論　文

單位距離 12進符號의 몇가지 特性

(Some Characteristics of Unit-Distance Duo-Decimal Codes)

金　炳　贊*
(Kim, Byung Chan)

要　約

12-tuple DS (digit sequence) (또는 coordinate sequence)의 여러 가지 性質에 關하여 論하였으며 그것을 統一的으로 表示하기 위한 31種의PDS(prime digit sequence)를 提案하여 이에 單純히 回轉變換 만을 實施함으로써 實際의 符號를 表示하는 348種의 DS를 얻을 수 있고 또 이것들에 對한 番號交換 即 順列(permutation)과 符號의 初期條件을 考慮하면 單位距離 12進 符號의 總數는 120,576種이며 이 中의 任意의 符號를 指定하든지 記述하든지 할 수 있도록 하였다. 그리고 對稱符號(反射符號), Lippel 符號等 特殊한 符號를 위한 DS들의 特性과 그것들의 回路化에 對하여도 言及하였다.

Abstract

Investigations on some characteristics of unit-distance duo-decimal codes are carried out, and 31 kinds of Prime Digit Sequence (PDS) are proposed in order to express various digit sequences. From these PDS, by means of the rotational conversion, 348 digit sequences which express the practical GC are obtained, and, from these digit sequences, it is found that there are 120576 unit distance codes by the permutation of the coordinate number and the initial condition of the codes. Some special codes such as reflected or symmetrical codes and Lippel codes, and their application to the practical GC counter are also studied.

1. 序　論

4빗트 單位距離符號 即 GC(gray code)의 一般的 性質에 關하여는 E.N. Gilbert[1]가 硏究 한 바 있고, 그 中 10進符號에 對한 論文은 池田[2] 等이 發表하였다. GC는 回轉角을 測定할 때 角度를 量子化하여 2進符號로 表示하는 境遇等에 便利한 符號이며 一般的으로 n-tuple[1]의 빗트로 構成되어 있다. 그리고 特히 最終符號와 始作符號 사이에도 역시 한 개의 빗트만이 달을 때 이것을 反復型(recycling) GC라 하고 그렇지 않은 것을 非反復型이라고 한다.

反復型 GC는 環狀計數器[3],[4](ring counter)型 符號라고도 할 수 있으며 여러 자리의 빗트가 同時에 變化하는 境遇가 있는 8421符號等에 比하여 發生하는 誤差를 한 자리의 빗트 以內로 줄일 수가 있는 것이 그 特徵이고 따라서 超高速 AD變換器等에 널리 使用되고 있다.

本 論文에서는 反復型 GC 만을 取扱하였으며 그것을 分類하고 相互關聯性 및 DS의 特徵等을 明確히 하였다.

* 正會員, 成均館大學校 理工大學 電子工學科
Dept. of Electronics Engineering, Sung Kyun Kwan Univ.
接受日字 : 1975年 1月 13日

2. 12-tuple DS의 一般的 性質

單位距離符號는 符號語가 變化할 때 變化하는 빗트

의 位置 卽 番號를 表示하는 數列로서 記述할 수가 있으며 이와같은 數列 卽 座標의 tuple을 DS라고 한다. 例를 들어 그림 1과 같은 境遇에 對한 DS는(123412132142)이다.

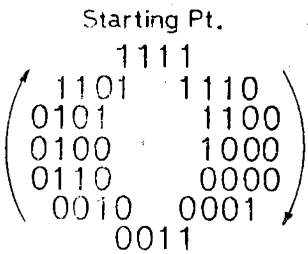


그림 1. 單位距離符號의 例

그러나 任意의 n-tuple이 반드시 DS를 表示한다고는 할 수가 없다. 例를 들어 (123432432123)에 있어서는 첫번째 및 7번째 變化 後의 Karnaugh map[5] 上의 位置는 같은 位置가 되는데, 이 理由는 部分 DS (234324) 안에 2, 3, 4가 各各 두 번씩 使用되어 있기 때문이며, 이로부터 DS에는 다음과 같은 性質이 있다는 것을 알 수가 있다. 卽 任意의 L-tuple

$$A=(a_1, a_2, \cdots\cdots a_L) \qquad (1)$$

(但 $L \leqq 2^n$, a_i는 1…n中의 한 數)

에 있어서 모든 部分 DS 안에는 적어도 한 個의 數字는 奇數回 使用되어 있어야 한다. 그리고 A自體는 모든 數字를 各各 偶數回 使用하고 있을 때 이 A는 反復型 GC用 DS이다.

(1)式이 任意의 單位距離 n빗트 L進符號의 DS로서 주어졌을 때 (1)까지 包含하여 (2)式으로 表示되는 L種의 變型이 可能하다.

$$A_i=(a_i, \cdots, a_L, a_1, \cdots, a_{i-1}) \qquad (2)$$

(但 $i=1, 2, \cdots, L$)

이와같이 A로부터 A_i를 얻는 操作을 DS의 回轉變換이라고 한다. 다음에 (2)式의 各 DS를 끝數字 a_{i-1}로부터 逆으로 써내려간 (3)式으로 表示되는 變換도 생각할 수가 있으며

$$A_{iI}=(a_{i-1}, \cdots a_1, a_L, \cdots a_i) \qquad (3)$$

이와같이 A_i로부터 A_{iI}를 얻는 操作을 DS의 逆變換이라고 한다. 따라서 任意의 DS가 주어지면 (2), (3)으로 表示되는 2L個의 變換이 可能하나, DS에 따라서는 後述하는 Lippel型과 같이 2L個이 모두 서로 다른 DS가 아닌 境遇가 있다. 다음에 생각할 수 있는 變換은 자리의 番號를 交換하여 얻을 수 있는 것이며 이와같은 操作에 依하여 얻을 수 있는 DS의 數는 最高 順列(Permutation)의 값 $n!$와 같다.

그리고 實際符號를 表示할 境遇에는 始作點 符號語를 指定해 주어야 하며 이에는 2^n種이 있다.

以上 列擧한 여러가지 變換法을 모두 適用하면 DS(1)로 부터 얻을 수 있는 反復型GC의 總數는 最高 $2L \cdot 2^n \cdot n!$種이다.

3. PDS(prime digit sequence)

4빗트 符號에는 2^4種의 符號語가 있으며 이것들은 서로가 補(Complement)의 關係에 있는 8雙 의符號語 卽 ($w=(x_4x_3x_2x_1)$, $\overline{w}=(\bar{x}_4\bar{x}_3\bar{x}_2\bar{x}_1)$) (但, $x_i=0$ 또는 1)로 構成되어 있다. 12-tuple DS가 表示하는 GC는 이 8雙의 符號語 中에서 12個의 符號語를 擇하여 隣接語 끼리 單位距離가 되도록 配列한 것이다. 따라서 이 境遇에는 서로가 補의 關係에 있는 符號語雙이 적어도 4雙은 있어야 한다. 이 中 한 雙의 符號語 w, $\overline{w}$에 注目하면 그림 2에서 表示한 바와 같이 w에서 $\overline{w}$로 變化하는데 4段階(또는 6段階 때는 8段階)의 部分 DS가 必要하며, $\overline{w}$에서 다시 w로 變化시키는 데는 各各 8段階(또는 6段階 또는 4段階)의 部分 DS가 必要하다. 그러나 逆變換까지를 考慮하면 8段階—4段階의 過程은 4段階—8段階의 過程과 같은 것이라고 볼 수 있으며 또 回轉變換을 考慮하면 4段階—8段階의 過程은 一般的으로

$$A_4=(1234\,p_5\,p_6\,p_7\,p_8\,p_9\,p_{10}\,p_{11}\,p_{12}) \qquad (4)$$

(但 $p_5 \cdots p_{12}$는 1…4中의 한數)

로 表示할 수가 있고 4個의 變數 中 任意의 2個는 各各 4回씩, 나머지 2個는 各各 2回씩 變化시키면 된다.

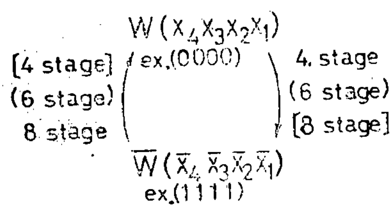


그림 2. 길이 12인 GC

다음에 6段階—6段階의 境遇를 생각해 보면 前半部 또는 後半部 어느 쪽에서든지 4段階에 該當되는 部分 DS가 있어서 이것을 回轉變換시키면 結局 (4)에 歸着되는 境遇와 그렇지 않는 境遇가 있는데, 後者의 境遇는 4個의 變數 中 하나를 6回 變化시키고 나머지 3個는 各各 2回씩 變化시키는 境遇이다. 따라서 이 境遇는 例를 들어 1을 6回 變化시킨다고 하면, 回轉變換을 考慮하여

$$A_6=1p_2 1p_4 1p_6 1p_8 1p_{10} 1p_{12} \qquad (5)$$

로 表示할 수 있다.

(4)式에서 $p_5 \sim p_{12}$를 (5)式에서 p_{2n}을 各各 決定하면

다음 表 1과 같이 總 110種의 DS를 얻는데 이 中 回轉變換 및 番號交換等에 依하여 얻을 수 있는 重復된 DS를 除外하면 23種의 DS만이 남는다. 이것들이 回轉變換 및 番號交換에 依하여 얻을 수 있는 DS들의 基本이 되는 것들이므로 PDS(prime digit sequence)[6] 라고 한다. 이 PDS들을 列擧하면 表 2와 같다.

表 2의 PDS에 回轉變換, 番號交換 및 逆變換等을 實施하면 모든 DS를 얻을 수가 있으나 이 中 $p_1, p_3, p_5, p_7, p_8, p_9, p_{10}, p_{12}, p_{14}, p_{16}, p_{19}, p_{20}, p_{21}, p_{22}, p_{23}$等 15種의 PDS들은 그것들의 逆變換을 內包하고 있으므로 回轉變換과 番號交換 만을 實施하여 모든 DS를 求한다는 原則을 세우면 $p_2, p_4; p_6, p_{11}, p_{13}, p_{15}, p_{17}, p_{18}$ 等 8種의 逆變換을 表示하는 PDS를 表 2의 PDS에 追加하여야 하는데 이것들은 表 3과 같다.

DS의 形態	DS의 數
$1^{(4)}\ 2^{(4)}\ 3^{(2)}\ 4^{(2)}$	7
$1^{(4)}\ 2^{(2)}\ 3^{(4)}\ 4^{(2)}$	14
$1^{(4)}\ 2^{(2)}\ 3^{(2)}\ 4^{(4)}$	5
$1^{(2)}\ 2^{(4)}\ 3^{(4)}\ 4^{(2)}$	39
$1^{(2)}\ 2^{(4)}\ 3^{(2)}\ 4^{(4)}$	14
$1^{(2)}\ 2^{(2)}\ 3^{(4)}\ 4^{(4)}$	7
$1^{(6)}\ 2^{(2)}\ 3^{(2)}\ 4^{(2)}$	24
總 計	110

表 1. 意義가 있는 DS의 數
(但, ( )內의 數字는 各 자리數의 變化回數임)

$p_1=(123412132142)$	$p_{13}=(123424143242)$
$p_2=(123412312142)$	$p_{14}=(123432123432)$
$p_3=(123412423424)$	$p_{15}=(123432132342)$
$p_4=(123413123143)$	$p_{16}=(123432132432)$
$p_5=(123413123413)$	$p_{17}=(123432134232)$
$p_6=(123413234232)$	$p_{18}=(123432312342)$
$p_7=(123414243242)$	$p_{19}=(123432313242)$
$p_8=(123421424324)$	$p_{20}=(123432314232)$
$p_9=(123423123423)$	$p_{21}=(123432341232)$
$p_{10}=(123423132432)$	$p_{22}=(121312141314)$
$p_{11}=(123424142342)$	$p_{23}=(121314121314)$
$p_{12}=(123424142432)$	

表 2. 第 1 PDS 群

$p_{24}=(p_{2I})=(123412132124)$
$p_{25}=(p_{4I})=(123413213413)$
$p_{26}=(p_{6I})=(123414342343)$
$p_{27}=(p_{11I})=(123423132342)$
$p_{28}=(p_{13I})=(123431321413)$
$p_{29}=(p_{15I})=(123432124323)$
$p_{30}=(p_{17I})=(123432123243)$
$p_{31}=(p_{18I})=(123431234232)$

表 3. 第 2 PDS 群

表 2 및 表 3에 表示된 것들이 回轉變換 및 番號交換 만을 實施 함으로써 모든 DS를 얻을 수 있는 基本 PDS들이다.

4. DS의 總數와 符號의 分類

表 2 및 表 3에 있는 31種의 PDS들에 對하여 3에서 既述한 方法을 適用하여 各種 DS와 GC를 求해 보면 一般的으로 한 個의 PDS로부터 얻을 수 있는 GC의 總數는 最高 $L\cdot 2^n\cdot n!=4608$種이다. 그러나 部分 DS $\vec{A}=(1234)$, $\vec{B}=(121314)$라 하면 $p_5=(\vec{A}, 1, 3, \vec{A}, 1, 3)$ $p_9=(\vec{A}, 2, 3, \vec{A}, 2, 3)$ $p_{14}=(\vec{A}, 3, 2, \vec{A}, 3, 2)$ $p_{23}=(\vec{B}, \vec{B})$ 라고 쓸 수가 있고 이것들의 回變轉換의 數는 6으로 縮退되므로 回轉變換에 依하여 얻을 수 있는 DS의 總數는 348이 된다. 한편 回轉變換을 考慮하면 $p_9, p_{10}, p_{13}, p_{14}, p_{22}, p_{23}$ 等의 番號交換은 12種 만이, p_{23}은 8種만이 各各 獨立이므로 DS의 總數는 7536種이 되고 이것들로부터 모든 12進 符號를 記述 할 수가 있으며 그 總數는 $2^4\times 7536=120,576$이다. 다음에 一般的으로 任意의 DS는 非分割型과 分割型으로 分類할 수가 있으며 後者를 (p, q)로 表示할 때 既述한 DS들은 表 4와 같이 分類된다.

DS의 特 徵		DS의 數	
分割型	(4, 8)型	240	2544
	(5, 7)型	576	
	(6, 6)型	912	
	(7, 5)型	576	
	(8, 4)型	240	
非分割型			4992

表 4. DS의 分類

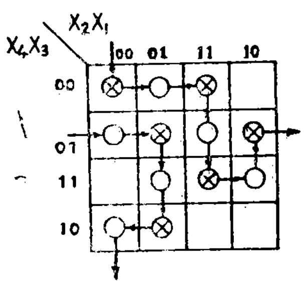
한편 任意의 部分 DS를 $\vec{B}=(b_1, \cdots b_k)$, $\overleftarrow{B}=(b_k, \cdots b_1)$ 라하면 分割型 DS 中에서 $(\vec{B}, n, \overleftarrow{B}, n)$型(但, n은 DS 內의 數들 中에서 가장 큰 數)이 表示하는 符號를 反射型(reflected) GC[7]라고 하며 이것은 n째 자리 빗트의 上半은 0(또는 1)이고 下半은 1(또는 0)이 되며 n째 자리 以外의 빗트들은 中央線을 對稱軸으로 하여 上下 對稱이 된다.

이와같은 現象은 n가 DS內의 數字 中 가장 큰 數가 아닌 境遇에도 생기므로 이 境遇를 包含하여 對稱型(symmetrical) GC라고 부르기로 한다. 이 對稱型 DS

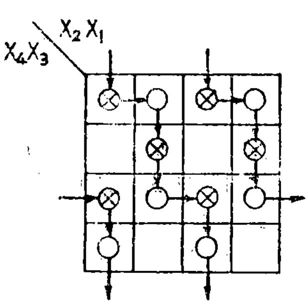
는 表2 및 表3에 있는 PDS에는 바로 나타나 있지 않으며 이것들에 回轉變換을 實施할 때 비로소 나타나게 된다. 即 (6,6)型으로부터 對稱型을 찾아 보면 p_{10}, p_{12}, p_{14} 및 p_{22}로부터 各各 (234231324321), (234241424321), (234321234321), (121413141213) 等을 얻는데 이것들에 番號交換을 實施하면 對稱型 DS의 總數는 $4\times4!=96$이고 또 對稱型 GC의 總數는 $2^4\times96=1536$이다. 다음에 特殊한 DS의 하나로서 分割型, 非分割型에는 關係 없이 $(\vec{c},k,\vec{c},k)$ (但, $\vec{c}$는 部分 DS)로 表示되는 Lippel型[6] DS를 찾아 보면 p_5, p_9, p_{14}, p_{23} 等이 있으며 이로부터 얻을 수 있는 Lippel DS의 總數는 $6\times4!\times4=576$이고 따라서 Lippel 符號의 總數는 $2^4\times576=9216$이다.

5. GC Counter의 構成

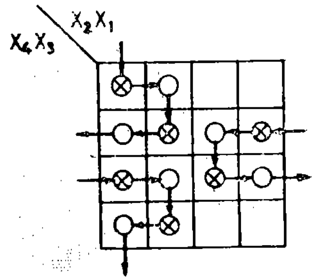
4.에서 記述한 많은 DS들 中에서 어느 것을 使用하여 GC counter[8]를 構成할 것인가는 한 마디로 말할 수 없다.



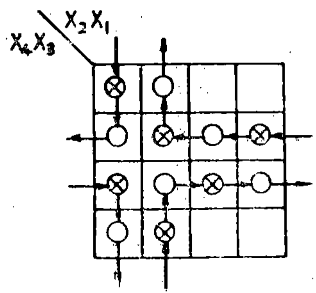
$T_1=(x_4+\bar{x}_4\bar{x}_3\bar{x}_2)p+\bar{x}_4x_3\bar{x}_2\bar{p}$
$T_2=x_3\bar{x}_1p+\bar{x}_4\bar{x}_3\bar{p}$
$T_3=\bar{x}_4x_2x_1p+x_4x_1\bar{p}$
$T_4=x_3\bar{x}_2p+(x_2+\bar{x}_3\bar{x}_1)\bar{p}$
(a) (123414214314)



$T_1=\bar{x}_3p$
$T_2=x_3\bar{p}$
$T_3=x_4p+\bar{x}_4\bar{p}$
$T_4=(\bar{x}_2x_1+x_2\bar{x}_1)p+(x_2x_1+\bar{x}_2\bar{x}_1)\bar{p}$
(b) (134234134234)



$T_1=p$
$T_2=x_3\bar{x}_1\bar{p}$
$T_3=\bar{x}_2x_1\bar{p}$
$T_4=(x_1x_2+\bar{x}_3\bar{x}_1)\bar{p}$
(c) (131214121314)



$T_1=x_2p$
$T_2=x_3\bar{p}$
$T_3=\bar{x}_2p$
$T_4=\bar{x}_3\bar{p}$
(d) (321234321234)

그림 3. 몇가지 DS와 그 trigger 方程式

지금 펄스 分配器[2]를 使用하는 境遇에 DS 中 마지막 數字가 4인 것들 中에서 몇가지 例를 들어 各各의 Karnaugh Map와 trigger 方程式을 誘導해 보면 그림 3a∼d와 같다. 但, 여기서 始作點은 (○○○○)으로 하였고 그림들 中에서 ⊗, ○는 各各 奇數째 및 偶數째 펄스 p, $\bar{p}$에 依하여 trigger되는 것을 表示하며 Map上의 空白地 같은 don't care 條件을 最大限度로 利用하였다.

以上의 몇가지 例에 對한 trigger方程式들을 보면 그림 3d의 對稱型의 境遇가 가장 簡單하다. 그리고 이것

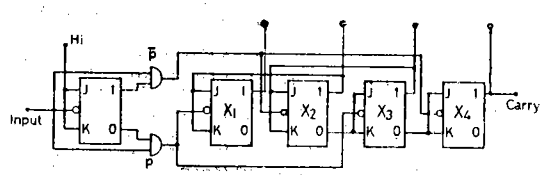


그림 4. 對稱型 DS의 回路化例

들을 回路化할 때 3a 3b 3c의 境遇에는 4個의 FF 以外에 몇個의 論理 gate들이 必要하나 3d의 境遇에는 4個의 FF 以外에는 論理 gate들이 必要하지 않다. 따라서 가장 經濟的으로 回路化할 수 있는것은 3d라고 생각되므로 이것을 回路化해보면 그림 4와 같다.

6. 結 論

回轉變換 및 番號交換 即 順列 만을 생각하여 7536種의 모든DS를 求할 수 있는 31種의 PDS를 提案하여 이것들로부터 얻을 수 있는 GC의 總數는 始作點까지 考慮하여 120576種이 있다는 것을 明確히 하였다. 그리고 7536種의 DS 中에서 分割型과 非分割이 各各 2544種 및 4992種 있으며 分割型 中에서 對稱型이 96種 있고 Lippel 型이 576種 있다는 것도 明確히 하였다. 다음에 몇가지 代表的인 DS들의 回路化에 對한 檢討를 하여 trigger 方程式을 誘導하여 보았으며 이것들 中에서 對稱型 DS의 回路化가 가장 經濟的인 것 같다는 것도 明示하였다. 끝으로 本 研究는 本校 湖巖 學術研究助成費로서 이루어졌으며 이에 謝意를 表하는 바이다.

參考 文獻

1. E.N. Gilbert: Gray Codes and Paths on the n-cube BSTJ pp. 815—826, may 1958.
2. H. Ikeda. et. al.: Counter Design for Unit-Distance Decimal Codes 信學論 Vol.54—C No. 9 pp. 853—854 Sept. 1971.
3. W.E. Hansalik: Practical Ring Counter IEEE Trans. C—17. Vol. 9pp. 899—900 Sept. 1958.
4. Z.C. Tan: A New Tunnel Diode Ring Counter Proc. IEEE Vol.61 No. 4 pp. 489—490 April 1973.
5. F.G. Heath: Digital Computer Design p. 42 Oliver & Boyd, Edinburgh, 1969.
6. H.Ikeda et. al.: Classification and Coding of Unit Distance Decimal Codes 信學論 Vol.55—D No. 10 pp. 646—652 Oct. 1972.
7. G.A. Maley et. al: The Logical Design of Transister Digital Computers p. 25 Prentice-Hall N.J. 1963.
8. M.Cohn et. al.: A Gray Code Counter IEEE Trans. C—18 No. 7 pp. 660—661 July 1969.