

그라이 符號 디지트 節次에 關한 研究 (A Study on the Gray Code Digit Sequence)

金 炳 贊*
(Kim, Byung Chan)

要 約

反復型 그라이 符號 中 14進 및 16進 符號用 디지트 節次(digit sequence 또는 DS)의 여러가지 特性에 關하여 論하였으며 그것들을 統一的으로 記述할 수 있는 PDS는 各各 31種 및 11種이 있다는 것을 明白히 하였다. 그리고 이 PDS들에 回轉變換과 順列變換을 實施하여 얻을 수 있는 DS의 總數와 各種 特殊 DS의 性質에 關하여도 論하였으며 對稱型 DS를 利用한 14進 및 16進 GC Counter를 設計하여 그것들의 動作을 實驗에 依하여 確認하였다.

Abstract

Investigations on some characteristics of Tetra-Decimal and Hexa-Decimal recycling Gray code(GC) digit sequence(DS) are carried out, and, 31 and 11 kinds of prime digit sequence(PDS) are proposed respectively. From these PDS, by means of rotational conversion and permutational conversion, the numbers of all DS are obtained, and also the characteristics of some special DS are studied. Tetra-Decimal and Hexa-decimal GC counters are designed using symmetrical DS, and, their operations are experimentally verified.

1. 序 論

4비트(bit)單位距離符號 即 그라이 符號(Gray Code)¹⁾ 中에서 反復型에 屬하는 符號에는 8進, 10進, 12進, 14進 및 16進 符號等이 있으며 이들의 特性은 그 디지트 節次(Digit Sequence 또는 DS)에 依하여 잘 究明된다. 그리고 10進 符號의 特性은 池田等²⁾이 發表한 바가 있고 12進 符號의 特性³⁾은 筆者가 發表한 바가 있다. 本 論文에서는 DS가 가장 긴 14進 및 16進 符號의 DS에 關하여 그 特性을 論하였다.

2. 定 義

(1) A型, B型 및 C型 DS:

다음과 같은 部分 DS(partial digit sequence)를 定義할 때

$$\left. \begin{aligned} \vec{A} &= (1\ 2\ 3\ 4) \\ \vec{B} &= (1\ 2\ 1\ 3\ 1\ 4) \\ \vec{C} &= (1\ 2\ 1\ 3\ 2\ 1\ 2\ 4) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(1)$$

任意的 DS가 $\vec{A}(p_5\ p_6\dots)$ 또는 $\vec{B}(p_7\ p_8\dots)$ 또는 $\vec{C}(p_9\ p_{10}\dots)$ 型으로 表示되면 이 DS를 各各 A型 B型 및 C型 DS라고 定義한다. 但 $p_i(i=1, 2, \dots)$ 는 1, 2, 3, 4, 中의 한 數이다. 그리고 任意的 DS가 다음에 記述하는 變換에 依하여 A型으로도 表示할 수가 있고 B型으로도 表示할 수가 있는 境遇에는 그 DS는 A型으로 分類하기로 하며 또한 어느 DS가 B型으로도 表示할 수가 있고 C型으로도 表示할 수가 있는 境遇에는 B型으로 分類하기로 한다.

(2) 誘導型 DS:

任意的 n 進數의 DS가 例를 들어 (2)式으로 주어지면

$$P = (p_1 p_2 p_3 \dots p_n) \dots\dots\dots(2)$$

(但 $p_i(i=1, 2, \dots, n)$ 는 1, 2, 3, 4中의 한 數이며 14進數의 境遇 n 는 14이고 16進數의 境遇에는 $n=16$ 이다.)

이에 回轉變換을 實施하면 DS (3)을 얻고

$$P_r = (p_i\ p_{i+1} \dots p_n\ p_1\ p_2 \dots p_{i-1}) \dots\dots\dots(3)$$

逆變換을 實施하면 DS (4)를 얻는다.

$$P_i = (p_n\ p_{n-1} \dots p_2\ p_1) \dots\dots\dots(4)$$

다음에는 例를 들어 DS (5)에 있어서 1과 3을 交換하여 보면 DS (6)을 얻는데

$$P_s = (\vec{A}\ 1\ 2\ 1\ 4\ \vec{A}\ 1\ 2\ 1\ 4) \dots\dots\dots(5)$$

* 正會員 成均館大學校電子工學科
接受日字 : 1975年12月22日

$$R_{03}^1 = (3\ 2\ 1\ 4\ 3\ 2\ 3\ 4\ 3\ 2\ 1\ 4\ 3\ 2\ 3\ 4) \dots (6)$$

이와같이 flip-flop의 자리의 番號 即 DS의 要素인 1~4까지의 數를 서로 交換하여 새로운 DS를 얻는 操作을 順列變換이라고 定義하며, 順列變換에 依하여 얻을 수 있는 DS의 數는 最高 비트의 數 m 의 順列(permutation)의 數 $m!$ 와 같다.

一般的으로 任意的 DS가 주어졌을 때 이에 以上과 같은 各種 變換을 實施하여 얻을 수 있는 DS들을 誘導型 DS라고 定義한다. 例를 들면 (2), (3), (4)는 서로가 他 DS의 誘導型이며 (5)와 (6)은 서로가 相對方의 誘導型이다.

(3) PDS(prime digit sequence):

14進 및 16進 符號用 DS 中에서 A型, B型 및 C型 DS들을 찾아 보면 各各 96個, 3個, 0個 및 20個, 2個, 1個씩 있다. 그러나 이것들 中에는 서로가 他 DS의 誘導型인 것이 있으므로

① 順列變換과 回轉變換만을 實施하여 誘導型을 求한다는 原則을 세우고

② 어느 DS와 그 誘導型 DS群을 그 DS群에 屬하는 A型, B型 또는 C型 DS 한 個로서 代表的으로 表示할 때, 그 代表的인 DS를 PDS라고 한다. 但 ①에서 逆變換을 考慮하지 않은 것은 PDS 中에는 逆變換이 回轉變換에 包含되는 것도 있고 逆變換에 依한 誘導型이 全然 別個의 DS群을 形成하는 것도 있는 까닭에 統一的으로 記述하기 爲하여 逆變換은 考慮하지 않았으며 어느 PDS의 逆變換에 依한 誘導型이 全然 別個의 DS群을 形成하는 境遇에는 그 DS群을 새로운 PDS에 依하여 代表的으로 表示하기로 한다. 따라서 n 進數 ($n=14$ 또는 16)用 Gray符號에 對한 PDS를 모두 알면 이에 回轉變換과 順列變換만을 實施하면 모든 DS들을 求할 수 있다.

다음에 DS의 一般的인 性質³⁾을 利用하여 Karnaugh map法 또는 順列法에 依하여 PDS들을 決定하여 보면 다음 表 1 및 表 2와 같이 14進符號 및 16進符號에는 各各 31個 및 11個의 PDS들이 있다. 表 1에서 $P_{22} \sim P_{31}$ 은 各各 $P_2, P_3, P_4, P_6, P_9, P_{11}, P_{12}, P_{15}, P_{17}$ 및 P_{19} 의 逆變換에 依한 誘導型 DS群을 代表하기 爲한 PDS들이고, 또한 表 2에서는 P_2 와 P_4 및 P_5 와 P_7 이 各各 서로가 逆變換에 依한 誘導型的의 關係에 있다.

3. DS의 分類

PDS들로부터 그것들의 誘導型을 求하면 모든 DS들을 얻을 수가 있는데 이렇게 하여 얻을 수 있는 DS의 總數 및 特殊 DS들을 分類하여 보면 다음과 같다.

表 1. 14進符號用 PDS

P_1	\vec{A} 1231214323	P_{17}	\vec{A} 2412423242
P_2	\vec{A} 1231341232	P_{18}	\vec{A} 2414312142
P_3	\vec{A} 1241431242	P_{19}	\vec{A} 2414323432
P_4	\vec{A} 1241432142	P_{20}	\vec{A} 3212324232
P_5	\vec{A} 1312131413	P_{21}	\vec{B} \vec{C}
P_6	\vec{A} 1312134232	P_{22}	\vec{A} 1214123424
P_7	\vec{A} 1321341232	P_{23}	\vec{A} 1213124323
P_8	\vec{A} 1421413242	P_{24}	\vec{A} 1213214323
P_9	\vec{A} 1421431242	P_{25}	\vec{A} 1434231413
P_{10}	\vec{A} 1424131242	P_{26}	\vec{A} 1321314232
P_{11}	\vec{A} 1434121343	P_{27}	\vec{A} 2124341214
P_{12}	\vec{A} 2312324232	P_{28}	\vec{A} 2313234323
P_{13}	\vec{A} 2313424342	P_{29}	\vec{A} 323A 323
P_{14}	\vec{A} 2321232432	P_{30}	\vec{A} 3132313413
P_{15}	\vec{A} 232A 232	P_{31}	\vec{A} 3132141232
P_{16}	\vec{A} 2321324232		

表 2. 16進符號用 PDS

P_1	\vec{A} 1214A 1214	P_7	\vec{A} 314342313413
P_2	\vec{A} 13B 1232	P_8	\vec{A} 321232141232
P_3	\vec{A} 142141312142	P_6	\vec{B} 13B 13
P_4	\vec{A} 1434B 13	P_{10}	\vec{B} 3132313413
P_5	\vec{A} 241242312142	P_{11}	\vec{C} \vec{C}
P_6	\vec{A} 241431213432		

㉑ DS의 總數

各 PDS에 對하여 實施할 수 있는 各種 變換의 數 및 이 變換에 依하여 얻을 수 있는 誘導型 DS의 總數는 다음 表 3 및 表 4와 같다. 이 9408個 및 2688個의 DS들 中에는 ㉑에 있는 特殊 DS들과 ㉒에 있는 分割型 DS들이 包含된다. 그리고 單位距離符號의 總數를 求하려면 DS의 總數에 單位距離符號의 始作點 即 初

表 3. 14進符號用 PDS와 誘導型 DS의 總數

PDS	變換과 DS 順別變換의 數	回轉變換의 數	誘導型 DS의 數
P_1	24	14	336
P_2	24	14	336
P_3	24	14	336
P_4	12	14	168
P_5	24	14	336
P_6	12	14	168
P_7	24	14	336
P_8	24	14	336
P_9	24	14	336

P_{10}	24	14	336
P_{11}	24	14	336
P_{12}	24	14	336
P_{13}	24	14	336
P_{14}	24	14	336
P_{15}	24	7	168
P_{16}	24	14	336
P_{17}	24	14	336
P_{18}	24	14	336
P_{19}	24	14	336
P_{20}	24	14	336
P_{21}	24	14	336
P_{22}	24	14	336
P_{23}	24	14	336
P_{24}	12	14	168
P_{25}	12	14	168
P_{26}	24	14	336
P_{27}	24	14	336
P_{28}	24	14	336
P_{29}	24	7	168
P_{30}	24	14	336
P_{31}	24	14	336
總計			9408

表 4. 16進符號 PDS와 誘導型 DS의 總數

變換과 DS	順列變換의 數	回轉數의 數	誘導型의 DS
P_1	24	8	192
P_2	24	16	384
P_3	24	16	384
P_4	24	16	384
P_5	12	16	192
P_6	24	16	384
P_7	12	16	192
P_8	12	16	192
P_9	12	8	96
P_{10}	12	16	192
P_{11}	12	8	96
總計			2688

期條件의 數 $2^4=16$ 을 곱하면 된다.

⑥ 特殊 DS

各 PDS 및 그 誘導型으로부터 分割 및 非分割型에 關係없이 $(\vec{G} \& \vec{G} k)$ 로 表示되는 Lippel型 DS와 分割型 DS 中에서 $(\vec{H} k \& \vec{H} k)$ 로 表示되는 對稱型(또는 反射型) DS들을 求하여 보면 다음 表 5와 같다. 但

여기서 任意의 部分 DS($p_1 p_2 \dots p_i$)을 (\vec{H}) 또는 (\vec{G}) 로

表 5. 特殊 DS의 數

14 進 符 號				
PDS	特殊 DS	對稱型 DS	Lippel型 DS	備 考
P_{14}		48		
P_{15}			168	
P_{20}		48		
P_{29}			168	
合 計		96	336	
16 進 符 號				
PDS	特殊 DS	對稱型 DS	Lippel型 DS	備 考
P_1			192	
P_8		24		對稱型은 L型에 包含됨
P_9		24	96	
P_{10}		24		
P_{11}			96	
合 計		72	384	

表示하였으며 (\vec{H}) 의 要素의 配列이 完全히 逆으로 되어 있는 部分 DS($p_1 \dots p_2 p_1$)을 (\vec{H}) 로 表示하였다.

⑦ 分割型 DS

表 1 및 表 2에 있는 PDS들은 그 自體가 分割型인 境遇도 있으나 一般적으로 分割型 DS들은 PDS를 回轉變換시켰을 때 비로소 나타나게 된다. 이와같은 分割型 DS들을 分類하여 보면 表 6 및 表 7과 같다. 이

表 6. 14進符號中의 分割型 DS의 數

分割型 DS	(6-8)型	(7-7)型	(8-6)型	合 計
P_1		48		48
P_2	24		24	48
P_3		48		48
P_4		24		24
P_5	48		48	96
P_6		24		24
P_7	24		24	48
P_8	24		24	48
P_9		48		48
P_{10}		48		48
P_{11}	24		24	48
P_{12}	24	48	24	96

P_{13}	24		24	48
P_{14}	24	48	24	96
P_{15}		48		48
P_{16}		96		96
P_{17}	48		48	96
P_{18}	24		24	48
P_{19}	24		24	48
P_{20}	24	48	24	96
P_{21}	24		24	48
P_{22}	24		24	48
P_{23}		48		48
P_{24}		24		24
P_{25}		24		24
P_{26}	24		24	48
P_{27}	24		24	48
P_{28}	24	48	24	96
P_{29}		48		48
P_{30}	48		48	96
P_{31}	24		24	48
總 計	528	720	528	1776

表 7. 16進符號中의 分割型 DS의 數

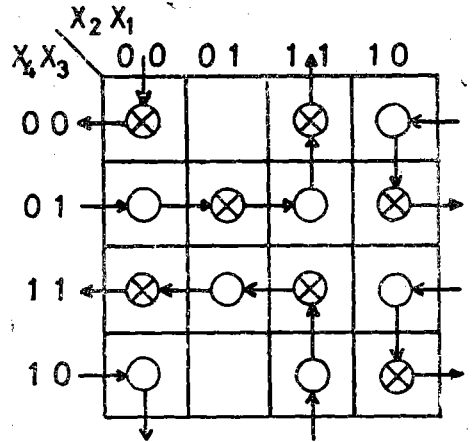
分割型 DS	PDS											合計
	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_7	P_8	P_9	P_{10}	P_{11}	
(8-8)型	24	48	48	48	24	0	24	24	24	48	24	336

表들에 나타나 있는 바와 같이 14進 符號에는 (6-8)型 (7-7)型 및 (8-6)型 등이 있으나 16進 符號에는 (8-8)型만이 있다. 그리고 非分割型 DS의 總數는 各 7632個 및 2352個이다.

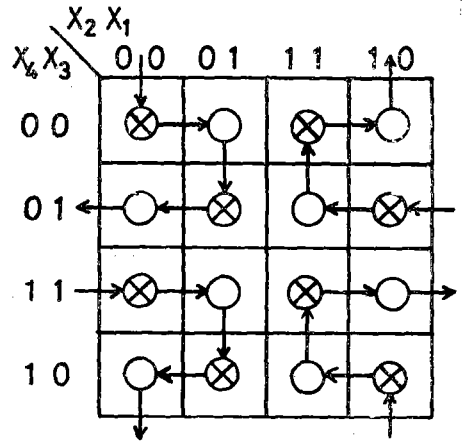
4. GC Counter 의 設計

3에서 記述한 DS들은 모두 그것들을 使用하여 14進 또는 16進 GC Counter를 設計할 수 있으며 어느 D^S 를 使用하는 것의 가장 能率의인가는 한 마디로 말할 수는 없다. 지금 펄스分配器를 使用하는 境遇를 생각해 보면 14進 符號의 境遇는 對稱型인 DS 即 表1의 P_{20} 또는 P_{14} , 또 16進 符號의 境遇는 對稱型이고 同時에 Lippel型인 表2의 P_9 의 誘導型 中에서 適當한 對稱型을 選擇하여 이에 依하여 Counter를 設計하는 것이 그 trigger 方程式³⁾이 가장 簡單하며 따라서 必要로 하는 gate의 數도 가장 적을 것이다. 그러므로 DS (232 \bar{A} 3212324) 및 (13 \bar{B} 13 \bar{B})에 對하여 그 Karnaugh map을 그려보면 各各 그림 1 (a) 및 (b)와 같다. 但

이 그림에서 出發點 符號는 (0000)로 하였고, Karnaugh map上에서 \otimes , \circ 는 各各 홀數제 및 짝數제 펄스 p 및 \bar{p} 에 依하여 trigger되는 것을 表示한다. 그리고 이 그림을 보면서 GC Counter를 構成하기 爲하여 F.F. $x_i (i=1, 2, 3, 4)$ 가 trigger 되는 條件을 나타내는



(a) DS(232 \bar{A} 3212324)



(b) DS(13 \bar{B} 13 \bar{B})

그림 1. Karnaugh map

trigger 方程式을 求하여 보면 그림 1 (a) 및 (b)에 對하여 各各 (7) 및 (8)을 얻는다.

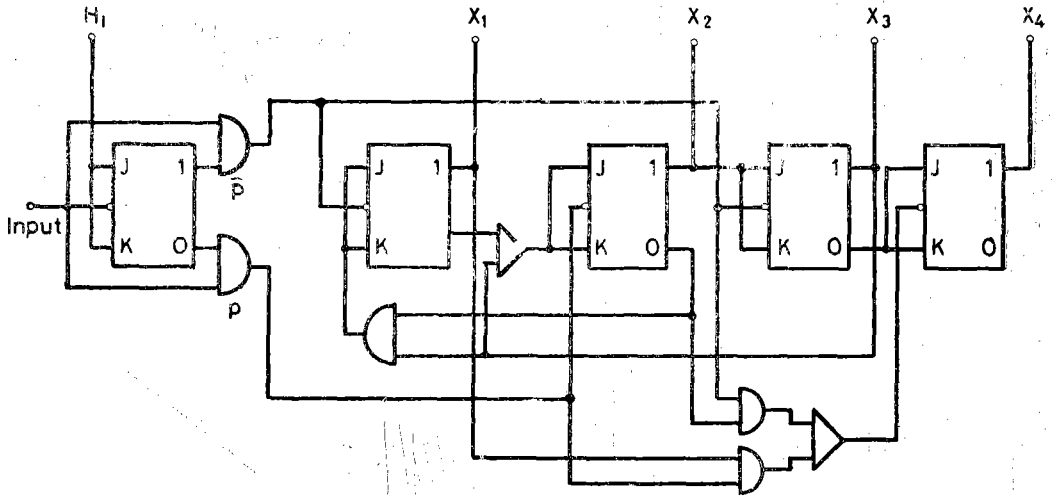
$$\left. \begin{aligned} T_1 &= x_3 \bar{x}_2 \bar{p} \\ T &= (x_3 + \bar{x}_1) \bar{p} \\ T_3 &= x_2 \bar{p} \\ T_4 &= \bar{x}_3 (\bar{x}_2 \bar{p} + x_1 p) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (7)$$

$$\left. \begin{aligned} T_1 &= p & T_3 &= x_1 \bar{p} \\ T_2 &= x_3 \bar{x}_1 \bar{p} & T_4 &= \bar{x}_3 \bar{x}_1 \bar{p} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (8)$$

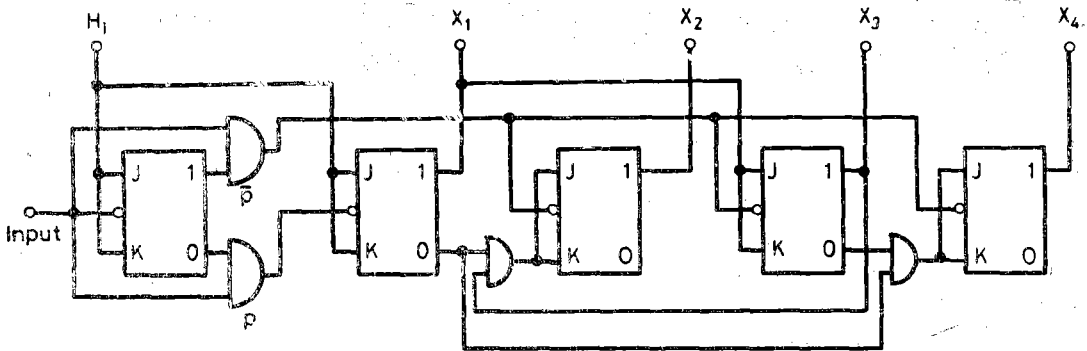
이 식들로부터 알 수 있는 바와 같이 一般的으로 對稱型 DS를 利用하여 counter를 構成할때 $2 \times 2n$ 進數의 境遇는 各 F.F.는 p 또는 \bar{p} 만에 依하여 trigger되도록

할 수 있으나 $2 \times (2n+1)$ 進數의 境遇는 4個의 F.F.中 하나는 반드시 p 에 依하여 trigger되기도 하고 또 \bar{p} 에 依하여 trigger되기도 하는 故로 必要한 gate의 數가 若干 많아진다.

다음에 (7) 및 (8)을 利用하여 14進 및 16進 GC Counter를 構成하여 보면 그림 2 (a) 및 (b)와 같으며 이 回路에 있어서 各 F.F.의 論理值의 變化狀況은 寫眞 1 (a) 및 (b)와 같다. 이 寫眞을 보면 各 Counter는 各各 DS(232A 3212324) 및 (13B 13B)에 따라서 動作하고 있음을 알 수 있다.



(a) DS(232A 3212324)



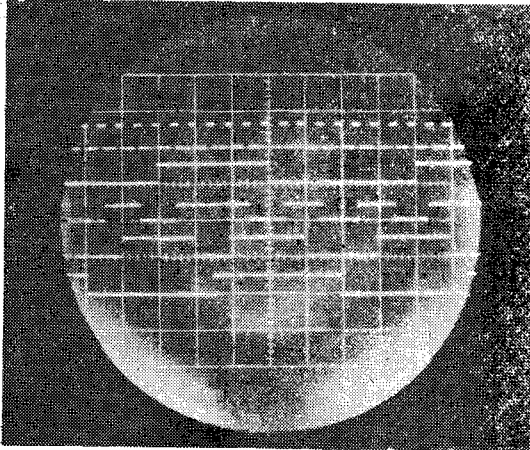
(b) (13B 13B)

그림 2. GC Counter의 例

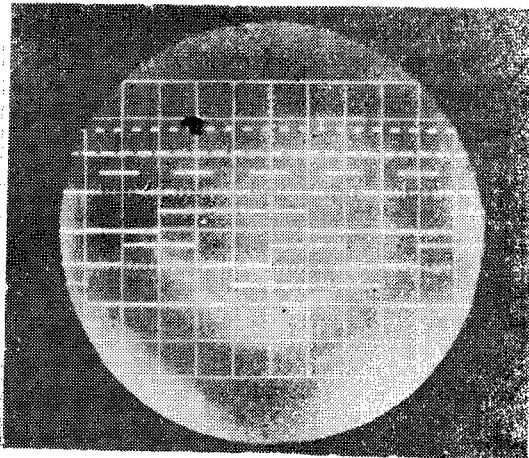
5. 結 論

그래이 符號 中에서 反復型 14進 및 16進 符號를 表

示하는 DS에 關하여 그 總數가 各各 9408個 및 2688個 있다는 것과 이들을 代表할 수 있는 PDS는 各各 31個 및 11個 있다는 것을 明白히 하였다. 그리고 特



(a) 14 進符號



(b) 16 進符號

寫眞 1 各 F.F.의 論理值 變化狀況
(4 個 入 力 變 化 時, x_1, x_2, x_3 및 x_4)

殊 DS 中에서 Lippel型 및 對稱型 DS의 數도 求하였 으며 또한 14進 符號用 DS 中 分割型에는 (6-8)型, (7-7)型 및 (8-6)型等이 있고 16進符號用 DS 中 分割型은 (8-8)型 밖에 없다는 것과 그 總數를 求하였 다. 그리고 trigger方程式이 가장 簡單하다고 볼 수 있는 DS를 利用하여 14進 및 16進 GC Counter를 設計 하였으며 實驗에 依하여 그 Counter의 動作을 確認하였다.

끝으로 本 研究는 1975年度 支給 產學協同財團研究 費에 依하여 이루어졌으며 이에 深甚한 謝意를 表하는 바이다.

參 考 文 獻

1. E.N. Gilbert: Gray Codes and Paths on the n-cube BSTJ pp.815~826, May 1958.
2. H. Ikeda et. al.: Classification and Coding of Unit Distance Decimal Codes, 信學論 Vol. 55-D No.10 pp.646~652 Oct. 1972
3. 金炳贊: 單位距離 12進符號의 몇가지 特性, 大韓電子工學會誌 Vol. 12 No.1 pp.7~11 Feb. 1975