

漂流信賴度を 고려한 經濟的 回路 設計에 대한 몬테칼로법의 適用

논문
24~5~2

An Application of the Monte Carlo Method to the Economical Circuit Design in Consideration of the Drift Reliability

車 均 鉉*
(Tchah Kyun Hyon)

Abstract

In this paper an application of the Monte Carlo method to optimum circuit design is discussed. T. Tsuda and T. Kiyono's algorithm based on the Monte Carlo method for solving multiple simultaneous nonlinear equations is generalized to apply it to finding solutions of the constrained nonlinear optimization problem.

The generalized algorithm derived here is directly applied to economical circuit design. In the circuit design, the object function is a cost function which is related to the cost of each circuit component. The constraint is the variance of the total system expressed by the variances of each circuit component.

The design is to be determined so that the circuit has specified drift reliability with minimum cost. A practical example of economical circuit design and a general nonlinear function minimization is presented with good results.

1. 緒 論

電子機器의 設計는 回路設計가 수반되어야 하며 回路設計는 經濟性과 信賴性을 동시에 고려해야한다. 경제성에 치우치면 信賴성이 적고 信賴성에 치우치면 經濟성이 부족하다. 그러므로 양자의 균형있는 設計가 필요하다. 信賴性 回路設計 方法은 最惡狀態設計, 모멘트設計, 몬테칼로設計등이 있다. 最惡狀態設計는 1962년 H.S.Scheffer, J.J. Duffy, B.C.Spradlin씨 등이 設計한 方法으로써 回路의 部品이 許容公差의 극한치에 도달했을때 回路가 信賴性있게 動作하도록 設計하는 것이다. 最惡狀態設計는 信賴度 測定이 곤란하고 回路가 여러가지 原因에 의해서 실패한다면 이 상이한 原因에 對한 不良확율을 구별할수 없으며 출력의 平均値 확율과 極限値 확율을 區別할수없다³⁾ 모멘트設計는⁸⁾ 1963년 D.G. Mark씨가 創案한 設計方法으로 部品の 標準偏差와 平均値를 測定하여 回路性能이 정한 限界 이내에 있도록 確率을 決定하는것이다. 이 方法은 部品定數의 度數分布 特性의 첨도(skewness)를 고려하지 않았고 部品定數와 性能特性간의 汎函數關係(functional relationship)가 曲線의 平均値 부분에서 심한 曲率을 가지면 平均値에서 函數의 기울기에 의해서 決定되는 直線으로 曲線을 近似시킨것이므로 정확치 못

한 結果를 갖어올수있다.⁹⁾ 몬테칼로 設計는²⁾ 1962년 L. Hellerman씨 등이 試圖한것으로 수학적 모델에 의하여 많은數의 回路模型을 統計的으로 시뮬레이션(simulation)하는 것이다. 構成部品이 랜덤(random)하게 선택되고 각 回路모델에 對한 性能이 특정한 回路部品에 對해서 決定된다. 특정한 限界를 갖는 여러 模型의 性能을 비교 함으로써 다른 여러方法보다도 정확한 回路의 信賴度를 계산할수 있고 最惡狀態設計의 단점을 除去할수 있다. 그러나 不良을 확인하고 수정하는데는 별로 도움을 주지 못하고 再設計정보를 적게 提供한다.⁹⁾

이상 說明한 設計方法은 각자 方法의 차이는 있으나 共通으로 초기 設計값을 定하여 部品の 許用公差변화에 따르는 性能目標値의 變動을 구하여 信賴度를 계산하고 信賴度가 요구하는 信賴度보다 나쁘면 再設計하여 다시 信賴度를 구하는 것이다. 그런데 信賴度를 구하는 過程에서 部品の 價格은 정확히 반영하지 못한다. 本論文은 몬테칼로 方法을 이용하여 經濟性과 信賴性을 고려한 새로운 回路設計 方法과 算法을 提示한다.

2. 問題設定 및 定義

本論文에서는 몬테칼로 方法을 이용하여 最適回路設計方法과 그 算法을 提示한다. 여기서 最適回路設計라 함은 性能目標値의 限界를 定하고 制約條件函數를 만족하고 回路價格 函數를 最小로하는 部品の 標準偏差를 구하는 것을 말한다. 性能目標値라 함은 (1)식과

*正會員: 崇田大學校助教授

**接受日字: 1975年 5月 31日

같은 일반적인 回路方程式에서

$$U=f(R_{(1)}, R_{(2)}, \dots, L_{(1)}, L_{(2)}, \dots, C_{(1)}, C_{(2)}, \dots) \quad (1)$$

部品定數 R, L, C 에 의해서 決定되는 마디전압, 나무 가지전압, 가지전류, 가지전압, 등을 말하며 (1)式的 U 에 해당한다.

本 論文에서 漂流信賴도라함은 그림 1과 같은 性能目標特性의 正規相對度數分布에서 性能目標值의 上限과 下限사이의 면적을 말하며 性能目標值의 上限과 下限을 벗어나는 部分을 漂流不良(drift failure)이라한다⁹⁾.

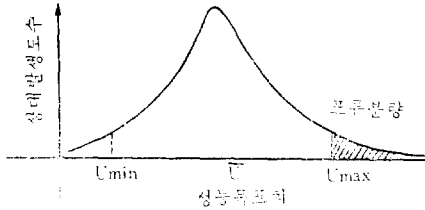


그림 1. 性能目標值의 相對度數分布

Fig. 1. Frequency distribution of the performance characteristic

裝置의 不良型은 두가지로 나눌수있다.

첫째는 災害不良⁴⁾ (catastrophic failure)으로서 裝置動作에 지대한 영향을주는 돌연적인 것이다. 이것은 部品에 가해지는 環境應力과 裝置의 運用에 관계된다. 內部溫度, 電位, 振動, 放射등은 이應力에 속한다. 回路의 災害不良은 回路短絡이나 開放 혹은 構成部品の 絕緣破壞등을 들수있다.

둘째로는 漂流不良⁹⁾으로서 回路가 機能은 발휘하나 回路性能이 퇴화되어 要求하는 信賴도를 벗어난다. 漂流不良은 단일原因을 캐낼 수는 없으나 回路性能의 주기적인 測定을 하므로써 豫測할수 있다. 漂流不良은 性能目標值가 정한 信賴도를 만족하도록 構成部品の 標準偏差를 決定하므로써 調整할 수 있다.

性能目標値는 (1)식에서 알수 있는 바와 같이 構成部品에 의해서 決定되며 構成部品の 變動은 性能目標値의 變動을 갖어온다. 部品定數의 變動은 製造, 印加電壓, 납땜, 運用老化, 非運用老化 絶對溫度, 電力消耗, 運用不安定, 短期間不安定, 濕度등에 의해서 생긴다. 그러므로 設計할때에 이점을 充分히 고려해야한다⁴⁾.

漂流信賴도와 性能目標值標準偏差와의 關係는 그림 (1)에서 \bar{U} 를 設計中心으로 하고 性能特性이 $\bar{U}+U_{max}$, $\bar{U}-U_{min}$ 사이 에 있도록 設計한다. 性能目標值限界는 性能目標值標準偏差로 나타낼 수 있다.

$$U_{max}=K\sigma_f \quad (2-a)$$

$$U_{min}=-K\sigma_f \quad (2-b)$$

여기서 K 는 漂流信賴도와 關係되는 常數이며 예컨대 $K=3$ 이면 分布의 99%가 限界이내에 있게된다. 그러므로 K 는 設計仕樣에 따라 設計者에 의해서 주어진다. U 의 한계와 K 가 定해지면 性能目標值標準偏差 σ_f 가 定해지므로 設計는 σ_f 를 만족하는 각 部品の 標準偏差를 구하면 된다.

回路價格 函數라함은 本 論文에서는 部品價格 函數의 和를 의미하며 部品價格函數는 部品の 標準偏差를 獨立變數로하고 價格을 從屬變數로하는 多項式을 말한다. 裝置의 經濟性은 여러가지 原因에 의해 決定되나 本 論文에서는 回路 部品價格에 국한한다. 동일한 部品이라 할지라도 여러가지 標準偏差를 갖고있으며 標準偏差가 적을수록 品質이 좋으므로 價格은 높다. 回路價格函數는 다음식과 같이 表示할수 있다.

$$H = \prod_{i=1}^{KN} C_i(\sigma_{xi}) \quad (3)$$

(3)식에서 $C_i(\sigma_{xi})$ 는 部品價格函數이고 σ_{xi} 는 部品の 標準偏差이며 KN 은 標準偏差를 모르는 部品の 수이고 H 는 回路價格函數이다. $C_i(\sigma_{xi})$ 를 구하는 方法은 동일 部品에 對하여 標準偏差對 價格을 조사하여 部品價格을 從屬變數로 하고 標準偏差를 獨立變數로하는 多項式近似를 하면된다. 多項式近似는 最小二乘根近似, Chebyshev 近似, 指數函數近似가 있다. 最小二乘根近似와 Chebyshev 近似는 5차의 多項式을 구하면 충분하다.

制約條件函數는 일반적으로

$$G(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq L \quad (4)$$

와같이 주어진다. 여기서 x_i 는 變數 L 은 定數이다. 回路設計時 制約條件函數라함은 性能目標値의 分散을 각 部品の 分散과 相關係數로 나타낸 다음식을 말한다⁸⁾⁹⁾

$$\sigma_f^2 \geq \sum_{j=1}^{NN} \left(\frac{\partial f}{\partial x_j} \right)^2 \bar{x}_j \sigma_{xj}^2 + 2 \sum_{r=1}^{NN-1} \sum_{s=r+1}^{NN} \rho_{rs} \sigma_{x_r} \sigma_{x_s} \times \left(\frac{\partial f}{\partial x_r} \right) \bar{x}_r \left(\frac{\partial f}{\partial x_s} \right) \bar{x}_s \quad (5)$$

((5)식의 유도는 附錄 1 참조)

여기서 NN 은 部品定數의 수이고 σ_{xj}^2 은 部品定數의 分散이고 \bar{x}_j 은 部品定數의 平均値이고 ρ_{rs} 는 部品定數 x_r, x_s 와 關係되는 相關係數이고 $\left(\frac{\partial f}{\partial x_j} \right)^2 \bar{x}_j$ 는 平均値에서 구한 部品定數에 관한 回路變數의 일제 편미분이다.

3. 津田의 몬테칼로法¹⁾

本 論文의 몬테칼로法을 說明하기전에 津田의 方法을 說明한다. 이 方法은 몬테칼로 法을 이용하여 多元 非線形聯立方程式의 解를 구하는 것이다. 津田은 疑似 포텐셜을 도입하여 非線形 聯立方程式의 자승의 和를

疑似포텐셜로 놓았다.

$$Pot(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n a_i^2 [(F_i(x_1, x_2, \dots, x_n))]^2 \quad (6)$$

(6) 식에서 a_i 는 定數이고 F_i 는 非線形方程式이다. 이 가장적인 포텐셜중에 한 무리의 粒子들을 서로 衝突시키며 운동시킨다. 충돌은 彈性衝突이며 衝突이 일어나면 運動量과 運動에너지가 전달된다고 가정한다. 1개의 代表粒子를 조사하면 최종에는

$$Pot(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \quad (7)$$

가 성립하는 點 근방에 存在하는 경우가 압도적이다. 에르고딕(ergodic)에 의해서 多數粒子의 空間的 分布를 1개 代表粒子의 時間的 分布로 놓으면 이 粒子에 대한 運動方程式은

$$\frac{dPX_i}{dt} = -\frac{\partial Pot}{\partial x_i} \quad (8)$$

$$PX_i = \frac{dx_i}{dt} \quad i=1, 2, \dots, NN \quad (9)$$

이된다. 여기서 dx 는 微小變位 벡터이고 PX 는 粒子의 運動量으로서 질량을 1로 하면 運動速度벡터가 된다. 粒子의 位置는

$$\langle x_i \rangle = \frac{\int \dots \int x_i \exp[-Pot/\beta] dx_1 dx_2 \dots dx_n}{\int \dots \int \exp[-Pot/\beta] dx_1 dx_2 \dots dx_n} \quad (10)$$

이 된다. 여기서 β 는 正의 定數이다. 실제의 計算은 (8)(9)식의 微分을 差分으로 놓고 粒子를 折線徑路로 運動시킨다. 平均自由行程을 s 라하고 각 스텝마다 衝突有無를 判定하면서 粒子를 進行시킨다. 여기서 한 스텝으로서 $s\lambda$ ($0 < s < 1$)의 微小距離를 취하여 이것을 折線上的 飛躍軌跡의 1直線區間으로 한다. $[0, 1]$ 사이의 一樣亂數를 CR 이라하면 한 스텝후의 衝突確率は S 이다. $CR < S$ 이면 衝突이었고 $1 \geq CR > S$ 이면 衝突이 없는다는 判定을 각 스텝마다 한다. 衝突이 일어나면 粒子는 $CR' T_m$ (CR' 는 새로 發生한 亂數, T_m 은 運動에너지의 上限)의 運動에너지를 얻어 等方散亂한다. 그리고 加速된 結果 粒子는 T_m 보다 적은 레벨로 옮겨 等方散亂한다는 모델을 택했다. 津田은 多元非線形聯立方程式의 미지變數를 2개모하여 例題를 풀었는데, 최초의 運動速度를 구하기 위한 一樣亂數發生方法은 일반적이고 獨立의이 아니었다. 그리고 最適化問題는 취급하지 않았다.

4. 몬테칼로 最適化技法

本論文의 方法은 多元非線形連立方程式의 解를 구하는것이 아니고 制約條件이 있는 函數의 最小 最大를 求하는 것이다. 本方法은 津田의 亂數發生하는 方法을 一般化하고 制約條件函數面에 粒子가 衝突하면 境界面

에서 點反射하고 反射運動量벡터의 방향과 크기를 問題에 따라 調節할수있게 한것이다. (6)식과는 달리 最小을 求하려는 函數를 疑似포텐셜로 놓는다. 즉

$$Pot(x_1, x_2, \dots, x_n) = F(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (11)$$

이 된다. 그러면 1개 代表粒子의 運動은

$$Pot(x_1, x_2, \dots, x_n) = \min F(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (12)$$

되는 點근방에 存在하는 경우가 많게된다. 粒子가 最小點을 향하여 進行하다가 制約條件函數의 境界面에 衝突하면 衝突點에서 點反射하므로 결국 粒子는 制約條件函數를 만족하는 函數의 最小點에 도달하게 된다.

최초의 運動速度를 구하기위한 一樣亂數는 一般的이고 獨立의으로 發生시킨다.

최초의 運動量벡터 PX 는

$$PX = \sqrt{CR \times T_m} \frac{Z}{Z_T} \quad (13)$$

이된다. 여기서 Z 는 獨立의으로 發生시킨 $[-1, 1]$ 간의 一樣亂數벡터이고, PX, Z 의 차수는 미지變數의 수와같다. Z_T 는

$$Z_T = \sqrt{Z_1^2 + Z_2^2 + \dots + Z_{KN}^2} \quad (14)$$

이된다. 여기서 KN 은 미지 變數의 數이다. 粒子가 制約條件函數의 境界面에서 衝突하면 衝突點의 位置와 點反射후의 速度를 求해야한다. 그림2에서 P 점은 粒子가 衝突하기 바로직전의 點이고 位置는 X 이다. P' 점은 衝突후의 點이고 位置는 $X + dX$ 이다. Q 점은 粒子가 衝突하는 點이며 Q 에서 反射되어 QR 선상의 R 점에 도달한다고 생각한다. 그리고 PQ 간과 QR 간을 각각 한 스텝으로 간주한다. 反射는 Q 點에서 入射角과 等角反射 시키는것이 原則이나 解가 境界面에 있을뿐만 아니라 等角反射시킬경우 運動量이 커져 解의 접근時間을 지연시키므로 될수 있는대로 境界面에 가깝도록 反射시킨다. 그러나 이때 反射시킨후의 粒子가 境界面 밖으로 나가지 않도록 주의 해야한다.

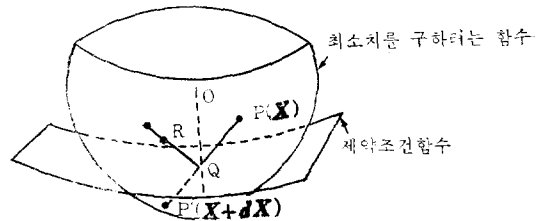


그림 2. 制約條件函數 境界面에서 粒子의 反射
Fig. 2. Reflection of the particle on the constraints plane

衝突點 Q 의 位置는 P 點에서 Q 점까지의 벡터를 dX_Q 라 하면

$$X_Q = X + dX_Q \quad (15)$$

이 된다. 그런데

$$dX_Q = MC \times PX \times dt \quad 0 < MC < 1 \quad (16)$$

와 같이 나타낼 수 있다. 여기서 MC 는 배율이다. $PX \times dt$ 는 dX 이므로 (15)식은

$$X_Q = X + MC \times dX \quad (17)$$

이 된다. 그러므로 MC 를 구하면 Q 점의 위치를 알 수가 있다.

MC 를 구하는 방법은 $x_i + MC dx_i$ 를 (4)식에代入하면

$$G(x_i + MC dx_i, x_2 + MC dx_2, \dots, x_n + MC dx_n) = 0 \quad (18)$$

이 되며 (18)식을 만족하는 MC 를 구하면 된다.

P 점에서의 速度의 增(減)分은

$$dPX_Q = -(\text{GRADC}_P \times MC \times dt) \quad (19)$$

이 된다. 여기서 GRADC_P 는 P 점에서 구한 函數의 그라디언트 벡터이다 그러므로 Q 점에서 反射되기 전의 速度는

$$PX_Q = PX_P + dPX_Q \quad (20)$$

이다. 그런데 Q 점에서 反射되므로 反射후의 速度를 구해야 한다. 反射후의 速度는 Q 점에서 制約條件函數의 그라디언트 벡터를 이용하여 구할 수 있다. 그림 3에서 QR 은 粒子의 反射變位 벡터이며 反射후의 速度方向과 일치한다. GRADF_Q 는 Q 점에서의 制約條件函數의 그라디언트 벡터이며 制約條件函數가 增加하는 方向으로

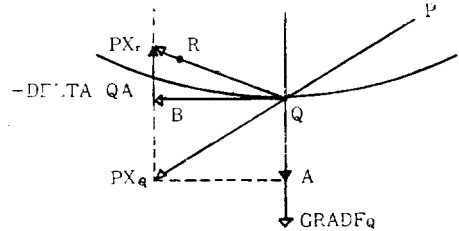


그림 3. 粒子의 入射과 反射를 나타내는 벡터선도
Fig. 3. The vector diagram for computing reflected velocity vector at the point Q

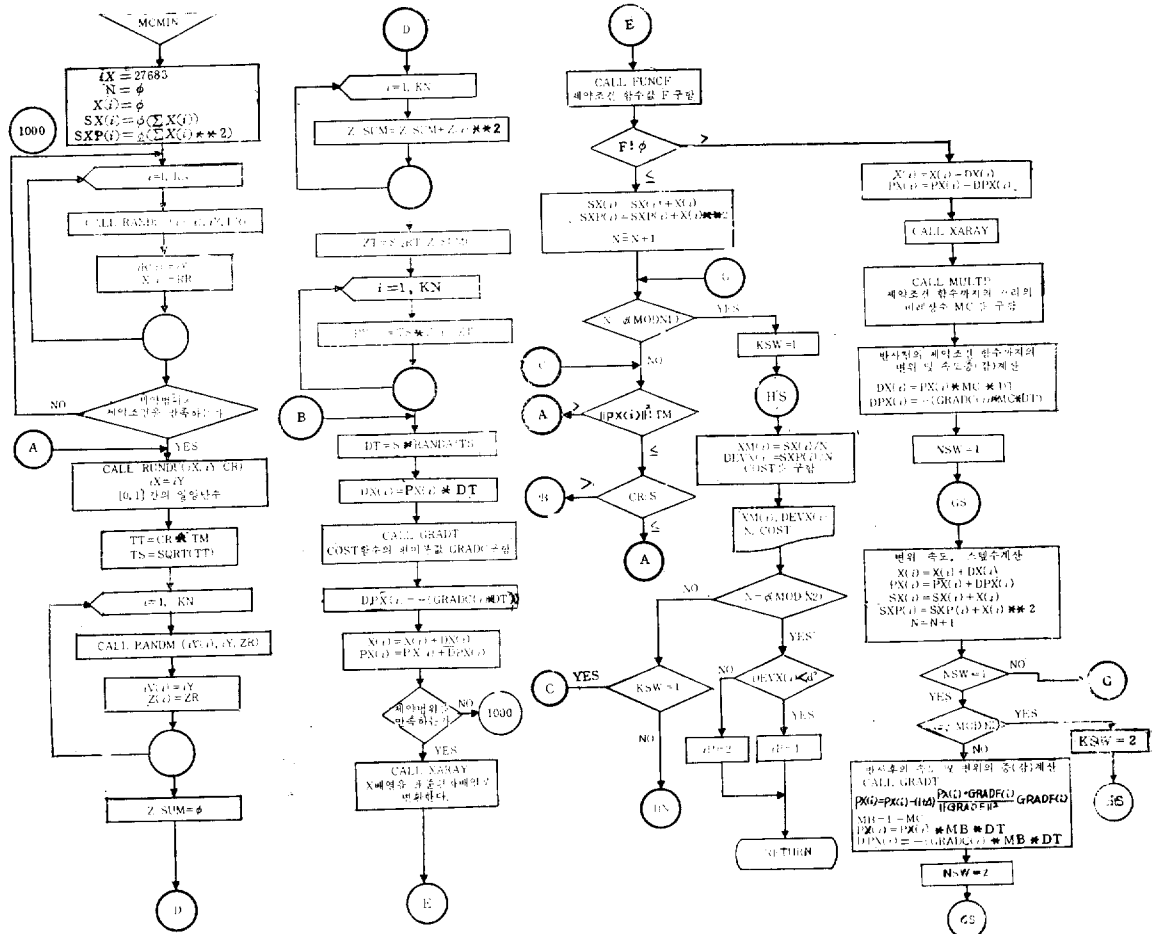


그림 4. 몬테칼로 最適化기법의 컴퓨터 流統圖
Fig. 4. Flow chart for Monte Carlo constrained optimization

향하고 있다.

反射후의 速度벡터 PX_r 은

$$PX_r = PX_Q - (1 + \text{DELTA}) \frac{PX_Q \cdot \text{GRADF}_Q}{\|\text{GRADF}_Q\|^2} \times \text{GRADF}_Q \quad (21)$$

와같이 表示할수 있다. (식유도는 부록 3 참조). 그러므로 反射후의 微小變位 벡터는

$$QR = PX_r \times (1 - MC) dt \quad (22)$$

이되고 速度의 增(減)분은

$$dPX_r = -(\text{GRADC}_Q \times (1 - MC) dt) \quad (23)$$

이된다. 여기서 GRADC_Q 는 Q 점에서 구한 函數의 그라디언트벡터이다. R 點의 位置는

$$X_R = X_Q + QR \quad (24)$$

이된다. 이후 粒子의 運動은 전과같이 衝突유무를 판정하면서 粒子의 位置를 계속 누적하며 관찰한다. 이상의 理論을 基盤으로한 คอมพิวเตอร์ 流統圖는 그림 4와 같다. 그림 4에서 SUBROUTINE XARAY는 回路設計時 使用하는 것으로서 一般函數의 最小을 구하는 경우에는 使用치않는다.

이상의 算法을 이용하여 制約條件函數를 만족하는 一般函數의 最小值를 구하는 例題를 풀어본다.

(例題 1) 制約條件 函數 $G(x)$ 를 만족하는 $F(x)$ 의 最小值를 구한다.

$$F(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \quad (25)$$

$$G(x) = x_1 + 2x_2 + x_3 - 1 \geq 0 \quad (26)$$

예제 1에 대한 解는 라그랑지안 승수법¹²⁾으로 풀면 $x_1 = 0.166$ $x_2 = 0.333$ $x_3 = 0.166$ 이 되며 그림(5)는 本方法으로 풀어 스텔수대 변수값을 점철한것이다.

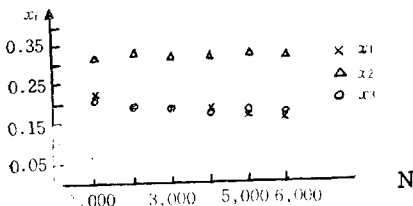


그림 5. 스텔수 對 변수값

Fig. 5. Values of X vs N of example 1.

초기치로서 $x_1 = 0.3$ $x_2 = 0.4$ $x_3 = 0.3$ 제약조건 범위는 $0 \leq x_1 \leq 1$, $0 \leq x_2 \leq 1$, $0 \leq x_3 \leq 1$ 로하고 $T_m = 0.04$, $S = 0.1$, $\lambda = 0.01$, $DEV = 0.1$ DELTA = 1, $N_1 = 100$, $N_2 = 10000$ 으로 하였다.

5. 回路設計 예의 適用

回路에 있어서는 制約條件函數는 (5)식이되고 最小을 구하려는 函數는 回路價格函數로서 (3)식이된다. (5)식에서 偏微分은 다음식을 利用하여 구했으며 式의 유

도는 附錄 2에 상술되어있다.

$$\frac{\partial f}{\partial R_i} = (D'YD)^{-1} D'(\epsilon_i + \sum_{j \neq i} \epsilon_j \beta_{ji}) \frac{1}{R_i^2} \times (E_i + e_i) \quad (27)$$

$$\frac{\partial f}{\partial \beta_{ji}} = - (D'YD)^{-1} D' \epsilon_i \frac{1}{R_j} (E_j + e_j) \quad (28)$$

$$\frac{\partial f}{\partial E_i} = - (D'YD)^{-1} D' Y \epsilon_i \quad (29)$$

$$\frac{\partial f}{\partial I_i} = (D'YD)^{-1} D' \epsilon_i \quad (30)$$

여기서 f 는 回路變數 벡터이며 D 는 컷셋行列이고 Y 는 가지 어드미턴스 行列이고 β_{ji} 는 從屬電流源 利得으로서 i 가지가 調整가지(from branch) j 가지가 從屬電流源이 있는 가지(to branch) 임을 나타낸다⁷⁾. E 는 獨立電壓源벡터이고 I 는 獨立電流源벡터이고 e_i 는 가지電壓벡터의 i 번째 要素이고 $\epsilon_i^{(j)}$ 는 i 번째 行은 1 이고 나머지는 0인 列벡터이고, R_i 는 i 가지의 저항이다. (5)식에서 相關係數를 구하는 方法은 一般統計책⁵⁾⁶⁾에 서술되어있으며 컴퓨터 써브루틴도 開發되어 있다. 部品간의 相關係數는 한部品이 여러개의 重要한 定數를 갖는다면 定數간에는 어떤關係가 있을수있다. 예를들면 트랜지스터에서 하이브리드 정수 h_i, h_o, h_r, h_f 의 分布나 電池의 電壓과 內部抵抗의 分布, 다이오드의 옴셋트電壓과 動抵抗의 分布간에 相關係數가 存在한다.

乾電池의 경우 各電池마다 電壓 V_s 와 內部抵抗 R_s 의 값을 점철하면 그림 6과 같이된다.

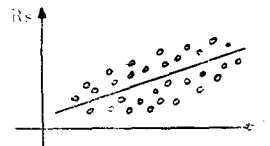


그림 6. 乾電池의 電壓과 內部抵抗의 相關係數

Fig. 6. The corelation between voltage and internal resistance of dry cells

점철한 點들이 정확히 1 直線이 되면 定數는 완전히 相關되고 相關係數는 直線의 기울기가 (+)면 1 (-)면 -1이 된다. 그러므로 相關係數는 $-1 \leq \rho \leq 1$ 의 값을 가진다. 回路에서 制約條件函數까지의 培率 MC 를 구하려면 (17)式을 (5)식에 代입하여 구한다. (17)식의 X 를 標準偏差로 바꾸어 代入하면

$$\sum_{j=1}^{NN} \left(\frac{\partial f}{\partial x_j} \right)^2 (\sigma_{x_j} + MC d\sigma_{x_j})^2 + 2 \sum_{r=1}^{NN-1} \sum_{s=r+1}^{NN} \rho_{r,s} \times (\sigma_{x_r} + MC d\sigma_{x_r}) (\sigma_{x_s} + MC d\sigma_{x_s}) \left(\frac{\partial f}{\partial x_r} \right) \bar{x}_r \left(\frac{\partial f}{\partial x_s} \right) \bar{x}_s - \sigma^2_r = 0 \quad (31)$$

이된다. (31)식에서 MC^2 의 係數 A , MC 의 係數 B , 常數

項 C는 각각 다음과 같다.

$$A = \sum_{j=1}^{NN} \left(\frac{\partial f}{\partial x_j} \right)^2 \bar{x}_j d\sigma_{x_j}^2 + 2 \sum_{r=1}^{NN-1} \sum_{s=r+1}^{NN} \rho_{rs} \left(\frac{\partial f}{\partial x_r} \right) \bar{x}_r \times \left(\frac{\partial f}{\partial x_s} \right) \bar{x}_s d\sigma_{x_r} d\sigma_{x_s} \quad (32)$$

$$B = \sum_{j=1}^{NN} 2 \left(\frac{\partial f}{\partial x_j} \right) \bar{x}_j \sigma_{x_j} d\sigma_{x_j} + 2 \sum_{r=1}^{NN-1} \sum_{s=r+1}^{NN} \rho_{rs} \left(\frac{\partial f}{\partial x_r} \right) \bar{x}_r \times \left(\frac{\partial f}{\partial x_s} \right) \bar{x}_s (\sigma_{x_r} d\sigma_{x_s} + \sigma_{x_s} d\sigma_{x_r}) \quad (33)$$

$$C = \sum_{j=1}^{NN} \left(\frac{\partial x}{\partial x_j} \right)^2 \bar{x}_j \sigma_{x_j}^2 + 2 \sum_{r=1}^{NN-1} \sum_{s=r+1}^{NN} \rho_{rs} \left(\frac{\partial f}{\partial x_r} \right) \bar{x}_r \times \left(\frac{\partial f}{\partial x_s} \right) \bar{x}_s \sigma_{x_r} \sigma_{x_s} - \sigma_f^2 \quad (34)$$

A, B, C에 의해서 MC의 2승근을 구한 다음負근을 버리고 두근이 전부正이면 작은값을 택한다. 回路에 있어서 培率 MC를 구하는 컴퓨터 流統圖는 그림 7과 같다.

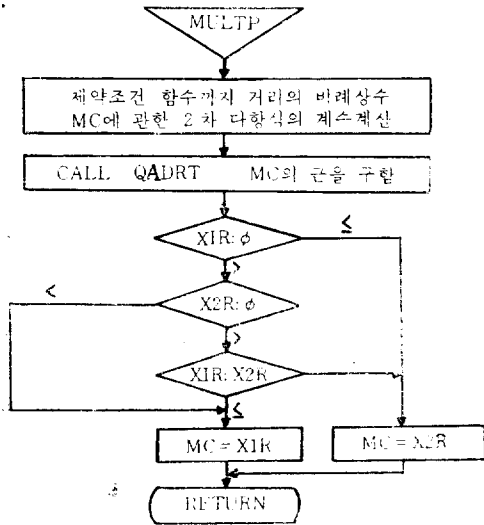


그림 7. 배율 MC를 구하는 컴퓨터 流統圖
Fig. 7. Flow chart for solving multiplier constant MC

몬테칼로법을 이용한 最適回路設計의 컴퓨터 流統圖는 그림 8과 같다.

본 設計 프로그램에 사용된 각종 서브루틴 명칭과 用途가 부록 4에 說明되어 있다.

6. 設計 事例研究 및 檢討

(例題 2) 電壓分配 回路設計

그림 9와 같은 간단한 電壓分配 回路에 대한 最適設計을 한다. 設計問題는 500Ω의 負荷에 內部抵抗 0.1 Ω의 10V 電源으로 性能목표치의 99%가 7.0 ± 0.75V

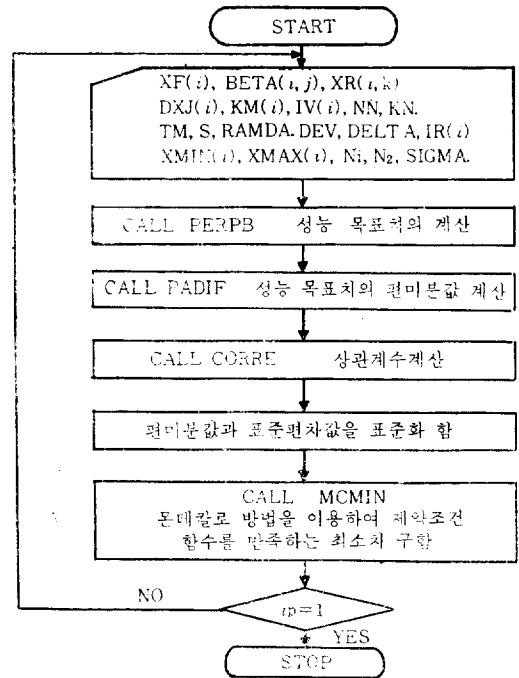


그림 8. 最適回路 設計 컴퓨터 流統圖
Fig. 8. Flow chart of optimum circuit design

內에 드는 出力을 얻으려 한다. R₂, R₃, R₄의 標準偏差를 미지라고 設計仕様을 만족하는 이들의 標準偏差를 구한다. 이때 性能目標値는 R₂양단의 電壓이며 性能目標値의 各部品定數에 대한 偏微分값을 구하기 위하여 性能目標値를 다음式과 같이 나무가지 電壓으로 表示한다¹⁰⁾

$$e_T = (D'YD)^{-1}D'(I - YE) \quad (35)$$

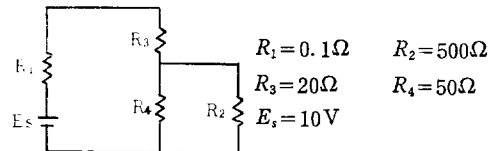


그림 9. 電壓分配 回路
Fig. 9. A simple voltage divider circuit.

그림 9의 方向性그래프는 그림 10과 같다. 그림 10에서 實線은 나무가지이고 點線은 補木이다.

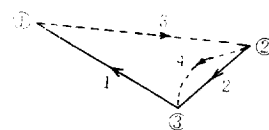


그림 10. 그림 9의 方向性 그래프
Fig. 10. The oriented graph of Fig 9

켓 셋行列은

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (36)$$

이고 어드미턴스 行列은

$$Y = \begin{pmatrix} \frac{1}{R_1} & & & 0 \\ & \frac{1}{R_2} & & \\ & & \frac{1}{R_3} & \\ 0 & & & \frac{1}{R_4} \end{pmatrix} \quad (37)$$

이다. 電壓源벡터와 電流源벡터는 각각

$$E = \begin{pmatrix} E_s \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad I = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (38)$$

이다.

部品 平均値에서의 性能目標値의 偏微分값은 表 1 과 같다.

표 1. 部品定數에 대한 性能目標値의 편미분값

Table 1. Partial derivatives of performance characteristics evaluated at nominal values

x	$\frac{\partial f}{\partial x}$	$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_n$	$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_n$ 은
R_1	-0.10577	-0.01057	標準化 편
R_2	0.00038	0.19327	미분 값이
R_3	-0.10577	-2.11544	다.
R_4	0.03865	1.93274	
E_s	0.69338	6.63385	

偏微分값은 計算上 편리한 標準化 偏微分값을 使用 하였다.

乾電池電壓 E_s 와 内部抵抗 R_1 의 測定資料는 表 2와 같다.⁸⁾

表 2 乾電池에 대한 실측치

Table 2. The measured parameter values for power supplies

셋트번호	E_s (V)	R_1 (Ω)
1	10.20	0.091
2	10.06	0.087
3	9.76	0.109
4	10.10	0.093

5	9.66	0.127
6	9.84	0.097
7	9.91	0.123
8	10.07	0.112
9	9.82	0.139
10	10.45	0.074
11	9.80	0.120
12	9.91	0.103
13	9.50	0.125
14	9.94	0.105
15	10.01	0.146
16	9.77	0.083
17	9.96	0.117
18	9.88	0.131
19	10.02	0.093
20	9.78	0.147
21	9.76	0.115
22	9.60	0.101
23	10.07	0.142
24	10.15	0.057

表 2의 資料에 대한 相關係數는 $\rho_{15} = -0.44656$ 이다.

지금 R_1, E_s 의 標準偏差는 각각 $\sigma_{x_1} = 0.02130, \sigma_{x_5} = 0.19650$ 이고 標準化 標準偏差는 각각 $\sigma_{x_1} = 0.21300, \sigma_{x_5} = 0.01965$ 이 된다. R_2, R_3, R_4 에 대한 미지 標準化 偏差를 각각 $\sigma_{x_2}, \sigma_{x_3}, \sigma_{x_4}$ 라 한다. 本例題에서는 편의상 標準偏差를 모르는 部品에 대한 部品價格函數를 각각 다음과 같이 定한다.

$$C_2(\sigma_{x_2}) = \frac{1}{\sigma_{x_2}} + 0.4 \quad (39)$$

$$C_3(\sigma_{x_3}) = \frac{0.6}{\sigma_{x_3}} + 0.3 \quad (40)$$

$$C_4(\sigma_{x_4}) = \frac{0.8}{\sigma_{x_4}} + 0.3 \quad (41)$$

그러므로 回路價格函數는

$$H = \frac{1}{\sigma_{x_2}} + \frac{0.6}{\sigma_{x_3}} + \frac{0.8}{\sigma_{x_4}} + 1 \quad (42)$$

이된다.

식(42)에서 標準偏差는 (-)값이 될수 없고 또 標準化 標準偏差이므로 1보다 클수 없다. 따라서 $0 < \sigma_{x_i} \leq 1$ 를 만족해 야한다. $\sigma_f = \frac{0.75}{3}, T_M = 4.0, S = 0.1, RAMDA = 0.025, DEV = 0.1, DELTA = 0.25$ 로 하여 (5)式을 만족하고 (42)式을 최소로하는 解는 그림과 같다. 그림 11은 스텝수대 퍼유니트프 準화표준편차를 檢査한것이며 $x_1 = 0.370545, x_2 = 0.063397, x_3 = 0.074108$ 이다.

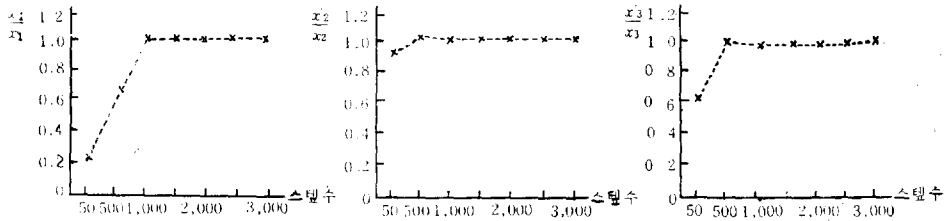


그림 11. 스텝수 대 퍼유니트 標準化 標準偏差

Fig. 11 Per unit normalized standard deviation vs step number of example 2.

그림 (12)는 스텝수대 퍼유니트 回路價格을 그린 것이며 $C=23,957,706$ 이다.

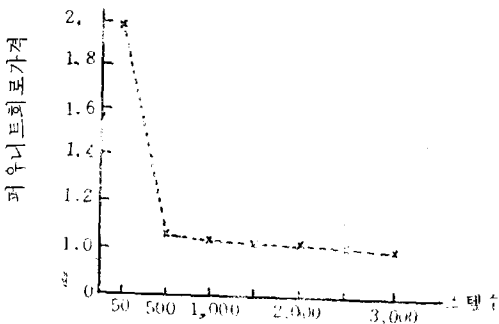


그림 12. 스텝수 對 퍼유니트 回路價格

Fig. 12. Circuit cost vs step number of example 2.

예제 2를 라그랑지 안 乘數法으로 풀면 $\sigma_{x2}=0.370545$, $\sigma_{x3}=0.063397$, $\sigma_{x4}=0.074108$ 이고 回路價格은 23,957,706이다. 본방법에서는 $T_m=4$ $S=0.1$ $RAMDA=0.025$ $DELTA=0.25$ $DEV=0.1$ $N_1=50$, $N_2=10000$ 으로 놓고 풀결과 N 이 3000번에서 5000번사이에서 正解의 1.7%이내로 접근하고 있다. $DELTA=1$ 로 하면 等角反射시킨 경우로서 스텝수가 9600번에서 正解에 가까워지나 2%이내에는 미달이다. 그러므로 $DELTA$ 는 1보다 작게 취하고 制約條件函數에서 反射후의 粒子가 境界面에 가깝도록 反射시키는 것이 훨씬 解로 접근하는 시간이 단축된다.

7. 結 論

本論文의 주요한 結論은 다음과 같다.

① 몬테칼로 方法을 이용하여 制約條件函數를 만족하고 函數의 最小值를 구하는 方法과 算法을 제시하였다. 이 方法은 線形, 非線形 制約條件이나 函數의 modality⁽³⁾에 구애됨이 없이 最小, 最大值를 구할수 있으며 global 最小值를 구할수 있다.

② 回路設計에 經濟性과 標準偏差의 개념을 도입한

信賴性을 동시에 고려하여 部品의 標準偏差를 결정하므로서 容許公差를 결정하는 方法보다 새로운 方法을 제시했다.

③ 回路設計를 確率에 근거를 두고 하므로서 最惡狀態設計의 短點을 제거한다.

參 考 文 獻

- (1) 津田孝夫, 몬테칼로法和시뮬레이션, 培風館, 1969.
- (2) L. Hellerman, A computer application to reliable circuit design, IRE Trans, on Reliability and Quality Control, Vol. RQC-11, pp.9-18, May, 1962.
- (3) L. Hellerman and M.P. Racite, Reliability techniques for electronic circuit design, IRE Trans. on Reliability and Quality Control, Vol. RQC-14, pp.9-16, September, 1958.
- (4) C.A. Krohn, Reliability analysis techniques, Proc. IRE, Vol.48, pp.179-192, Feb., 1960.
- (5) Papoulis, Probability, Random Variables, and Stochastic Process, McGraw-Hill, 1965.
- (6) Meyer, Introductory Probability and Statistical Application, Addison-Wesley, 1970.
- (7) R.W. Jensen and M.D. Lieberman, IBM Electronics Circuit Analysis Program. Prentice-Hall, Inc., 1968.
- (8) D. G. Mark, Choosing the best method for a variability analysis, Electronic Design, Vol. 11, No.23, pp.39, Nov., 1963.
- (9) D.G. Mark and L.H. Stember, Jr., Variability Analysis, Electrotechnology, pp.35-48, July, 1965.
- (10) Kuo and Magnuson, Computer Oriented Circuit Design, Prentice-Hall, Inc., 1969.
- (11) IBM, 1130 Scientific Subroutine Package, Pro-

grammer's Manual, Program Number 1130-CM-02X

- (12) John, W. Dettman, Mathematical Method in Physics and Engineering, McGraw-Hill, 1962.
- (13) D.J. Wilde, Optimum Seeking Methods, Prentice-Hall, Inc., 1964.

附 錄

1. 性能目標値의 分散

(1)式을 다시 쓰면

$$U=f(x_1, x_2, \dots, x_n) \tag{43}$$

이 된다. 여기서 x_i 는 部品값을 나타내는 變數이고 U 는 性能目標値이다. (43)式을 테일러 級數로 전개하면

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, \dots, x_n) &= f(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n) \\ &+ \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1 - \bar{x}_1) + \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_2 - \bar{x}_2) + \dots \\ &+ \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(x_1 - \bar{x}_1)^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(x_2 - \bar{x}_2)^2 + \dots \\ &+ R_1 \end{aligned} \tag{44}$$

이 된다. 여기서 $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n$ 는 각각 部品變數에 대한 平均値이고 R_1 은 剩餘項이다. 性能目標値에 대한 期待値는

$$\begin{aligned} E\{f(x_1, x_2, \dots, x_n)\} &= \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ &P(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n \end{aligned} \tag{45}$$

이 된다. 여기서 $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 은 確率容度 函數이다. (44)式에서 變數를 2개 로 하고 分散을 구한다. (44)式과 (45)式에서

$$\begin{aligned} E\{f(x_1, x_2)\} &= f(\bar{x}_1, \bar{x}_2) + \frac{1}{2}(\sigma_{x_1} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + 2\mu_{11} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} \\ &+ \sigma_{x_2}^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}) \end{aligned} \tag{46}$$

$$\begin{aligned} E\{f^2(x_1, x_2)\} &= f^2(\bar{x}_1, \bar{x}_2) + \left[\left(\frac{\partial f}{\partial x_1} \right)^2 + f \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} \right] \sigma_{x_1}^2 \\ &+ \left[\left(\frac{\partial f}{\partial x_2} \right)^2 + f \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} \right] \sigma_{x_2}^2 \\ &+ 2 \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} + f \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} \right) \mu_{11} \end{aligned} \tag{47}$$

이 된다. 여기서

$$\begin{aligned} \mu_{11} &= E[(x_1 - \bar{x}_1)(x_2 - \bar{x}_2)] \\ &= E[x_1, x_2] - E[x_1]E[x_2] \end{aligned} \tag{48}$$

이다. 그러므로

$$\begin{aligned} \sigma^2_{f(x_1, x_2)} &= E\{f(x_1, x_2)^2\} - E^2\{f(x_1, x_2)\} \\ &= \left(\frac{\partial f}{\partial x_1} \right)^2 \sigma_{x_1}^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2} \right)^2 \sigma_{x_2}^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} \mu_{11} \end{aligned} \tag{49}$$

이 된다. 그런데

$$\mu_{11} = \sigma_{x_1} \sigma_{x_2} \rho \tag{50}$$

이므로 (45)式은

$$\begin{aligned} \sigma^2_{f(x_1, x_2)} &= \left(\frac{\partial f}{\partial x_1} \right)^2 \sigma_{x_1}^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2} \right)^2 \sigma_{x_2}^2 \\ &+ 2\rho \sigma_{x_1} \sigma_{x_2} \left(\frac{\partial f}{\partial x_1} \right) \left(\frac{\partial f}{\partial x_2} \right) \end{aligned} \tag{51}$$

이 된다. (51)式을 일반적으로 N 개 變數에 대하여 구하면

$$\begin{aligned} \sigma^2_f &= \sum_{j=1}^N \left(\frac{\partial f}{\partial x_j} \right)^2 \sigma_{x_j}^2 + 2 \sum_{r=1}^{N-1} \sum_{s=r+1}^N \rho_{rs} \sigma_{x_r} \sigma_{x_s} \\ &\left(\frac{\partial f}{\partial x_r} \right) \left(\frac{\partial f}{\partial x_s} \right) \bar{x}_r \bar{x}_s \end{aligned} \tag{52}$$

이 된다.

2. 性能目標函數의 部品에 대한 偏微分

本論文에서는 컷셋方程式에 대한 偏微分을 구하는 方法을 일반적으로 전개했다. 直流解析에서는 식 (35)을 다음과 같이 表示할 수 있다.

$$e_T = f(R, \beta_{ji}, E, I) = (D' Y D)^{-1} D' (I - Y E) \tag{53}$$

식 (53)을 各部品 定數로 偏微分한다. 먼저 i 가치의 抵抗에 對해서 偏微分하면

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial R_i} &= \frac{\partial (D' Y D)^{-1}}{\partial R_i} D' (I - Y E) \\ &+ (D' Y D)^{-1} D' \frac{\partial (I - Y E)}{\partial R_i} \end{aligned} \tag{54}$$

이 된다. 그리고 다음식의 좌변을 우변과 같이 전개할 수 있다.

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial R_i} [(D' Y D)^{-1} (D' Y D)] &= (D' Y D)^{-1} \\ \times \frac{\partial (D' Y D)}{\partial R_i} + \frac{\partial (D' Y D)^{-1}}{\partial R_i} (D' Y D) &= 0 \end{aligned} \tag{55}$$

식 (55)에서

$$\begin{aligned} \frac{\partial (D' Y D)^{-1}}{\partial R_i} &= - (D' Y D)^{-1} D' \frac{\partial Y}{\partial R_i} \\ \times D (D' Y D)^{-1} \end{aligned} \tag{56}$$

이 된다.

$$\frac{\partial E}{\partial R_i} = \frac{\partial I}{\partial R_i} = 0 \tag{57}$$

이므로 $e = D e_T$ 와 (53)式을 이용하면

$$\frac{\partial f}{\partial R_i} = - (D' Y D)^{-1} D' \frac{\partial Y}{\partial R_i} (E + e) \tag{58}$$

이 된다. 같은 방법으로

$$\frac{\partial f}{\partial \beta_{ji}} = - (D' Y D)^{-1} D' \frac{\partial Y}{\partial \beta_{ji}} (E + e) \tag{59}$$

이 된다. 電壓源과 電流源에 대한 偏微分은 각각 다음과 같다.

$$\frac{\partial f}{\partial E_i} = - (D' Y D)^{-1} D' Y \frac{\partial E}{\partial E_i} \tag{60}$$

$$\frac{\partial f}{\partial I_i} = (D' Y D)^{-1} D' \frac{\partial I}{\partial I_i} \quad (61)$$

벡터 e_i 는 i 번째 행은 1이고 기타는 0인 行列이된다
從屬電流源이 있는 가지에 대한 어드미턴스 行列은

$$Y = \begin{pmatrix} \frac{1}{R_1} & \beta_{21} & \dots & \beta_{b1} \\ \beta_{12} & \frac{1}{R_2} & \dots & \beta_{b2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \beta_{1i} & \beta_{2i} & \dots & \frac{1}{R_i} & \beta_{bi} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \beta_{1b} & \beta_{2b} & \dots & \dots & \frac{1}{R_b} \end{pmatrix} \quad (62)$$

이된다. 여기서 Y 는 $(b \times b)$ 行列이다. 식 (62)를 저항 R_i 에 대해 偏微分하면

$$\frac{\partial Y}{\partial R_i} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -\frac{\beta_{1i}}{R_i^2} & -\frac{\beta_{2i}}{R_i^2} & \dots & -\frac{1}{R_i^2} & \dots & -\frac{\beta_{bi}}{R_i^2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix} \quad (63)$$

이된다. 식 (63)을 정리하면

$$\frac{\partial Y}{\partial R_i} = -\frac{1}{R_i^2} e_i e_i^T - \sum_{j \neq i} \frac{\beta_{ji}}{R_i^2} e_j e_i^T \quad (64)$$

이된다. 여기서 i 는 i 번째 가지에 해당하는 Y 行列의
列이고 j 는 j 번째 가지에 해당하는 行이다. 식 (64)의
 둘째항은 i 번째 가지가 j 번째 가지에 있는 從屬電流
源에 대한 調整가지일때만 나타난다.

같은 方法으로

$$\frac{\partial Y}{\partial \beta_{ji}} = \frac{1}{R_j} e_i e_j^T \quad (65)$$

$$\frac{\partial E}{\partial E_i} = e_i \quad (66)$$

$$\frac{\partial I}{\partial I_i} = e_i \quad (67)$$

이된다.

그러므로 각 部品定數에 대한 性能目標值의 偏微分
方程式은

$$\frac{\partial f}{\partial R_i} = (D' Y D)^{-1} D' (e_i + \sum_{j \neq i} e_j \beta_{ji}) \frac{1}{R_i^2} \times (E_i + e_i) \quad (68)$$

$$\frac{\partial f}{\partial \beta_{ji}} = -(D' Y D)^{-1} D' e_i \frac{1}{R_j} (E_j + e_j) \quad (69)$$

$$\frac{\partial f}{\partial E_i} = -(D' Y D)^{-1} D' Y e_i \quad (70)$$

$$\frac{\partial f}{\partial I_i} = (D' Y D)^{-1} D' e_i \quad (71)$$

이된다.

3. 制約條件 函數에서 反射率의 粒子的 運動量

그림 3에서

$$P X_r = Q B - \text{DELTA} \times Q A \quad (72)$$

$$Q B = P X_Q - Q A \quad (73)$$

이되고 (72)식과 (73)式에서

$$P X_r = P X_Q - (1 + \text{DELTA}) Q A \quad (74)$$

이다. 그런데

$$Q A = \frac{\text{GRADF}_Q}{\|\text{GRADF}_Q\|} \|P X_Q\| \cos \theta \quad (75)$$

$$P X_Q \cdot \text{GRADF}_Q = \|P X_Q\| \|\text{GRADF}_Q\| \cos \theta \quad (76)$$

이므로

$$Q A = \frac{P X_Q \cdot \text{GRADF}_Q}{\|\text{GRADF}_Q\|^2} \text{GRADF}_Q \quad (77)$$

이된다. (74)식과 (77)式에서

$$P X_r = P X_Q - (1 + \text{DELTA}) \frac{P X_Q \cdot \text{GRADF}_Q}{\|\text{GRADF}_Q\|^2} \times \text{GRADF}_Q \quad (78)$$

이된다.

4. 씨브 루우틴 名稱과 用途

씨브루우틴명칭	用 途	비 고
PERPB	성능 목표치 구하는것	개 발
CORRE	상관 계수 구하는것	SSP ^{1D}
MCMIN	제약조건이 있는 함수의 최적치 구하는것	개 발
MULTP	제약조건 함수까지의 배 율구하는것	개 발
GRADT	함수와 제약조건 함수의 그라디언트 구하는것	개 발
FUNCF	제약조건 함수의 값 구 하는것	개 발
XARAY	X배열을 표준편차 배열 로 변환	개 발
RANDM	[-1, 1]간의 일양난수 발생	개 발
MODE	mod(N)구하는것	개 발