

不均一分布 RC素子에 의한 定偏角驅動點 임피던스의 最適實現 (Optimal Realization of Constant-Argument Driving- Point Impedance Using a Nonuniform Distributed RC Element)

朴 松 培*

(Park, Song Bai)

要 約

不均一分布 RC素子和 集中 RC素子を 併用한 간단한 回路構成에 의하여 驅動點임피던스가 一定偏角 θ_0 을 값도록 實現하는 문제를 고찰하였다. 分布素子の 形狀과 集中素子の 값을 조직적으로 변화시키면서 誤차를 最小로 하는 最適設計法을 適用하였다. 그 結果 $\theta_0 = -30^\circ$, -60° 의 경우에는 주파수가 1:100의 범위에서 偏角誤差 2.5° 內외의 것을, 또 $\theta_0 = -45^\circ$ 의 경우에는 어떤 낮은 주파수이상의 全周波範圍에서 매우 平坦한 주파수 특성을 얻을 수 있었다.

Abstract

The problem of realizing a driving-point impedance, the argument, θ_0 , of which is as constant as possible over a given frequency range was considered. An optimal design technique was applied by varying systematically the shape of the distributed element and the parameter values of the lumped elements. As a result it was possible to make the argument over two decades of frequencies within 2.5° for $\theta_0 = -30^\circ$ and -60° and very flat above a certain frequency for $\theta_0 = -45^\circ$.

1. 序 論

本論文에서는 驅動點임피던스가 주어진 周波數범위에서 가급적 一定한 偏角을 갖도록 實現하는 문제를 고찰하였다. 이것은 複素周波數 S 의 無理函數 $S^{-\lambda}$ ($0 < \lambda < 1$, 즉 偏角 $\theta = 0^\circ \sim -90^\circ$)을 近似的으로 실현하는 문제로서 과거 많은 학자들이 연구하여 왔으나^{1-6, 13, 14)} 그 거의 전부가 S 의 무리함수를 連分數展開하여 RC集中定數回路로 近似시키는 方法으로서 매우 많은 素子가 필요하므로 非實用的이다. 다만 Dutta Ray와 Sheno¹²⁾는 均一分布 RC(以下 \overline{RC} 라 略記함) 線路를

集中 R, C의 直列 또는 並列로 終端하는 경우 入力임피던스의 偏角이 상당히 넓은 주파수범위에서 -45° 에 가깝게 된다는 것을 밝혔으며 또 Dutta Ray⁶⁾는 $(1+S^{-1})^{-\lambda}$ 를 連分數展開하고 그 결과를 非均-RC線路로 近似하였으나 入力側 가까운에서의 \overline{RC} 선로의 形狀을 定하지 못하였고 따라서 실제로 偏角의 주파수 특성을 주지 못하였다.

本論文에는 以上과는 전혀 다른 接近方法을 취하였다. 즉 처음부터 不均- \overline{RC} 素子和 集中 R, C素子로 된 간단한 회로구조를 선정하고 \overline{RC} 素子の 形狀과 集中 R, C의 値를 組織적으로 變化시켜 偏角의 誤차를 最小로 함으로써 近似와 實現을 同時에 達成하는 所謂 最適設計法에 依하였다.

$S^{-\lambda}$ 의 近似的 實現은 理論적인 흥미가 있을 뿐더러

* 正會員, 韓國科學院 電氣 및 電子工學科
Korea Advanced Institute of Science.
接受日字: 1975年 12月 20日

實際的인 有用性도 있다. 例를 들면 熱傳導, 原子爐內 中性子の 擴散같은 擴散問題의 analog simulation, 서 어보 시스템의 補償, 高周波케이플의 終端³⁾, 廣帶域高利得增幅器에서의 高周波減衰特性²⁾, 임피던스의 크기가 $\omega^{-2}(0 \leq \lambda \leq 1)$ 와 같이 변하는 電解質임피던스에 대한 廣帶域브릿지의 平衡¹⁾을 얻는데 有用하다.

2. 豫 備

그림 1(a)는 不均-RC素子の 構造를 나타냈으며, 導電層, 誘電層 및 抵抗層의 三層은 보통 薄膜技術로 만들어지며 그 幅 $w(x)$ 가 入力端부터의 거리 x 에 따라서 變한다. 各層의 媒質 및 두께가 均一한 경우에는 單位長當 抵抗 $r(x)$ 는 $w(x)$ 에 反比例하고 單位長當 容量 $c(x)$ 는 $w(x)$ 에 比例하므로 $r(x) \cdot c(x) = \text{const.}$ 의 관계가 成立한다.

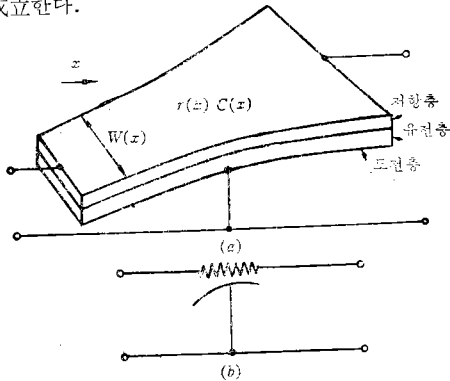


그림 1. 不均一分布 RC素子

不均-RC線路와 不均-LC線路사이에는 많은 analog가 成立하며 後者를 다룬 文獻 [8]이 參考가 될 것이다. 本問題를 다루는데 있어서 便宜上 不均-RC素子는 다음과 같은 조건을 만족하는 것으로 한다.

$$r(x) = \text{一定} > 0 \quad (1 \cdot a)$$

$$c(x) = \sum_{i=0}^n d_i x^i > 0 \quad (1 \cdot b)$$

$$\text{길이} = 1 \quad (1 \cdot c)$$

$$\text{全抵抗} \int_0^1 r(x) dx = 1 \quad (1 \cdot d)$$

$$\text{全容量} \int_0^1 c(x) dx = 1 \quad (1 \cdot e)$$

식 (1·c)~(1·e)는 normalization을 위한 것이고 (1·a), (1·b)를 擇한 것은 다음과 같은 理論的, 實際的 利點이 있기 때문이다.

(1) $c(x)$ 가 多項式이므로 $c(x)$ 의 變化가 緩慢하여 RC線路理論에서 요구되는 一次元的 電流라는 假定을 잘 滿足한다.

(2) 다음에 記述하는 바와 같이 2-port로서의 RC線

로의 ABCD퍼라미터를 S의 冪級數로서 전개할 때 그 係數들이 쉽게 구해진다.

(3) RC소자의 제작상 받게 되는 $r(x), c(x)$ 의 最大值, 最小值, x 에 관한 變化率의 最大值등에 대한 拘束條件을 最適 설계법에 導入할 때 그 계산이 쉽게 된다.

(4) 제작상 편리한 $r(x) \cdot c(x) = \text{const.}$ 의 구조는 다음과 같은 等價變換으로 쉽게 구해진다.⁷⁾

$$R(u) = K / \sqrt{c(x(u))} \quad (2 \cdot a)$$

$$C(x) = K^2 / R(u) \quad (2 \cdot b)$$

여기서

$$K = \frac{1}{L} \int_0^1 \sqrt{c(x)} dx \quad (L: \text{등가선로의 길이}) \quad (2 \cdot c)$$

$$u = \frac{1}{K} \int_0^x \sqrt{c(x)} dx \quad (2 \cdot d)$$

2-port로서의 RC線로의 ABCD퍼라미터는 S의 冪級數로 다음과 같이 전개된다.

$$A = 1 + \sum_{i=1}^{\infty} a_i S^i \quad (3 \cdot a)$$

$$B = 1 + \sum_{i=1}^{\infty} b_i S^i \quad (3 \cdot b)$$

$$C = S \left[1 + \sum_{i=1}^{\infty} c_i S^i \right] \quad (3 \cdot c)$$

$$D = 1 + \sum_{i=1}^{\infty} d_i S^i \quad (3 \cdot d)$$

여기서

$$a_i = \int_0^1 c(x) \int_0^x dx \int_0^x \dots \int_0^x c(x) \int_0^x \overbrace{dx \, dx \, \dots \, dx}^{zi \text{번}} \quad (3 \cdot e)$$

$$b_i = \int_0^1 \int_0^x c(x) \int_0^x \int_0^x c(x) \dots \int_0^x \overbrace{dx \, dx \, \dots \, dx}^{(zi+1) \text{번}} \quad (3 \cdot f)$$

$$c_i = \int_0^1 c(x) \int_0^x \int_0^x c(x) \dots \int_0^x \overbrace{c(x) \, dx \, dx \, \dots \, dx}^{(zi+1) \text{번}} \quad (3 \cdot g)$$

$$d_i = \int_0^1 \int_0^x c(x) \int_0^x \int_0^x c(x) \dots \int_0^x \overbrace{c(x) \, dx \, dx \, \dots \, dx}^{zi \text{번}} \quad (3 \cdot h)$$

(1)의 조건하에서는 (3·e)~(3·h)에 표시한 積分計算이 $c(x)$ 의 係數 $d_i (i=0, 1, 2, \dots, n)$ 만으로서 解析的 表示가 可能함을 이내 알 수 있다. 그 결과는 不均-LC線路에 대한 文獻[8]의 式(11)에서 $L_1=1$ 이라 놓은 것과 一致한다.

3. 回路選擇

일반적으로 말해서 最適化問題에서는 變數의 數가 많을수록 원하는 결과를 얻을 公算이 큰 반면, 계산량이 거의 指數函數의 으로 증가한다. 본논문에서는 RC素

子 1개와 集中定數의 R,C를 각각 1개씩 사용하는 것으로 한다. 이것들로서 여러가지 회로를 구성할 수 있겠는데 그 중 어떤 것을 선택할 것인가를 본장에서 고찰하겠다.

가급적 넓은 주파수 범위에서 $\theta_i(\omega)$ 이 주어진 一定角 θ_0 에 가깝게 되기 위해서는 $\omega \rightarrow 0$ 및 $\omega \rightarrow \infty$ 에서 θ_i 가 θ_0 에서 너무 벗어나지 않는 것이 요망된다. 그러므로 우선 RC소자의 이 兩極限에서의 偏角을 조사할 필요가 있다.

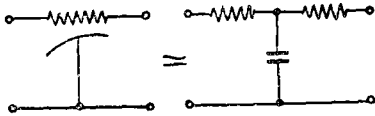


그림 2. RC소자의 저주파에서의 近似的表示

저주파에서 RC소자는 그림 2와 같은 T형 L.P.필터로 근사시킬 수 있으므로 $\omega \rightarrow 0$ 에서는 적열저항만 생각하면 된다. 또 고주파에서는 그 ABCD퍼매미터가 다음과 같이 된다⁹⁾.

$$A(S) = K_1 e^{d\sqrt{S}}, \quad S \rightarrow \infty, \text{Re}(S) \geq 0 \quad (4 \cdot a)$$

$$B(S) = K_2 S^{-1/2} e^{d\sqrt{S}}, \quad S \rightarrow \infty, \text{Re}(S) \geq 0 \quad (4 \cdot b)$$

$$C(S) = K_3 S^{1/2} e^{d\sqrt{S}}, \quad S \rightarrow \infty, \text{Re}(S) \geq 0 \quad (4 \cdot c)$$

$$D(S) = K_4 e^{d\sqrt{S}}, \quad S \rightarrow \infty, \text{Re}(S) \geq 0 \quad (4 \cdot d)$$

여기서

$$d = \int_0^L \sqrt{r(x)c(x)} dx \quad (4 \cdot e)$$

表 1

회 로	그림 3 (a)	그림 3 (b)	그림 3 (c)	그림 3 (d)
$\omega \rightarrow 0$ 에서의 θ_i 의 극한치	-90°	0°	0°	-90°
$\omega \rightarrow \infty$ 에서의 θ_i 의 극한치	-45°	-45°	0°	-90°
실현하기 용이한 θ_0 의 범위	$-90^\circ \sim -45^\circ$, 특히 -45° 에 가까운 것	$0^\circ \sim -45^\circ$, 특히 -45° 에 가까운 것	0° 의 가까운 것	90° 의 가까운 것

같다. 여기서 곡선 (a), (b), (c), (d)는 각각 그림 3 (a), (b), (c), (d)의 θ_i 를 表 1에 표시한 범위의 θ_0 가 되게끔 어느 정도 최적화한 경우이다. 물론 예컨대 그림 3 (a)의 회로의 θ_i 가 그림 4의 곡선 (a)와 같이 -45° 를 넘어서도록 할 수도 있지만 θ_i 가 일정하게 되는 범위가 좁아지리라는 것은 쉽게 추측된다.

4. 最適化問題의 數式化 및 解法

本最適化問題의 數式化와 解法은 文獻 8에서 使用한 方法에 따르기로 한다. 즉 變數는 集中素子 R,C의 값

따라서 出力端을 開放 및 短絡했을 때의 入力임피던스 Z_{op} 및 Z_{sh} 는 $S \rightarrow \infty$ 에서

$$Z_{op} = \frac{A(S)}{C(S)} \rightarrow KS^{-1/2} \quad (5 \cdot a)$$

$$Z_{sh} = \frac{B(S)}{D(S)} \rightarrow K'S^{-1/2} \quad (5 \cdot b)$$

가 되고 그 偏角은 둘 다 -45° 에 접근한다. 開放 및 短絡狀態는 負荷로서는 兩極端의 경우이므로 結局 RC소자에 여하한 부하를 연결해도 그 入力임피던스는 $S \rightarrow \infty$ 에서 $KS^{-1/2}$ 에 접근하고 따라서 그 偏角은 -45° 에 접근함을 알 수 있다.

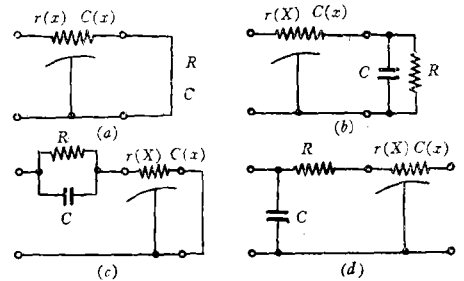


그림 3. 一定偏角을 實現하기 위한 몇가지 回路

이상의 고찰로부터 그림 3.의 각 회로에 대하여 $\omega \rightarrow 0$ 및 $\omega \rightarrow \infty$ 에서의 θ_i 의 극한치와 각 회로로 실현하기 용이한 θ_0 의 범위를 구하면 다음과 같다. 좀더 알기 쉽게 각 회로의 $\theta_i(\omega)$ 의 주파수특성을 그리면 그림 4와

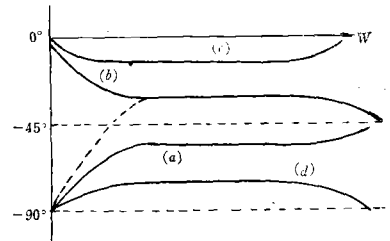


그림 4. 그림 3의 각 회로의 $\theta_i(\omega)$ 의 주파수특성

과 RC素子の $c(x)$ 의 계수 $d_i (i=0, 1, 2, \dots, n)$ 들로 하고,

$$c(x)_{max} \leq C_n, \quad 0 \leq x \leq 1 \quad (6 \cdot a)$$

$$c(x)_{min} \geq C_m, \quad 0 \leq x \leq 1 \quad (6 \cdot b)$$

$$\left. \frac{d}{dx} c(x) \right|_{max} \leq C_{M'}, \quad 0 \leq x \leq 1 \quad (6 \cdot c)$$

$$R \geq R_{min} \quad (6 \cdot d)$$

$$C \geq C_{min} \quad (6 \cdot e)$$

라는 拘束條件下에 $\omega = \omega_L \sim \omega_H$ 의 주파수 범위에서 (ω_L, ω_H : 주어진 값) $\theta_i(\omega)$ 가 주어진 偏角 $\theta_0 (0 > \theta_0 > -180^\circ)$ 에 가깝도록 변수를 결정하는 非線型 프로그래밍 (non-linear programming-NLP) 問題로서 취급하기로 한다. (6)에서 右側의 量들은 주어진 값들이다. 目的函數는

$$P = \sum_{j=1}^m W_j (\theta_i(\omega_j) - \theta_0)^p \quad (7)$$

으로 한다. 여기서 W_j 는 각 주파수의 荷重函數이고 p 는 正의 偶數이다. $p=2$ 는 最小自來誤差法에 해당한다.

(9), (7)로 수식화된 拘束條件下的 NLP 문제를 푸는 여러가지 방법중, Sequential Unconstrained Minimization Technique (SUMIT)¹²⁾를 사용하기로 하였다. 즉 구속조건하의 NLP 문제를 구속조건 없는 NLP 문제로 바꾸기 위하여 다음과 같이 정의되는 목적함수를 도입한다.

$$F = P + k \left(\frac{q_1}{C_M - c(x)_{max}} + \frac{q_2}{c(x)_{min} - C_m} + \frac{q_3}{C_{M'} - \left. \frac{d}{dx} c(x) \right|_{max}} + \frac{q_4}{R - R_{min}} + \frac{q_5}{C - C_{min}} \right) \quad (8)$$

여기서 k 는 $k_1, k_2, k_3, \dots (k_1 > k_2 > k_3 > \dots)$ 등으로 변하는 正數이고 $q_i (i=1, 2, \dots, 5)$ 는 각 구속조건의 荷重 係數이다.

처음에 $k = k_1$ 으로 하고 $X = X'$ (X 는 변수의 벡터)에서 출발하여 F 의 最小치를 구하고 그 때의 $x = x^2$ 에서 $k = k_2$ 로 놓고 다시 여기서 出發하여 F 의 最小치를 구하고 이것을 반복하여 F 가 더 이상 감소되지 않는 점에서 反復過程을 終止시킨다. 각 반복과정에서 F 의 最小치를 구하는 방법으로는 Fletcher-Powell 방법¹¹⁾을 사용하였다. 그림 5는 컴퓨터 프로그램의 flow chart 이다.

5. 結 果

$\theta_0 = -30^\circ, -60^\circ, -45^\circ$ 의 각 경우에 대하여 最適化를 시도하였다. 각 경우에 공통되는 조건은 다음과 같다.

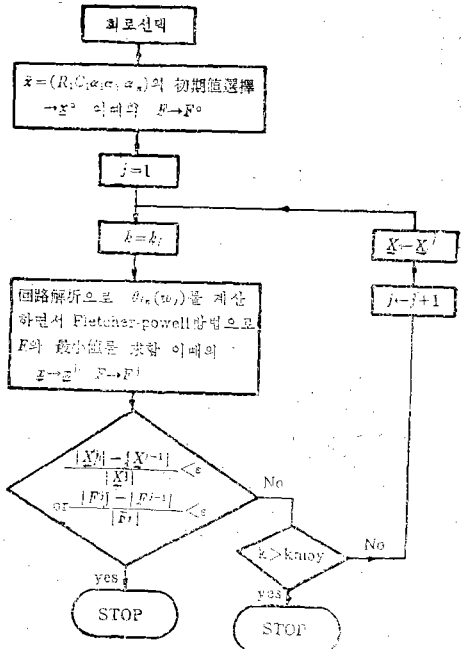


그림 5. Flow Chart

$n=3$ ($C(x)$ 의 次數), $p=4$ (式(7) 참조)
 $w_i = q_i = 1$ (荷重係數)
 $C_M = 3.0, C_m = 0.1, R_{min} = 0.01, C_{min} = 0.01,$
 $\left. \frac{d}{dx} c(x) \right|_{max}$ 은 고려하지 않음
 $k_1 = 0.1, k_i = k_{i-1} / 20 (i=2, 3, 4, \dots)$
 $\epsilon = 0.0001$ (iteration termination criterion, 그림 5 참조)

初期 $c(x)$ 는 간단한 convex, concave, 單調增加, 單調減少函數로부터 적당한 것을 선정하였음.

$\theta_{in}(\omega)$ 은 $Z_{in} = \frac{AZ_L + B}{CZ_L + D}$ (Z_L : 그림 3(a), (b)의 부하 임피던스)로부터 구함

(i) $\theta_0 = -30^\circ$ 의 경우
 그림 3 (b)의 회로에서 $\omega_L = 0.3, \omega_H = 30$ 으로 잡고
 $R = 1.0, C = 1.0$
 $c(x) = 0.2 + 1.3x + 0.87x^2 - 0.58x^3$
 에서 出發하여 SUMIT의 7, 反復過程後
 $R = 1, 149, C = 1, 823$
 $c(x) = 0.1242 + 0.2789x + 9.672x^2 - 9.950x^3$

에서 最小치에 도달하였다.
 그림 6은 始發點 및 最適化後의 $\theta_{ik}(\omega)$ 의 주파수특성이고 여기서 보는 바와 같이 $\omega = 0.3 \sim 30$ 의 범위에서 偏角의 최대오차는 2.4° 이다.

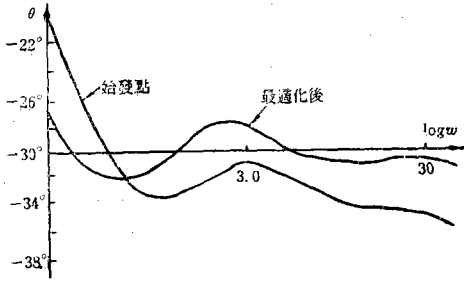


그림 6. $\theta_0 = -30^\circ$ 의 경우의 始發點 및 最適化後의 $\theta_{in}-\omega$

RC소자 제작상 편리한 것은 II.에서도 말한 바와 같이 $r(x) \cdot c(x) = \text{const}$ 의 구조이다. 그림 7은 위에서 최적화후 얻은 RC소자를 이와 같은 구조로 等價變數의 한 경우의 $r(x), c(x)$ 에 따른 변화이다.

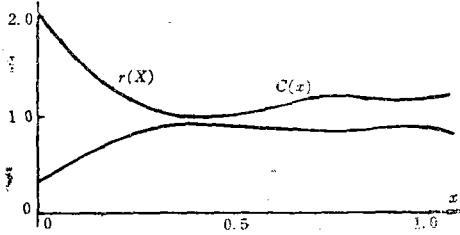


그림 7. $r(x) \cdot c(x) = \text{const}$ 의 최적 회로

(ii) $\theta_0 = -60^\circ$ 의 경우

그림 3 (a)의 회로에서 $\omega_L = 0.22, \omega_H = 22$ 로 잡고 $R = 2.0, C = 1.0$

$$c(x) = 2.0 - 3.5x - 0.6x^2 + 3.9x^3$$

에서 出發하여 SUMIT의 7 : 反復過程後

$$R = 3,016, C = 1,182$$

$$c(x) = 2.970 - 14.29x + 20.69x^2 - 6.880x^3$$

에서 最適化에 도달하였다.

그림 8은 始發點 및 最適化後의 $\theta_{in}(\omega)$ 의 주파수특성이고 여기서 보는 바와 같이 $\omega = 0.22 \sim 22$ 의 범위에서 편각의 최대오차는 2.5° 이다.

그림 9는 $r(x) \cdot c(x) = \text{const}$ 의 구조를 갖는 等價最適回路이다.

(iii) $\theta_0 = -45^\circ$

그림 3 (b)의 회로를 택하였으며 $\omega_L = 0.32, \omega_H = 32$ 로 잡고

$$R = 2.0, C = 1.0$$

$$c(x) = 1.2 - 0.327x - 0.218x^2 + 0.145x^3$$

에서 出發하여 SUMIT의 6회 반복과정후

$$R = 1,944, C = 1,341$$

$$c(x) = 1.276 + 2.033x - 5.878x^2 + 2.670x^3$$

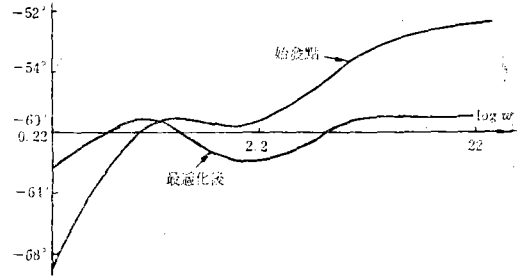


그림 8. $\theta_0 = -60^\circ$ 의 경우의 始發點 및 最適化後의 $\theta_{in}-\omega$.

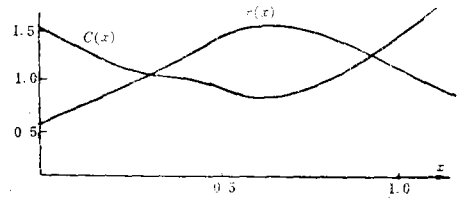


그림 9. $r(x) \cdot c(x) = \text{const}$ 의 최적 회로 ($\theta_0 = -60^\circ$).

에서 最適化에 도달하였다.

그림 10은 始發點 및 最適化後의 $\theta_{in}(\omega)$ 의 주파수특성이고 여기서 보는 바와 같이 $0.22 > \omega > \infty$ 에서 편각의 최대오차는 2.2° 이며 $\omega \geq 0.35$ 에서는 1.7° 이다. 그림 10은 最適化前後의 θ_{in} 의 주파수특성이며 그림 11은 $r(x) \cdot c(x) = \text{const}$ 의 성질을 갖는 最適RC소자의 $r(x), c(x)$ 이다.

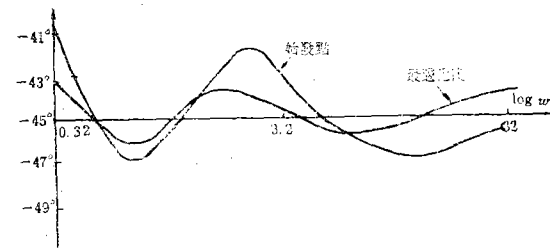


그림 10. $\theta_0 = -45^\circ$ 의 경우의 始發點 및 最適化後의 $\theta_{in}-\omega$.

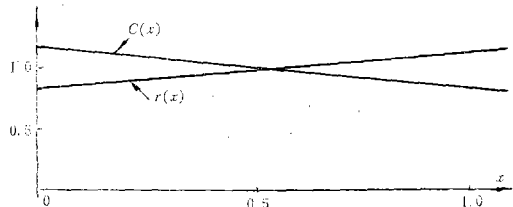


그림 11. $r(x) \cdot c(x) = \text{const}$ 의 最適 RC의 $r(x), c(x)$ ($\theta_0 = -45^\circ$).

6. 結 論

새로운 회로구조와 방법으로 定偏角임피던스 實現을 시도하였다. 즉 회로구조와 回路퍼라미터의 初期値를 적당히 선정하면 近似와 實現이 同時에 이루어지는 最適化問題로서 취급하였다.

계산량때문에 $c(x)$ 의 차수는 3차로 제한했으나 이 경우에도 ω 의 1:100의 범위에서 2.5° 内外의 편각오차 밖에 없었다. 단 3개의 소자된으로 이런 결과를 얻었다는 것은 주목할 만하다. $\theta_0 = -45^\circ$ 의 경우에는 낮은 주파수 이상의 전 주파수 범위에서 오차가 작았다.

더욱 平坦한 偏角특성을 얻으려면 素子の 數를 증가하던지, $c(x)$ 의 次數를 증가하던지, 주파수범위를 줄이던 될 것이다.

參 考 文 獻

1. R.M. Lerner, "The design of constant-angle or power-law magnitude impedance," IEEE Trans. Circuit Theory, Vol. CT-10, pp.98~107, March 1963.
2. R.Morrison, "RC constant-argument driving-point admittances," IRE Trans. Circuit Theory, Vol. CT-6, pp. 310~317, September 1959.
3. W.J.D. Steenaart, "The simulation of coaxial cable by a distributed RC homogeneous transmission line and approximate realization of its Z_0 ," IEEE Trans. Circuit Theory, Vol. CT-11, pp.502~504, December 1964.
4. K.Steiglitz. "An RC impedance approximant to $S^{-1/2}$," IEEE Trans. Circuit Theory, Vol. CT-11, pp.160~161, March 1964.
5. S.C. Dutta Roy and B.A. Sheno, "Distributed and lumped RC realizations of a constant argument impedance," J. Franklin Inst.,

Vol. 282, pp.318~329, November 1966.

6. S.C.Dutta Roy, "On the realization of a constant argument immittance or fractional operator," IEEE Trans. Circuit Theory, Vol. CT-14, pp.264-274, September 1967.
7. S.B.Park, "Continuous equivalence of general (RLGC) nonuniform transmission lines." IEEE Trans. Circuit Theory, Vol. CT-17, pp.139~141, February 1970.
8. 朴松培: "廣帶域 임피던스 整合用 不均一線路의 最適設計," 電子工學會誌, 第11卷 第6號, 1974年 12月.
9. E.N. Protonotarios and O.Wing, "Theory of nonuniform RC lines, Part I," IEEE Trans. Circuit Theory, Vol. CT-14, pp.2~12, March 1967.
10. P.M. Chirlin, "Integrated and Active Network Analysis and Synthesis," Prentice-Hall, 1967.
11. R.Fletcher and M.J.D. Powell, "A rapidly convergent descent method for minimization," The British Computer Journal, Vol.6, pp.163~168, 1963.
12. A.V. Fiacco and G.P. McCormick, "The sequential unconstrained technique for nonlinear programming," Management Science, Vol.10, No.4, 1964.
13. G.E.Carlson and C.A.Halijak, "Approximation of fixed impedances," IEEE Trans. Circuit Theory, Vol. CT-9, pp.302~303, September 1962.
14. C.A.Hesselberth, "Synthesis of some distributed RC networks," Univ. of Illinois, Urbana, Ill., Coordinated Science Lab. Rept. R-164, August 1963.