韓國數學教育學會.〈數學教育〉
1974. 12. Vol. XIII No. 2

Journal of the Korea Society of Mathematical Education
Dec. 1974 Vol. XIII No. 2

自然數의 順序關係에 對하여

咸 鍾 郁

1. 序言

우리가 中等學校에서 數學을 指導할때 당연히 成立하는 것으로 간주하고 아무 거리낌 없이 利用하고 있는 自然數의 順序關係를 Peano의 公理를 가지고 公理主義的 方法으로 紹介하고자 한다. 體系化된 數學의 共通點은 理論體係의 出發點으로 公理를 設定하는 것이다. 公理라 하면 自明한 原理라 생각하기 쉬우나 오히려 理論의 出發點으로 택한 첫번째의 原理라고 하는 것이 不變의 性格일 것이다. 이 點에서 數學의 世界는 시종 일관해서 公理主義的이라고 할수 있다. 初期에 있어서 Peauo의 自然數論이나 Hillbert의 Eucld 幾何는 公理系에 依해서 全體理論을 完全히 一意的으로 規定해 버리는데 중점을 두었다.

따라서 公理系를 設定시킨 理論 以外의 理論에는 이 公理系를 適用할 수 없었다. 그러나 위의 두 理論은 方法으로서의 公理主義의 特性을 鮮明하게 나타내고 있다. 그로부터 數學의 모든 분야에 公理主義는 浸透하였다. 特히 公理의 선택의 自由性은 抽象數學의 確立을 초래하는 계기가 되었다.

2. 公理와 定義

(公理 1) 1은 自然數이다.

(公理 2) 各 自然數에는 그 后者라고 하는 自然數가 꼭 하나만 存在한다(이것을 n^+로 나타낸다)

(公理 3) n이 自然數이면 $n^+\neq 1$

(公理 4) 自然數 m, n에 對하여

$m^+=n^+$이면 m, n이다

(公理 5) M이 自然數集合이면

i) $1\in M$

ii) $n\in M$이면 $n^+\in M$ (귀납공리)

(定義) 順序關係 "보아작다"($<$)는 다음과 같이 定義한다. 즉 $m, n\in N$(N은 自然數集合)에 對하여 어떤 自然數 k가 存在해서 $m+k=n$이라면 또 이렇기만 하면 $m<n$이다.

이상의 公理와 定義로 부터 自然數의 順序關係에서 가장 基本이되는 性質들을 밝혀보겠다.

3. 定理

(보조정리) $a, u\in N$이면 $a\neq a+u$이다.

(證明) $a=1$이라면 Peano의 公理에 依하여 $u\in N$인 모든 u에 對하여

$1\neq u^+=u+1$이므로 $1\neq 1+u$이다.

$a=r$일때 $r\neq r+u$가 成立한다고 假定하면

$a=r^+$일때 $u^+=r^++u$라면 $r^+=u+r^+=(u+r)^+$이므로 $r=u+r$로 되어 위 假定에 모순되므로 $a\neq a+r$이다.

(定理 1) 關係 "$<$"은 推移(transitive)이나 反射(reflexive)나 對稱(symmetric)은 아니다.

(證明) (1) 推移; 自然數 m, n, p가 存在하여 $m<n$이고 $n<p$라면 定義에 依하여 $n=m+k$이고 $p=n+j$가 되는 自然數 j, k가 存在하게 되어

$P=m+k+j$이 成立된다.

$\therefore m<p$이다 $\therefore$關係 "$<$"은 推移이다.

(2) 反射; $n\in N$인 n에 對하여 $n<n$이 成立한다면 $n+k=n$이 되는 自然數 k가 存在할

것이다. 이는 補助定理에 어긋나므로 反射가 아니다.

(3) 對稱; $m, n \in N$인 m, n에 對하여 $m < n$이고 $n < m$이 成立한다면 關係 "$<$"는 推移이므로 $m < m$가 되어 모순이다. ∴關係"$<$"는 對稱이 아니다.

(定理 2) 任意의 두 自然數 m과 n에 對하여 다음의 세 진술중 꼭 하나만이 眞이다.

(1) $m < n$ (2) $m = n$ (3) $m < m$

(證明) 먼저 任意와 주어진 수 m과 n에對하여 세 진술중 꼭 하나만이 일어난다는 것을 證明하자.

(1)과 (3)은 (2)와 排反이다.

왜냐하면 (1)과 (3)은 $m = n + k$ 및 $n = m + j$와 같이 表示되는데 補助定理에 依하여는 (2)는 $m \neq n + i$이므로 (1)과 (3)은 (2)와 排反이다.

또 (1)과 (3)도 서로 排反이다. 왜냐하면 關係"$<$"은 對稱이 아니므로 $m < n$인 同時에 $m < n$일수는 없으므로 서로 排反이다.

다음에 세 진술중 꼭 하나가 成立하여야 된다는 것을 證明하자.

$m \in N$인 任意의 m에 對하여 N의 部分集合 S와 T를 $S = \{n | n \in N, n < m\}$ 및 $T = \{n | n \in N, n \geqq m\}$와 같이 만들어 $S \cup T = N$임을 證明하면 세 진술중 꼭 하나가 成立하여야 된다는 것이 밝혀진 것이 되겠다.

$m = 1$이면 $n = 1$이거나 $n > m$이므로

$S = \phi$이고 $T = N$이다 $\therefore S \cup T = N$ $m \neq 1$일때 $n = 1$이라면 $1 \in S$이므로 $1 \in S \cup T$이다.

$n \neq 1$이고 $n \in S$라면 $n^+ \in S$이거나 $n^+ = m$이다 왜냐하면 $n \in S$므로 $k \in N$인 k에 對하여 $n + k = m$인데

$k = 1$이며 $n + 1 = m$ $\therefore n^+ = m$이다

또 $k \neq 1$이면 $j \in N$인 j에 對하여

$k = 1 + j$이므로 $n + 1 + j = n^+ + j = m$로 되어 $n^+ < m$이다 $\therefore n^+ \in S$이다

그러므로 $n \neq 1$이고 $n \in S$이면 $n^+ \in S$이거나 $n^+ \in T$로 되어 $n^+ \in S \cup T$이나

$n \neq 1$이고 $n \in T$라면 $n^+ > n$이므로 $n^+ \in T$이다 故로 $n \in S \cup T$인 모든 n에 對하여 $n^+ \in S \cup T$가 成立한다 따라서 "N의 部分集合 K가 $1 \in K$이고 各 $n \in K$인 n에 對하여 $n^+ \in K$이면 必然的으로 $N = S$"라는 Peano의 귀납공리에 依하여 $S \cup T = N$이다

(定理 3) $m < n$이면 모든 $k \in N$인 k에 對하여 (1) $m + k < n + k$ (2) $m \cdot k < n \cdot k$이다

逆으로 $m, n, k \in N$인 m, n, k에 對하여 (1)이거나 (2)가 成立하면 $m < n$이다

(證明) (1) $m < n$므로 $j \in N$인 j에 對하여 $m + j = n$ 故로 $n + k = m + j + k = m + k + j = (m + k) + j$이다 $\therefore m + k < n + k$

(2) (1)과 같은 方法으로 $n \cdot k = (m + j) \cdot k = m \cdot k + j \cdot k$이다 $\therefore m \cdot k < n \cdot k$

(1)의 逆의 證明은 (定理 2)에 依하여 $m, n, k \in N$인 m, n, k에 대하여 $m + k < n + k$라면

$m > n$, $m = n$, $m < n$중 어느 하나가 成立할 것이다. 그런데 $m = n$이라면 $m + k = u + k$, $m > n$이면 $m + k > n + k$가 되어 假定에 모순된다

$\therefore m < n$이다

(2)의 逆의 證明도 같은 方法으로 된다

4. 結言

以上에서 自然數의 順序關係에 對한 基礎理論을 살펴 보았다. 序言에서 記述한 바와 같이 數學에서 다루는 問題는 直觀的인 方法을 벗어나 理論的 근거를 제시하고 그를 바탕으로 論理에 합당하게 展開하여야 될 것이다. 그러나 中等學校에서는 直觀에 依한 結果만을 利用하는 경우도 있겠으나 論理의 근거가 있음을 암시하므로 수학에 대한 매력과 흥미를 느끼게 함이 좋을 것이다.

(참고도서)

1. "First Course in Abstract Algebra" by. R.E. Johnson

2. "Modern Algebra" by Van Der Waerden

3. "Modern Algebra" by Frank Ayres

4. "Element of Modern Abstract Algebra" by miller