固定狀態 또는 힌지狀態로 假定하여 計算한다. 이때 連結部의 實際 拘束度(Degree of Restraint)를 反映할 수 있다면 보다 經濟的인 構造物的 設計가 可能하다. 이런 觀點에서 J.C. Ratheben 등은 連結部의 拘束度を 實驗 및 理論을 通하여 求한 後 이를 모우먼트 配分法(Moment Distribution Method) 등을 使用하여 實際 構造解析에 反映하였으나 [1][2][3], 最近, 매트릭스構造解析法의 進展에 따라 G.R. Monforton 과 T. S. Wu 는 拘束係數(Fixity Factor)로 이루어지는 修正 매트릭스로 Rigid Connection 을 갖는 部材의 剛性 매트릭스 $[K]$ 를 修正하므로써 拘束效果를 考慮한 構造解析을 遂行하였다[5]. 이때 모우먼트 M 과 相對回轉角 ϕ 는 彈性限界內에서 線形關係를 갖는 것으로 假定하였으나 K.M. Romstad 는 $M-\phi$ 曲線을 Bilinear Model 로 理想化하므로써 彈性限界 뿐만 아니라, 塑性變形까지 考慮하였다[6]. 그러나 위 研究들은 거의 Semi-Rigid

Connection에 局限된 것이었다. 따라서 本論文에서는 船舶構造物的 部材連結時 가장 普遍的으로 使用되는 Bracketed Connection 을 有限要素法에 依한 一次元 平面解析 Program 으로 解析하므로써 뼈대構造物的 嚴密 解析時 連結部의 實際 拘束度를 反映할 수 있도록 모우먼트와 相對回轉角의 關係曲線과 應力分布를 提示하였다.

2. 뼈대節點의 荷重-變形 關係

2.1. 部材變形과 相對回轉角

平面剛節點의 경우 部材端의 모우먼트는 다음 3 要素에 依해 構成된다.

- (1) 固定端 모우먼트
- (2) 部材端의 廻轉에 依한 모우먼트
- (3) 部材端들의 相對的인 變位에 依한 모우먼트

그러나 連結部의 構造狀態가 弱한 Semi-Rigid Connection 의 경우나 그 反對로 Bracket 또는 其他 補強板으로 補強되는 경우 連結部의 拘束度에 起因하는 제 4의 모우먼트를 考慮하여야 한다. Fig. 1 에서 보는 바와 같이 제 4의 모우먼트는 部材의 交叉點에서의

* 正會員, 서울大學校 工科大學

** 正會員, 서울大學校 大學院

Slopline의 相對回轉角 ϕ 에 起因하여, 위의 3가지 모우먼트에 從屬의이므로 重疊의 原理를 使用할 수 없다.

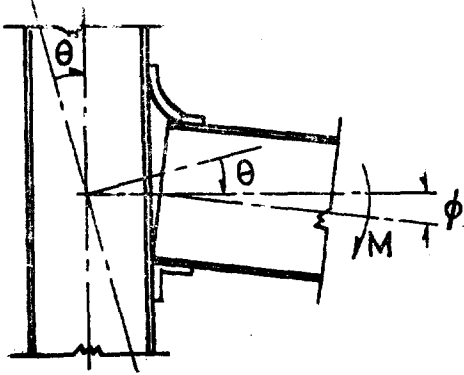


Fig. 1. Behavior of Semi-Rigid Connection

Semi-Rigid Connection의 경우 連結部를 完全剛節로 假定할 경우보다 ϕ 만큼 變形角의 크기가 增大되나 Bracketed Connection의 경우는 모우먼트에 依한 部材 變形角 θ 를 오히려 減少시킨다. 熔接된 Bracketed Connection의 경우 部材端은 完全固定으로 假定하는 것이 合理的이므로, 嚴密한 意味에서 連結部의 回轉中心에서 生기는 Slip Angle은 0이라고 볼 수 있다. 그러나 Bracket의 取付로 因하여 部材變形角 θ 의 減少가 實際 招來되므로 部材變形角의 減少量 ϕ 는 이미 Semi-Rigid Connection에 對해 定義한 相對回轉角 ϕ 와 그 效果만 反對일뿐 物理的 意味는 全的으로 同一하다. 따라서 Bracketed Connection의 相對回轉角 ϕ 는 다음과 같이 定義한다.

$$\phi = \theta_2 - \theta_1$$

θ_1 : 한 端이 固定된 Bracket 付部材의 Bracket 端에서 的 變形角

θ_2 : 均一斷面部材의 固定斷面으로부터 Bracket 端과 같은 거리인 점에서의 變形角

결국 彈性限界內에서 荷重과 變位는 一次 線形關係를 가지므로 모우먼트 M 과 相對回轉角 ϕ 는 $M = \lambda\phi$ 로 表示할 수 있다[1][2][3].

2.2 修正매트릭스의 構成

連結部의 拘束效果를 反映할 수 있는 修正매트릭스를 構成하기 위해 部材端의 拘束係數(Fixity Factor)를 식 (1)과 같이 定義한다[5][6].

$$f_i = \frac{L}{(L - 3EI_i \lambda_i)} \tag{1}$$

$$f_j = \frac{L}{(L - 3EI_j \lambda_j)}$$

식 (1)의 拘束係數를 活用하여 Bracketed Connection을 갖는 倅대要素의 剛性매트릭스를 導出하면 식 (2)와 같다[4][5].

$$[K] = [S][C] \tag{2}$$

단: $[S][C]$ 는 註를 참조할것.

식 (2)의 $[S]$ 매트릭스는 變斷面을 갖는 倅대要素의 剛性매트릭스이며, $[C]$ 매트릭스는 Bracketed Connection의 拘束效果를 反映하기 위한 修正매트릭스로서 各 element가 拘束係數 f_i, f_j 및 部材길이 L 로서 構成된다. 拘束係數의 計算式 (1)에서 L, E, I_i 는 倅대要素의 既存資料이므로 결국 修正매트릭스 $[C]$ 의 構成은 Bracketed Connected에 關한 $M = \lambda\phi$ 를 求하는 問題를 귀결된다.

$$\begin{matrix}
 \text{[註]} \\
 [S] \\
 [C]
 \end{matrix}
 =
 \begin{pmatrix}
 \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\
 0 & \frac{(\alpha_i + \alpha_j + 2\beta_{ij})EI_i}{L^3} & \frac{(\alpha_i + \beta_{ij})EI_i}{L^2} & 0 & -\frac{(\alpha_i + \alpha_j + 2\beta_{ij})EI_i}{L^3} & \frac{(\alpha_j + \beta_{ij})EI_i}{L^2} \\
 0 & \frac{(\alpha_i + \beta_{ij})EI_i}{L^2} & \frac{\alpha_i EI_i}{L} & 0 & -\frac{(\alpha_i + \beta_{ij})EI_i}{L^2} & \frac{\beta_{ij} EI_i}{L} \\
 -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\
 0 & -\frac{(\alpha_i + \alpha_j + 2\beta_{ij})EI_i}{L^3} & -\frac{(\alpha_i + \beta_{ij})EI_i}{L^2} & 0 & \frac{(\alpha_i + \alpha_j + 2\beta_{ij})EI_i}{L^3} & -\frac{(\alpha_j + \beta_{ij})EI_i}{L^2} \\
 0 & \frac{(\alpha_j + \beta_{ij})EI_i}{L^2} & \frac{\beta_{ij} EI_i}{L} & 0 & -\frac{(\alpha_j + \beta_{ij})EI_i}{L^2} & \frac{\alpha_j EI_i}{L} \\
 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
 0 & \frac{4f_i - 2f_j + f_i f_j}{4 - f_i f_j} & -\frac{2Lf_i(1 - f_j)}{4 - f_i f_j} & 0 & \frac{4f_i - 2f_j + f_i f_j}{4 - f_i f_j} & \frac{2Lf_j(1 - f_i)}{4 - f_i f_j} \\
 0 & \frac{6}{L} \frac{f_i - f_j}{4 - f_i f_j} & \frac{3f_i(2 - f_j)}{4 - f_i f_j} & 0 & \frac{6}{L} \frac{f_i - f_j}{4 - f_i f_j} & \frac{3f_j(2 - f_i)}{4 - f_i f_j} \\
 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
 0 & \frac{4f_i - 2f_j + f_i f_j}{4 - f_i f_j} & -\frac{2Lf_i(1 - f_j)}{4 - f_i f_j} & 0 & \frac{4f_i - 2f_j + f_i f_j}{4 - f_i f_j} & \frac{2Lf_j(1 - f_i)}{4 - f_i f_j} \\
 0 & \frac{6}{L} \frac{f_i - f_j}{4 - f_i f_j} & \frac{3f_i(2 - f_j)}{4 - f_i f_j} & 0 & \frac{6}{L} \frac{f_i - f_j}{4 - f_i f_j} & \frac{3f_j(2 - f_i)}{4 - f_i f_j}
 \end{pmatrix}$$

3. Bracketed Connection의 解析

3.1. 理想化

3.1.1. 假定

- 1) Bracket 와 Column 및 Frame 과의 連結은 熔接된 것으로 가정한다.
- 2) Column 部分은 完全 Rigid 하여 變形하지 않는 것으로 가정한다.
- 3) Bracket 및 Frame 은 두께方向으로 應力 및 變位가 變化하지 않는 것으로 가정한다.
- 4) Frame 은 斷面이 矩形인 Flat Bar 로 假定한다.

3.1.2. Modeling

Bracket의 連結方法은 Fig.2와 같이 A, B 두 形態로 區分하였으며 Bracket의 크기變化에 따른 影響을 考察하기 爲히 Fig.3과 같이 L-series와 S-series로 變化시킨다. Frame과 Bracket의 두께比 t_B/t_F 는 1, 0.5, 0.25의 세 경우로 變化시키므로서 連結形態 및 크기, 두께의 變化에 따른 Model의 個數는 總 54개가 되며 A-6L-1, B-5S-0.5 등으로 命名하였다. 이들 각 Model을 二次元 平面解析 Program으로 解析하기 爲히 有限要素로 分割하고 節點番號와 要素番號를 부여하였다. 또한 假定에 依해 Column과 接한 端面上의 모든 節點은 完全固定으로 하였으며 荷重條件은

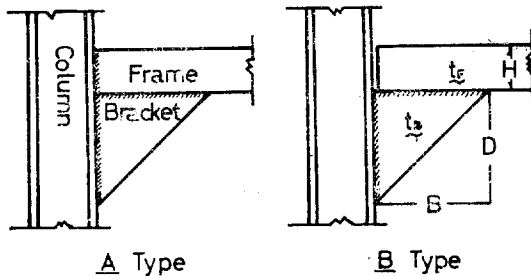


Fig. 2. Connection Type of Bracket

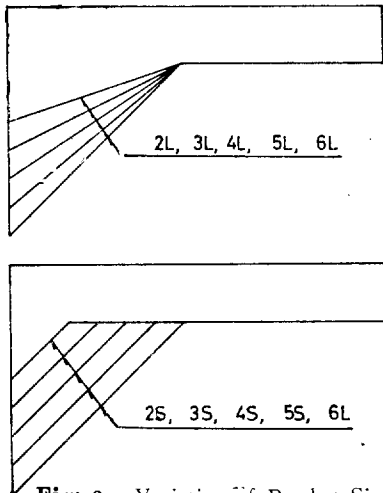


Fig. 3. Variation of Bracket Size

Pure Bending 狀態가 되도록 Beam 一端에 偶力 2쌍을 加하였다.

3.2. Program의 構成

二次元 平面解析 Program은 附錄에 제시한 有限要素法의 基本關係式 및 解法에 따라 Fig. 4의 Flow Chart와 같이 1개의 Main Program과 4개의 Subroutine으로 構成된다. Subroutine PLANS는 基本關係式에 따라 要素剛性매트릭스를 構成하며 Subroutine DEBBO 및 SOLO는 Decomposing과 Forward, Backward Substitution을 行하여 未知節點變位를 計算한다. Subroutine PRST는 要素의 主應力과 主應力角을 計算하며 Main Program은 資料의 入, 出力 및 Total 剛性매트릭스 $[K]$ 의 合成과 荷重벡터 $[F]$ 의 構成 등 전반적인 進行을 담당한다. 有限個의 要素로 分割한 平面彈性體의 總自由度를 N 라고 하면 Total 剛性매트릭스 $[K]$ 의 次數는 $N \times N$ 가 되나 $[K]$ 매트릭스는 對稱, 帶狀의 特性을 가지므로 NCODE法에 依해 $UBW \times N$ 次의 矩形매트릭스로 構成하므로서 計算時間과 Core의 節約이 可能하였다. UBW 는 上帶幅(Upper Band Width)로서 다음 式으로 決定된다. $UBW = [2 * JR - JJ + 1] * n$

JR은 要素의 가장 큰 節點番號 JJ는 가장 작은 節

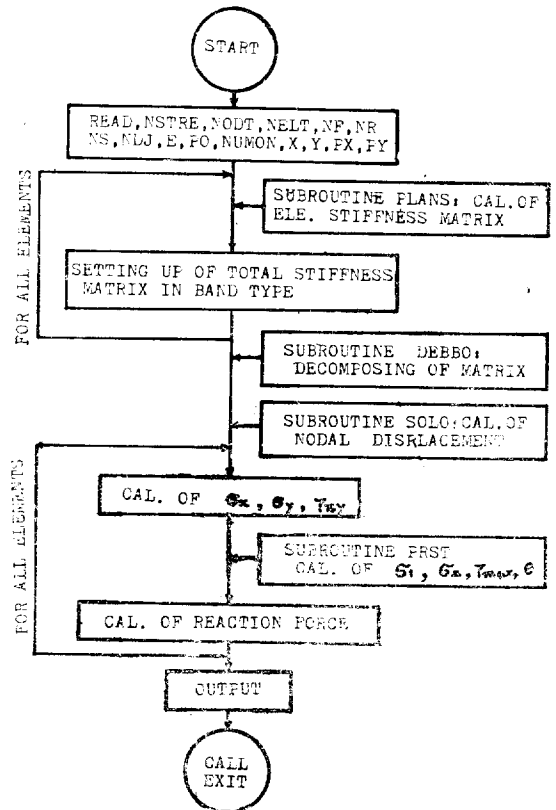


Fig. 4. Flow Chart

點番號이며 γ 는 그 요소가 갖고 있는 拘束成分의 個數이다. 따라서 $[K]$ 매트릭스의 次數를 줄이기 위해서는 한 요소의 節點番號의 差가 最少가 되도록 節點番號를 부여하여야 한다.

4. 結果分析

電子計算組織 CDC(CYBER72-14)를 使用하여 54個 Model에 對한 2次元 平面解析을 시행한 結果를 分析하면 아래와 같다.

4.1. 應力의 分布

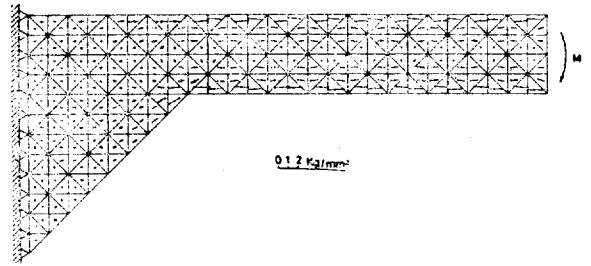


Fig. 5. Principle Stress Distribution of Bracketed Connection

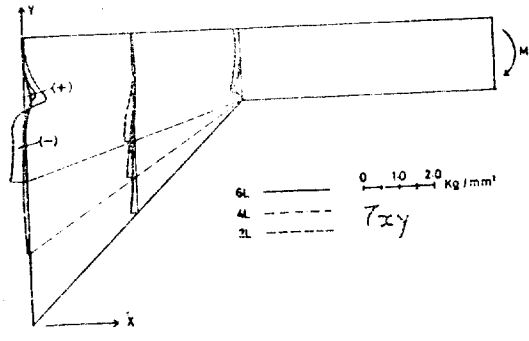
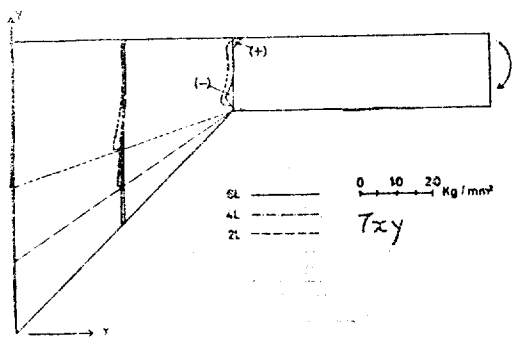
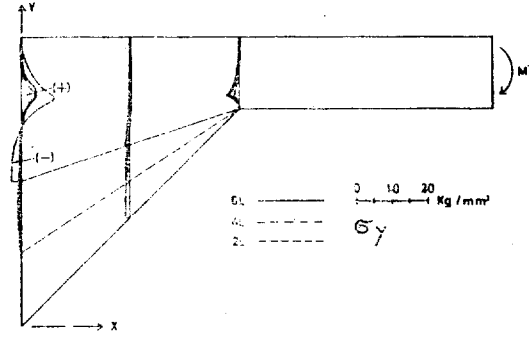
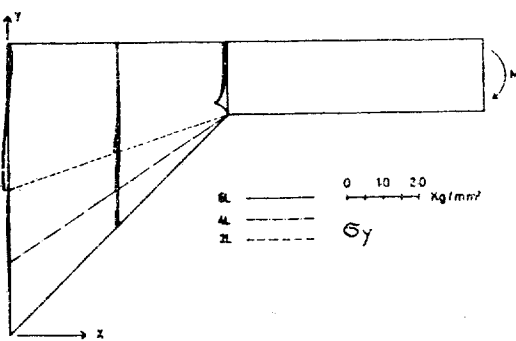
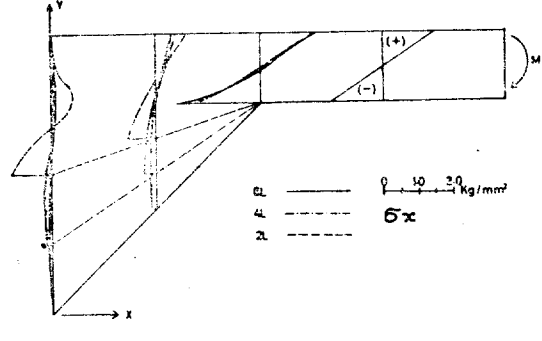
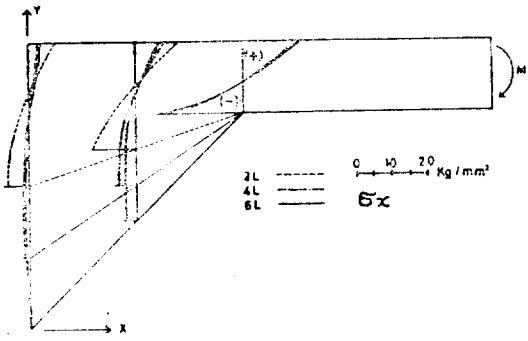


Fig. 6. Effect of Bracket Size (L-Series, Type A, Thickness Ratio=1.0)

Fig. 7. Effect of Bracket Size (L-Series, Type B, Thickness Ratio=1.0)

51個의 Model 中 A 4S-1의 主應力分布을 主應力角과 함께 表示하면 Fig 5와 같다. Fig 5에서 Beam 부분에서의 主應力分布을 考察하면 이미 實驗 및 理論을 通하여 밝혀진 Pure Bending下的 應力分布과 잘 一致하고 있음을 알 수 있다.

Fig 6, 7에서는 Bracket 크기의 變化에 따른 應力分布의 變化를 考察한 바, Fig 6과 같이 A Type, 두께 비 1.0의 경우 Bracket 크기가 작아질에 따라 σ_x 의 中

立軸이 上部로 이동하며 Beam 부분에서는 크기의 關係없이 거의 一致된다. Beam Theory에 의한 경우 Pure Bending 下에서 中立軸은 斷面의 中心에 있는것으로 假定하나 有限要素法에 의한 경우 Fig 6에서 보는 바와 같이 Bracket 端部에서의 實際 中立軸은 斷面中心보다 훨씬 上部에 位置하고 있음이 確認되었다. 또한 Bracket와 Beam 사이의 Corner 部分에서 應力集적이 發生하는데 이 現象도 實驗을 通해 이미 밝혀

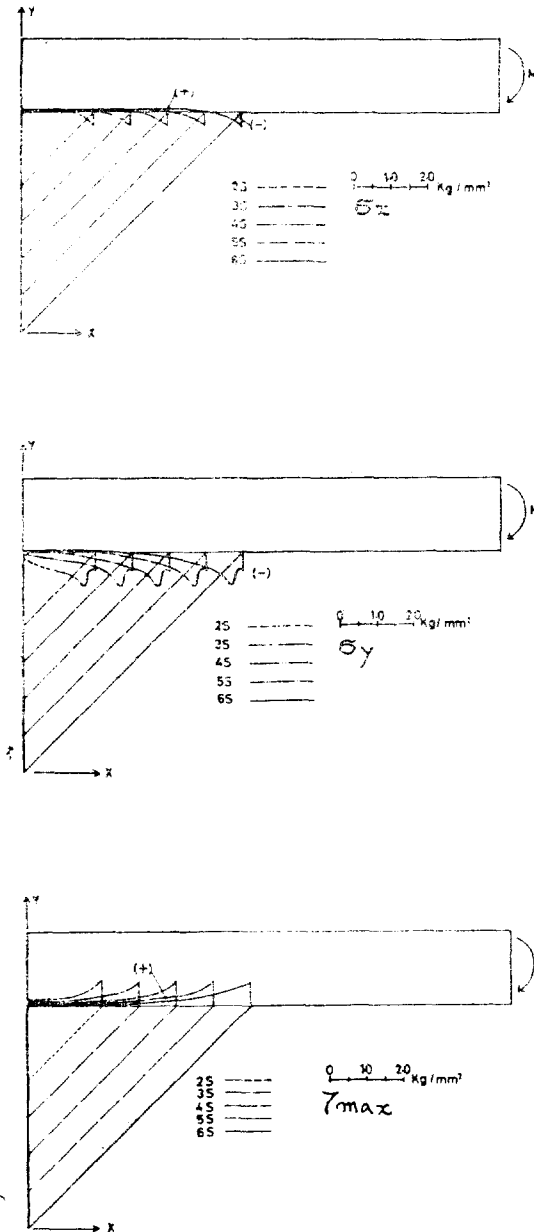


Fig. 8. Effect of Bracket Size (S-Series, Type A, Thickness Ratio=1.0)

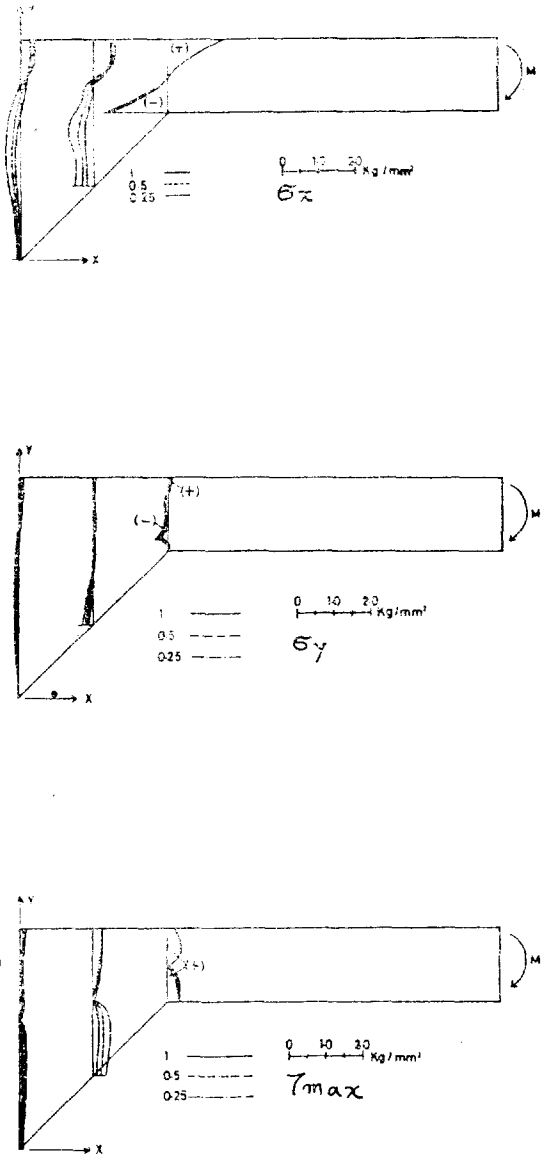


Fig. 9. Effect of Thickness Ratio (Model: 4S, Type A)

진 바와 잘 일치한다. Fig 7 은 두께비 1.0, Type B 의 경우로서 Bracket 端部에서 應力分布가 A Type 의 경우와 큰 차이가 난다. 그 理由는 Bracket 端部에서 境界條件이 다르기 때문이다. 그러나 Beam 部分에 接近할수록 境界條件의 影響이 작아져 A Type 과 일치한다. Fig 8 은 A Type, 두께비 1.0에서 Bracket 의 크기를 S-series 로 變化시킬때의 應力分布로서, 應力集中點에서는 Bracket 의 크기에 關係없이 應力크기가 일정하게 나타난다. 이는 Bracket 의 取付時 應力集中을 피할 수 있는 方案이 Bracket 의 크기에 關係없이 必要함을 뜻한다. Fig 9 의 두께비의 變化에 대한 考察결과 두께비가 작아질수록, 즉 Bracket 와 Frame 의 두께差가 클수록 應力값이 커지는 現象을 확인한 바, 두께비가 1/4 로 감소할 경우 Bracket 部分의 해당應力은 약 3 배로 증가되었다. 단 Beam 部分에서는 應力값의 差가 尠少하였다.

4.2. 모우먼트와 相對回轉角

이미 定義한 바와 같이 均一斷面部材와 Bracket 付부재에서 部材左側端으로부터 거리 B(Bracket 幅) 되는 점의 y 方向變位 v 를 幅 B로서 나눈 값을 各各 θ_2 와 θ_1 로 擇하고 그 差를 計算하므로써 Bracketed Connection 의 相對回轉角 ϕ 를 求하였다. 모우먼트 M 은 $\frac{M}{E \cdot B \cdot D \cdot t_f}$ 로 無次元化하여 실제 Bracket 의 크기에 制限없이 有用하도록 하였다. 이들 모우먼트와 相對回轉角과의 關係를 D/B, H/B, t_b/t_f 값에 따라 圖表化하면 Fig 10~15 와 같다. 이들은 Bracket 種類에 따른 $M = \lambda \phi$ 關係值로서 여기서 求한 λ 值로 (1), (2) 式을 利用하여 拘束係數의 計算 및, 修正 매트릭스 [C]를 構成하므로써 Bracketed Connection 의 固定效果를 反映한 構造解析이 이루어진다. 따라서 이들은 次期 때대 構造物의 嚴密解析時 必要한 基本資料가 된다.

Fig 11~15 에 나타나는 바와 같이 몇개의 "B" Con-

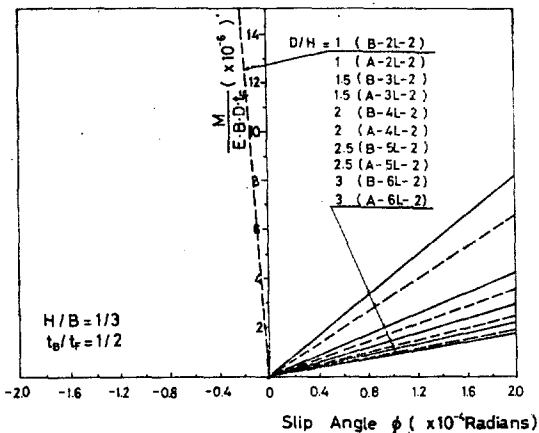


Fig.10. Relation of Moment-Slip angle in Bracketed Connection

nection Type 은 相對回轉角이 - 또는 0 이 되는데 이는 Connection Type 이 B인 경우 Bracket 의 크기가 작아지면 오히려 均一斷面部材端을 直接 接合하는 경우보다 部材變形이 더 많이 일어나거나 같음을 뜻한

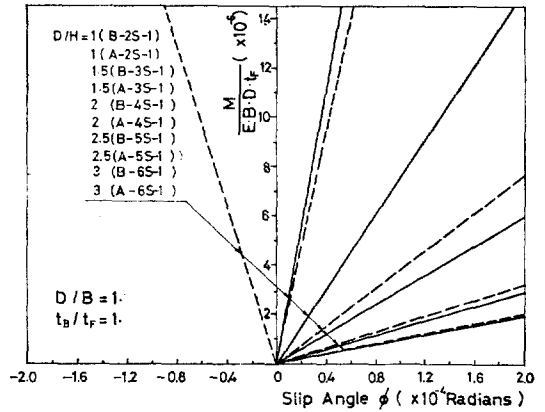


Fig.11. Relation of Moment-Slip angle in Bracketed Connection

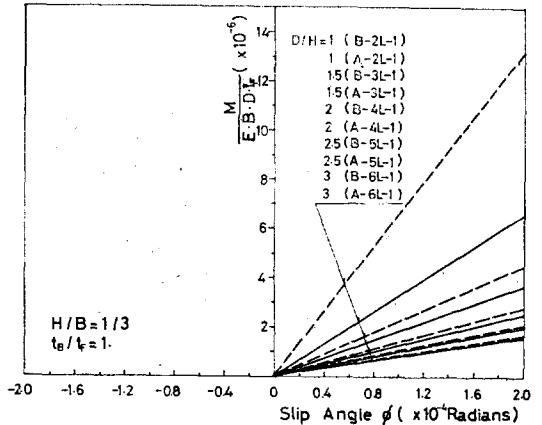


Fig.12 Relation of Moment-Slip angle in Bracketed Connection

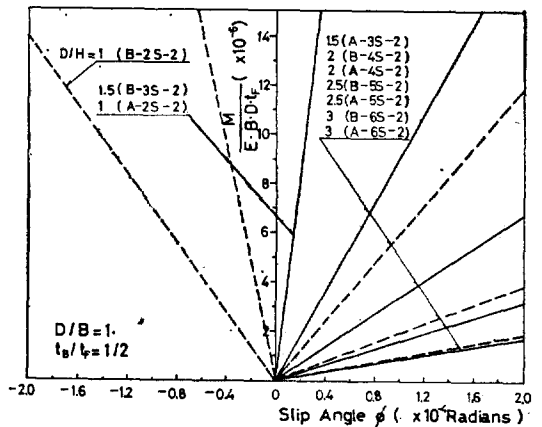


Fig.13. Relation of Moment-Slip angle in Bracketed Connection

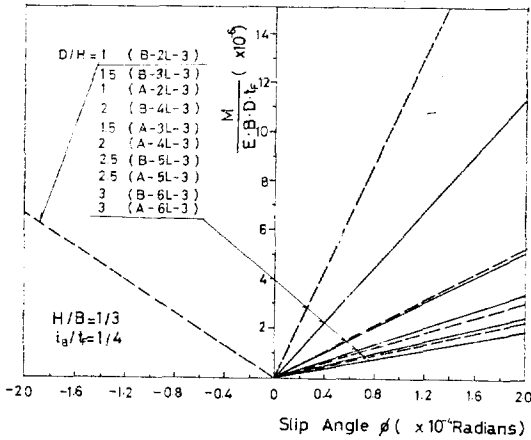


Fig.14. Relation of Moment-Slip angle in Bracketed Connection

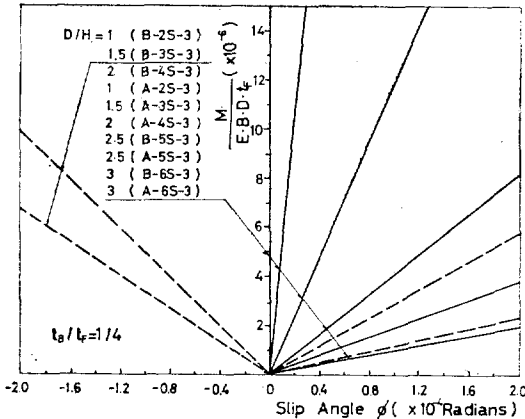


Fig.15. Relation of Moment-Slip angle in Bracketed Connection

다. 따라서 두께비가 1인 경우 B-2S-1과 같이 D/H비가 1.5이하인 Bracket를 B Type으로 設置하는 것은 強度面에서 不利하다. 마찬가지로 두께비 0.5인 경우 B-2S-2, B-3S-2와 같은 Type의 Bracket는 不適當하며 두께비 0.25인 경우 B-2L-3, B-3S-3의 Bracket를 避해야 한다.

5. 結 論

1) Bracket의 크기에 따른 모우먼트 M과 相對回轉角 phi의 關係圖表를 Fig 10~15에 提示하므로써 變位法에 依한 配대構造解析時 拘束效果를 反映하기 위한 Bracket Connection의 拘束係數의 計算 및 修正 매트릭스의 構成이 可能하다.

2) Bracket의 크기가 減少함에 따라 拘束係數가 減少하며 B-Type의 경우 Bracket의 길이 D 및 幅 B가 Beam의 깊이 H보다 작은 경우 그 拘束效果는 均

一斷面部材의 直接 接合의 경우보다 不利하다.

3) Bracket의 크기가 減少함에 따라 σ_x, τ_{max} 의 增加傾向이 급격하다 σ_y, τ_{xy} 는 크게 變化하지 않는다. 또한 Bracket와 Beam이 接合되는 Corner에서 發生하는 集中應力의 크기는 Bracket의 크기와 關係없이 일정하다.

參 考 文 獻

- [1] J.C. Ratheburn, "Elastic Properties of Riveted Connections" *Transactions, ASCE*, Vol.101, 1936
- [2] B-Johnston and E.H. Mount, "Analysis of Building Frames with Semi-Rigid Connections" *Transactions, ASCE*, Vol.107, 1942
- [3] J.E. Lothers, "Elastic Restraint Equations for Semi Rigid Connections" *Transactions ASCE* Vol. 116, 1951
- [4] S.S. Tezcan, "Computer Analysis of Plane and Space Structure" *Journal of the Structural Division, ASCE*, Vol.92, No.ST2, 1966
- [5] G.R. Monforton and T.S. Wu, "Matrix Analysis of Semi-Rigid Connected Frames," *Journal of the Structural Division, ASCE*, Vol. 89, No.ST6, Dec. 1963
- [6] K.M. Romstad and C.V. Subramanian, "Analysis of Frames with Partial Connection Rigidity" *Journal of the Structural Division, ASCE*, Vol.96, Nov. 1970
- [7] W.Jr. Weaver, "Computer Programs for Structural Analysis" D.Van Nostrand Co., 1967.
- [8] H.C.Martin, "Introduction to Matrix Methods of Structural Analysis" McGraw-Hill Book Co., N.Y. 1966
- [9] O.C. Zienkiewicz and Y.K. Cheung, "The Finite Element Method in Structural and Continuous Mechanics" McGraw-Hill Book Co., N.Y. 1968
- [10] J.S. Przemieniecki "Theory of Matrix Structural Analysis" Mc Graw-Hill Book Co. N.Y. 1968
- [11] 三本木茂夫, 吉村信敏, "有限要素法による構造解プログラム" 培風館 1970
- [12] 任尙鎮 "油槽船의 Web Frame에서의 應力分布" 大韓造船學會誌 Vol.9, No.1, 1972
- [13] 申永琦 "메트릭스 構造解析法" 大韓土木學會誌 Vol.17, No.3, 1969
- [14] 李珍求, "對稱帶狀 매트릭스의 電算解法" 大韓土木學會誌 Vol.20, No.4, 1972

[15] J. McCallum, "Bending Moments in Bracketed Beams" T.I.N.A. 1957

附 錄

平面解析을 위한 有限要素法의 基本關係式 및 解法

1. 基本關係式[9][10][11]

二次元 彈性體를 有限要素로 나누었을때 임의의 한 要素 e 에 對한 荷重-變位 關係式은 (A-1)과 같다.

$$\{F\}^* = [K]^* \{\delta\}^* + \{F\}_i^* + \{F\}_o^* + \{F\}_e^* \quad (A-1)$$

要素 e 의 假想變位를 $\{\delta\}^*$ 라고 하면 節點荷重 및 分布荷重에 依한 外部일 (External Work)과 應力에 依한 內部일 (Internal work)은 다음과 같다.

$$\text{외부일} = (\{\delta\}^*)^T \{F\}^* + \int_{vol} \{f\}^T \{p\} d(\text{Vol})$$

$$\text{내부일} = \int_{vol} \{\epsilon\}^T \{\sigma\} d(\text{Vol})$$

平衡條件에 依해 두 일은 같으므로

$$\begin{aligned} (\{\delta\}^*)^T \{F\}^* &= \int_{vol} \{\epsilon\}^T \{\sigma\} d(\text{Vol}) \\ &\quad - \int_{vol} \{f\}^T \{p\} d(\text{Vol}) \end{aligned} \quad (A-2)$$

또한 要素 e 內部的 任意點의 變位를 $\{f(x,y)\}$, 變形度를 $\{\epsilon\}$, 應力을 $\{\sigma\}$ 로 나타낼때 다음 關係式이 成立한다.

$$\{f\} = [N] \{\delta\}^* \quad (A-3)$$

$$\{\epsilon\} = [B] \{\delta\}^* \quad (A-4)$$

$$\{\sigma\} = [D] (\{\epsilon\} - \{\epsilon_0\}) + \{\sigma_0\} \quad (A-5)$$

식 (A-3), (A-4), (A-5)를 식 (A-2)에 代入하면

$$\begin{aligned} \{F\}^* &= (\int [B]^T [D] [B] \delta(\text{Vol})) \{\delta\}^* \\ &\quad - \int [B]^T [D] \{\epsilon_0\} d(\text{Vol}) \\ &\quad + \int [B]^T \{\sigma_0\} d(\text{Vol}) \\ &\quad - \int [N]^T \{p\} d(\text{Vol}) \end{aligned} \quad (A-6)$$

식 (A-1)과 식 (A-6)을 對比하므로써 要素剛性매트릭스 $[K]^*$ 의 關係式을 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} [K]^* &= \int [B]^T [D] [B] d(\text{Vol}) \\ &= [B]^T [D] [B] \cdot t \Delta \end{aligned} \quad (A-7)$$

이때 t 및 Δ 는 要素의 두께 및 面積을 뜻하며,

$[B]$, $[D]$ 매트릭스는 다음과 같다.

$$[B] = \begin{pmatrix} b_i & 0 & b_j & 0 & b_m & 0 \\ 0 & c_i & 0 & c_j & 0 & c_m \\ c_i & b_i & c_j & b_j & c_m & b_m \end{pmatrix}$$

단 $\begin{cases} b_i = y_j - y_m & c_i = x_m - x_j \\ b_j = y_m - y_i & c_j = x_i - x_m \\ b_m = y_i - y_j & c_m = x_j - x_i \end{cases} \quad (A-8)$

plane stress 인 경우

$$[D] = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{pmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{\nu} \end{pmatrix} \quad (A-9)$$

plane strain 인 경우

$$[D] = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{pmatrix} 1 & \nu/(1-\nu) & 0 \\ \nu/(1-\nu) & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-2\nu)/2(1-\nu) \end{pmatrix} \quad (A-10)$$

결국 식 (A-7)~(A-10)으로부터 各要素의 剛性매트릭스 $[K]^*$ 를 求할 수 있으며 이들 $[K]^*$ 로서 Total 剛性매트릭스 $[K]$ 를 合成하므로써 二次元平面體의 荷重-變位 關係式은 다음과 같다.

$$\{F\} = [K] \{X\} \quad (A-11)$$

2. 節點變位の 計算[7][14]

荷重매트릭스 $\{F\}$ 가 주어질 때 식 (A-11)로부터 未知 節點變位 $\{X\}$ 를 求하기 위해 剛性매트릭스 $[K]$ 의 對稱帶狀特性을 利用하여 Cholesky의 平方根法을 適用한다.

1) Decomposition

$[K]$ 매트릭스를 上三角매트릭스 $[U]$, 下三角매트릭스 $[U]^T$ 로 分解한다.

$$[K] = [U]^T [U] \quad (A-12)$$

2) Forward Substitution

$\{X\}^*$ 를 새로 定義하면

$$\{X\}^* = [U] \{X\} \quad (A-13)$$

(A-12), (A-13) 식으로부터

$$[U]^T \{X\}^* = \{F\} \quad (A-14)$$

(A-14) 식에서 $\{X\}^*$ 를 forward substitution에 依해 求한다.

3) Backward Substitution

(A-13) 식으로부터 Backward Substitution에 依해 $\{X\}$ 값을 求한다.

$$\left. \begin{aligned} X_n &= \frac{X_n^*}{U_{nn}} \\ X_i &= \frac{X_i^* - \sum_{k=i+1}^n U_{ik} X_k}{U_{ii}} \quad (i < n) \end{aligned} \right\} \quad (A-15)$$

3. 應力の 計算[11]

(A-1), (A-5) 식에서 初期應力과 初期變形을 무시할 경우, $\{\sigma\} = [D][B]\{\delta\}^*$

$$(A-16)$$

따라서 節點變位를 알면 (A-16) 식으로부터 $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ 를 計算할 수 있다. 또한 彈性學의 定義에 의거하여 主應力 및 主應力角을 아래와 같이 구할 수 있다.

$$\left. \begin{aligned} \sigma_1 &= \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) + \sqrt{\frac{1}{4}(\sigma_x - \sigma_y)^2 + \tau_{xy}^2} \\ \sigma_2 &= \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) - \sqrt{\frac{1}{4}(\sigma_x - \sigma_y)^2 + \tau_{xy}^2} \\ 2\theta &= 2\theta_s + m\pi \quad (m=0, \pm 1, \pm 2) \end{aligned} \right\} \quad (A-17)$$

단, $2\theta_s = \frac{1}{2} \tan^{-1} \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_y - \sigma_x}, \quad -\frac{\pi}{2} < 2\theta_s < \frac{\pi}{2}$