觀測子의 線型確率連續시스템에의 適用

논 문
24～5～6

An Application of Observer to the Linear Stochastic Continuous Systems

高 明 三* · 洪 錫 敎**
(Myoung Sam Ko) (Suckyo Hong)

Abstract

This Paper deals with an application of Luenberger Observer to the Linear Stochastic Systems. The basic technique is the use of a matrix version of the Maximum Principle of Pontryagin coupled with the use of gradient matrices to derive the gain matix for minimum error covariance. The optimal observer which is derived turns out to be identical to the well-known Kalman-Bucy Filter.

1. 緖 論

現代 制御工學의 大部分은 制御하려는 시스템의 모든 狀態變數를 直接測定에 의하여 求할 수 있다는 가정하에 이루어지고 있다. 그러나 실제 문제에서는 상태변수를 직접측정에 의하여 구할 수 없는 경우가 많다. 이런 경우 이 상태변수를 推定(Estimate)하거나, 近似化시키는 장치가 필요하게 된다. 이런 장치를 觀測子(observer)라 하고 1964년 Luenberger[1)]에 의해 처음 提示되었다.

Luenberger는 線型連續 時不變시스템에서의 觀測子를 求했고, [1)2)3)] Tse, Athans등이 이를 離散시스템까지 확장시켰다. [4)5)]

또 雜音이 들어가는 確率시스템의 狀態變數 推定은 Kalman, Bucy에 依해 이루어졌다. [6)]

本 論文에서는 Luenberger의 觀測子를 確率시스템에 적용시켜 誤差共分散(Error Covariance)을 求하고 이를 最小로 하는 觀測子(最適觀測子)를 Pontryagin의 最大 原理를 利用하여 求하였다.

2. Luenberger의 觀測子

다음과 같은 시스템 S를 생각하자.

$$S:\ \dot{X}(t)=AX(t)+Du(t)$$
$$Y(t)=CX(t) \tag{1}$$

여기서 $X(t)$는 $n\times1$ 상태벡타, $u(t)$는 $r\times1$ 入力벡타, $y(t)$는 $m\times1$ 出力벡타이고, A는 $n\times n$行列, D는 $n\times l$ 行列, C는 $m\times n$ 行列이다.

Luenberger에 의하면[3)] 이 시스템 S의 상태를 觀測하는 觀測子는

$$O:\ \dot{z}(t)=Bz(t)+Gy(t)+TDu(t) \tag{2}$$

로 주어진다. 여기서 $z(t)$는 $l\times1$ 벡타이고 B는 $l\times l$ 行列, G는 $l\times m$行列, T는 $l\times n$ 行列이고 $l\leq n$이다.

또 $$TA-BT=GC \tag{3}$$

를 만족하는 T가 存在한다고 가정하고 $z(t_0)=TX(t_0)$ 이면

$$z(t)=TX(t),\ \forall\ t\geq t_0 \tag{4}$$

이다.

시스템 S와 O는 같은 次元일 필요는 없고 만약 A와 B가 共通 固有値(Eigenvalue)를 갖지 않으면 $TA-BT=GC$의 有一解 T가 存在함을 알 수 있다. [1)]

가장 간단한 觀測子는 $T=I$인 경우로서 O는 S와 같은 次元이 되며

$$B=A-GC \tag{5}$$

이고 $z(t)=X(t)$가 된다. 이 경우 觀測子는

$$\dot{z}(t)=(A-GC)\ z(t)+Gy(t)+Du(t) \tag{6}$$

로 表示되며 이를 同一觀測子(Identity Observer)라 한다. [3)]

만약 시스템 S가 完全可觀測이면, 적당한 G의 선택으로 $(A-GC)$의 固有値를 任意로 정할 수 있기 때문에, 同一觀測子는 G에 의해서 決定된다.

3. 確率시스템에의 適用

지금 Luenberger의 觀測子를 적용시키고저하는 확율시스템 P를 다음과 같이 정의한다.

$$P:\ \dot{X}(t)=A(t)X(t)+D(t)u(t)+\xi(t)$$
$$y(t)=C(t)X(t)+\eta(t) \tag{7}$$

여기서 $\xi(t)$, $\eta(t)$는 白色雜音으로

$$E[\xi(t)]=E[\eta(t)]=0$$

*正會員 : 서울大學校敎授(工博) · 當學會編修理事
**正會員 : 서울大學校 大學院(博士過程)
接受日字 : 75年 8月 14日

$$\mathrm{Cov}[\xi(t)\quad \xi(t)]=E[\xi(t)\xi'(t)]=Q(t)\delta(t-\tau)$$
$$\mathrm{Cov}[\eta(t),\ \eta(t)]=E[\eta(t)\eta'(t)]=R(t)\delta(t-\tau) \quad (8)$$

$Q(t)$: $n\times n$ positive semidefinite 行列

$R(t)$: $m\times m$ positive definite 行列 이다.

또 初期値 $X(t_0)$도 Gaussian 확율변수(random variable)로 $E[(X(t_0)]=X_0$

$$\mathrm{Cov}[X(t_0), X(t_0)]=E[(X(t_0)-\bar{X}_0)(X(t_0)-\bar{X}_0)']=\Sigma_0 \quad (9)$$

라 가정한다.

이 시스템 P에 (6)과 같은 同一觀測子를 적용하면

$$\dot{z}(t)=(A(t)-G(t)C(t))z(t)+G(t)y(t)+D(t)u(t)$$
$$z(t_0)=\bar{X}_0 \quad (10)$$

과 같이 된다.

觀測子의 出力을 $\hat{X}(t)$라 놓면 $z(t)=\hat{X}(t)$이므로

$e(t)=X(t)-\hat{X}(t)$ 에서

$$\dot{e}(t)=\dot{X}(t)-\dot{\hat{X}}(t) \quad =\dot{X}(t)-\dot{Z}(t)$$
$$=AX(t)+D(t)u(t)+\xi(t)-[(A(t)-G(t)C(t)Z(t)+G(t)y(t)+D(t)u(t)]$$
$$=(A(t)-G(t)C(t))\ e(t)+\xi(t)-G(t)\eta(t) \quad (11)$$

이고

$$e(t_0)=X(t_0)-X(t_0) \quad =X(t)-z(t_0)$$
$$=\bar{X}(t_0)-\bar{X}_0 \quad (12)$$

이 된다.

여기서 $E[e(t_0)]=0$가 되므로 이 觀測子는 바이어스가 없는 推定(unbiased estimate)이 된다.

誤差共分散(Error Covariance) $\Sigma(t)\triangle E[e(t)e'(t)]$는 誤差에 關한 微分方程式이 線型이므로

$$\dot{\Sigma}(t)=(A(t)-G(t)C(t))\Sigma(t)+\Sigma(t)(A(t)-G(t)C(t))+Q(t)+G(t)R(t)G'(t) \quad (13)$$

$$\Sigma(t_0)=E[e(t_0)e'(t_0)]$$
$$=E[(X(t_0)-z(t_0))(X(t_0)-z(t_0))']$$
$$=E[X(t_0)-\bar{X}_0)\ \ (X(t_0)-\bar{X}_0)']$$
$$=\Sigma_0 \quad (14)$$

와 같이 된다. [7]

이 共分散 $\Sigma(t)$ 를 最小로 하기 위해 임의의 시각 $\tau>t_0$에서

$$J=E[e'(\tau)e(\tau)] \quad (15)$$

를 생각해 보자.

t_r 演算子를 사용하면

$$J=E[e'(\tau)(\tau)]=t_rE(e(\tau)e'(\tau)]$$
$$=t_r\Sigma(\tau) \quad (16)$$

이 된다.

그러면 觀測子는

$$\dot{\Sigma}(t)=(A(t)-G(t)C(t))\Sigma(t)+\Sigma(t)(A(t)-G(t)C(t))+Q(t)+G(t)R(t)G'(t)$$

를 만족하고 $J=t_r\Sigma(\tau)$를 最小로 하는 $G(t)$를 求하는 문제가 된다.

여기에 Pontryagin의 最大原理를 적용하기 위해 $\Sigma(t)=[\sigma_{ij}(t)]$, $P(t)=[P_{ij}(t)]$라 놓면 Hamiltonian H는

$$H=\sum_{i,j}^{n}\sigma_{ij}(t)P_{ij}(t)=t_r[\dot{\Sigma}(t)P'(t)] \quad (17)$$

가 된다.

식 (17)에 식 (13)을 代入하면

$$H=t_r[A(t)\Sigma(t)P'(t)]-t_r[G(t)C(t)\Sigma(t)P'(t)]+t_r[\Sigma(t)A'(t)P'(t)]-t_r[\Sigma(t)C'(t)G'(t)P'(t)]+t_r[Q(t)P'(t)]+t_r[G(t)R(t)G(t)P'(t)] \quad (18)$$

이 되며 最大原理로 부터

$$\frac{\partial H}{\partial G}=0 \quad (19)$$

$$\dot{P}^*((t)=-\frac{\partial H}{\partial\Sigma(t)} \quad (20)$$

이 되고 橫斷性條件(traniversality condition)으로부터

$$P^*(\tau)=\frac{\partial}{\partial\Sigma(\tau)}(t_r\Sigma(\tau)) \quad (21)$$

이 된다. [8]

부록에 있는 傾斜行列의 公式을 利用하면 식 (19)에서

$$-P^*(t)\Sigma^{*\prime}(t)C'(t)-P^{*\prime}(t)\Sigma^*(t)C'(t)+P^*(t)G^*(t)R'(t)+P^{*\prime}(t)G^*(t)R(t)=0 \quad (22)$$

식 (20)에서

$$\dot{P}^*(t)=-A'(t)P*(t)-C'(t)G^{*\prime}(t)P^*(t)-P^*(t)A(t)-P^*(t)G(t)C(t)$$
$$=-P^*(t)[A(t)-G^*(t)C(t)]-[A(t)-G(t)C(t)]'P^*(t) \quad (23)$$

식 (21)에서

$$P^*(\tau)=I \quad (24)$$

를 얻는다.

식 (23), (24)에서 $P^*(t)$가 對稱 positive definite 行列임을 알 수 있다. 즉$P^*(t)=P^{*\prime}(t)$이고 $[P^*(t)]^{-1}$가 存在한다.

따라서 식 (22)는

$$2\ G^*(t)R(t)=\Sigma^{*\prime}(t)C'(t)+\Sigma^*(t)C'(t) \quad (25)$$

이 되고 $\Sigma^*(t)$가 대칭행렬이므로

$$G^*(t)=\Sigma^*(t)C'(t)R^{-1}(t) \quad (26)$$

이 된다.

식 (26)의 結果를 식 (13)에 代入하면

$$\dot{\Sigma}^*(t)=[A(t)-\Sigma^*(t)C'(t)R^{-1}(t)C(t)]\Sigma^*(t)+\Sigma^*(t)[A'(t)-C'(t)R^{-1}(t)C(t)\Sigma^*(t)]+Q(t)+\Sigma^*(t)C'(t)R^{-1}(t)R(t)R^{-1}(t)C(t)\Sigma^*(t)$$
$$=A(t)\Sigma^*(t)+\Sigma^*(t)A'(t)+Q(t)-\Sigma^*(t)C'(t)R^{-1}(t)C(t)\Sigma^*(t) \quad (27)$$

이 된다.

또 초기조건은

$$\Sigma^*(t_0)=\Sigma_0 \tag{28}$$

이므로 觀測子의 誤差共分散行列은 식 (27), (28)에 의해 最適觀測子를 決定한다.

이상에서 관측자는

$$\dot{\Sigma}(t)=(A(t)-G^*(t)C(t))\Sigma(t)+G^*(t)y(t)+D(t)u(t) \tag{29}$$

이고 여기서 $G^*(t)=\Sigma^*(t)C'(t)R^-(t)$이며 $\Sigma(t)$는 $\Sigma^*(t)=A(t)\Sigma^*(t)+\Sigma^*(t)A'(t)+Q(t)-\Sigma^*(t)C'(t)R^{-1}(t)C(t)\Sigma^*(t)$ 을 만족해야 한다.

例題 : 그림 1과 같은 시스템을 생각하자.

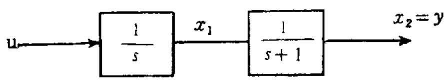

그림 1. 二次元 시스템

Fig.1 Second order system

a) 雜音이 없는 경우

그림 1에서 $\dot{x}(t)=\begin{pmatrix}0&0\\1&-1\end{pmatrix}x(t)+\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}u(t)$ (31)

$$y(t)=[0\ 1]x(t)$$

이 된다.

$G=\begin{pmatrix}g_1\\g_2\end{pmatrix}$라 놓면 $A-GC=\begin{pmatrix}0&-g_1\\1&-1-g_2\end{pmatrix}$가 되고 원 시스템의 固有値가 (0, −1)이므로 觀測子의 固有値를 陰으로 절대값이 큰 값 즉 (−2, −2)로 잡으면 $g_1=4$, $g_2=-5$가 된다.

따라서 Luenberger의 同一觀測子는

$$\dot{Z}(t)=\begin{pmatrix}0&-4\\1&4\end{pmatrix}z(t)+\begin{pmatrix}4\\-5\end{pmatrix}y(t)+\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}u(t) \tag{32}$$

가 되고 出力은 $x(t)=z(t)$가 된다.

(b) 雜音이 들어가는 경우

$$\dot{x}(t)=\begin{pmatrix}0&0\\1&-1\end{pmatrix}x(t)+\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}u(t)+\begin{pmatrix}\xi(t)\\0\end{pmatrix} \tag{33}$$

$$y(t)=[0\ 1]x(t)+\eta(t)$$

여기서 $Q=\begin{pmatrix}q_{11}&0\\0&0\end{pmatrix}$, $R=r_{11}>0$라 가정한다. 이시스넴의 觀測子는 $G=\begin{pmatrix}g_1\\g_2\end{pmatrix}$라 놓면 식 (13)으로 부터

$$\dot{\Sigma}(t)=\begin{pmatrix}0&-g_1\\1&-1-g_2\end{pmatrix}\Sigma(t)+\Sigma(t)\begin{pmatrix}0&1\\-g_1&-1-g_2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}q_{11}&0\\0&0\end{pmatrix}+r_{11}\begin{pmatrix}g^2_1&g_1g_2\\g_1g_2&g_2^2\end{pmatrix} \tag{34}$$

를 만족하고 $J=t_r\Sigma(\tau)$를 最小로 하는 $G=\begin{pmatrix}g_1\\g_2\end{pmatrix}$를 구하면 된다.

여기에 最大原理를 적용시키기 위해 Hamiltonian을 구하면

$$H=t_r[\dot{\Sigma}(t)P'(t)]$$

$$=t_r\left[\begin{pmatrix}\dot\sigma_{11}&\dot\sigma_{12}\\\dot\sigma_{21}&\dot\sigma_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}P_{11}&P_{21}\\P_{12}&P_{22}\end{pmatrix}\right]$$

$$=\dot\sigma_{11}P_{11}+\dot\sigma_{12}P_{12}+\dot\sigma_{21}P_{21}+\dot\sigma_{22}P_{22} \tag{35}$$

가 된다. $\sigma_{11}P_{11}+\sigma_{12}P_{12}+\sigma_{21}P_{21}+\sigma_{22}P_{22}$

식 (35)에 식 (34)에서 구한 $\dot\sigma_{11}$, $\dot\sigma_{12}$, $\dot\sigma_{21}$, $\dot\sigma_{22}$를 대입하고

$\frac{\partial H}{\partial g_1}=0$, $\frac{\partial H}{\partial g_2}=0$를 만족하는 G를 구하면 식 (26)과 같이

$$G=\begin{pmatrix}g_1\\g_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\sigma_{11}&\sigma_{12}\\\sigma_{21}&\sigma_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}r_{11}^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{\sigma_{12}}{r_{11}}\\\frac{\sigma_{22}}{r_{11}}\end{pmatrix} \tag{36}$$

로 되고 이를 다시 (34)에 대입하면

$$\dot\sigma_{11}(t)=-\frac{\sigma_{12}^2}{r_{11}}+q_{11}$$

$$\dot\sigma_{12}(t)=\sigma_{11}-\sigma_{12}-\sigma_{12}\sigma_{22}/r_{11} \tag{37}$$

$$\dot\sigma_{22}(t)=2(\sigma_{12}-\sigma_{22})-\sigma_{22}^2/r_{11}$$

를 만족해야 한다.

正常狀態에서의 식 (35)의 解는 右邊을 零으로 놓았을 때이므로

$$g_1=\sqrt{q_{11}/r_{11}}$$

$$g_2=-1+\sqrt{1+2\sqrt{q_{11}/r_{11}}} \tag{38}$$

를 얻는다. [7]

따라서 雜音이 들여가는 確率시스템의 最適觀測子는

$$\begin{pmatrix}\dot Z_1(t)\\\dot Z_2(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&-g_1\\1&-1-g_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}z_1(t)\\z_2(t)\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}g_1\\g_2\end{pmatrix}y(t)+\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}u(t) \tag{39}$$

단 $g_1=\sqrt{q_{11}/r_{11}}$, $g_2=-1+\sqrt{1+2\sqrt{q_{11}/r_{11}}}$ (40)

이 되고 이를 그림으로 나타내면 그림 2가 된다.

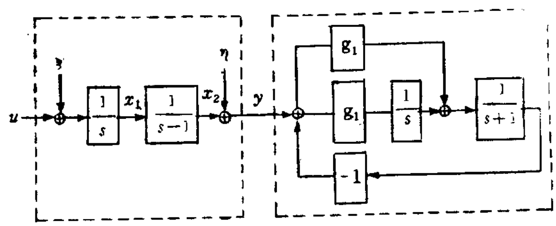

그림 2. 二次元 시스템과 최적관측자

Fig. 2. Scond Order System and Optimal Observer.

4. 結　論

Luenberger의 觀測子中 同一觀測子를 確率시스템에 적용시켜 誤差 및 誤差共分散을 求하고, 誤差를 最小로 하는 最適觀測子는 $J=t_r\Sigma(\tau)$를 最小로 하는 $G(t)$를 求하는 문제가 됨을 밝혔으며 이를 Pontryagin의 最大原理와 傾斜行列을 使用하여 求하였다.

이 結果는 이미 잘 알려진 Kalman Filter와 同一함이 밝혀졌으며 이를 간단한 例題를 통하여 보여주었다

앞으로 低次元觀測子(Low Order Observer)를 確率시스템에 적용시켰을 경우의 最適觀測子가 구해지면 확율시스템에서의 狀態變數 推定에 많은 도움을 주게 될 것이다.

부　록

X를 $n\times n$行列로 $[x_{ij}]$라 하면 傾斜行列 $\frac{\partial f(X)}{\partial X}$는 $\frac{\partial f(x)}{\partial x_{ij}}$ $i,j=1,2,\cdots n$로 表示되며 t_r 演算子를 이용한 傾斜行列의 몇가지 공식을 나열하면 다음과 같다.

$$\frac{\partial}{\partial X}t_r[X]-I \tag{A.1}$$

$$\frac{\partial}{\partial X}t_r[AX]=A' \tag{A.2}$$

$$\frac{\partial}{\partial X}t_r[AX']=A \tag{A.3}$$

$$\frac{\partial}{\partial X}t_r[AXB]=A'B' \tag{A.4}$$

$$\frac{\partial}{\partial X}t_r[AX'B]=3A \tag{A.5}$$

$$\frac{\partial}{\partial X}t_r[XX]=2X' \tag{A.6}$$

$$\frac{\partial}{\partial X}t_r[XX']=2X \tag{A.7}$$

$$\frac{\partial}{\partial X}t_r[X^n]=nX^{n-1})' \tag{A.8}$$

$$\frac{\partial}{\partial X}t_r[AXBX]=A'X'B'+B'X'A' \tag{A.9}$$

$$\frac{\partial}{\partial X}t_r[AXBX']=A'X'B'+AXB \tag{A.10}$$

$$\frac{\partial}{\partial X}t_r[\exp(X)]=\exp[X'] \tag{A.11}$$

參 考 文 獻

1) D.G.Luenberger, "Observing the State of a Liner System," IEEE Trans. Mil. Electron. Vol MIL—8, pp.74—80, April 1964
2) —, "Observers for Multivariable Systems," IEEE Trams. Autonat. Contr., Vol. AC—11, pp. 190—197, Apr. 1966
3) —, "An Introducion to Observers," IEEE Trams. Automat. Contr., Vol. AC—16, pp, 596—602, Dec. 1971
4) E.Tse and M.Athans, "Optimal Minimal-Order Observer-Estimators for Discrete Linear Time-Varying Systems," IEEE Trams. Automat. Contr., Vol. AC—15, pp.416—426, Aug. 1970
5) E.Tse, "Observer-Estimators for Discerete Time Systems," IEEE Trams. Automat. Contr., Vol. AC—18, pp.19—16, Feb. 1973
6) R.Kalman and R.Bucy, "New Results in Linar Filtering and Prediction Theory," Trans. ASME, J.Busic Eng. Vol.83, 1961
7) H.L. Van Trees, "Detection, Estimation and Modulation Theory, Part I," Chap. 6, New York, John Wiley & Sons, Inc., 1968
8) M.Athans, "The Matrix Minimum Principle," Information and Control, Vol. 11, pp.592—606, 1968