韓國數學敎育學會誌〈數學敎育〉
1974. 12. Vol. XIII No. 2

Journal of the Korea Society of Mathematical Education
Dec. 1974. Vol. XIII No. 2

INTERSECTION GRAPH 에 관하여

김 연 식

목 차

1. 서 론

G를 (p, q) graph 라고 하는 것은 G가 p개의 point(vertex)로 된 유한 non-empty set $V(G)$와 V의 서로 다른 2개의 point 로 된 q쌍의 set $E(G)$로 되어 있을 경우이다. 이 때 E 안의 point 로 된 각 쌍을 G의 line(edge)라고 한다. graph 의 2개의 주어진 vertex 가 한 edge 로써 이어져 있는 때도 있고 잇는 edge 가 없는 경우도 있으나 2개 이상의 edge 로는 잇지 못한다. (1, 0) graph 는 trivial 한 경우이다.

non-empty set 들의 finite family $S=\{S_1, S_2, \cdots, S_n\}$가 주어 졌을때 $G=G(S)$를 intersection graph 라고 하는 것은 S의 set S_α를 G의 vertex x_α로 생각하고 $S_\alpha \cap S_\beta \neq \phi$일 때 그때만이 이에 대응하는 G의 vertex x_α, x_β는 adjacent 라고 생각한다. 이러한 경우 S를 G에 대한 intersection model 이라고 부르기도 한다. 또 r이 $V(G)$에서 S에의 함수이고 모든 $x_\alpha, x_\beta \in V(G)$에 대하여 x_α, x_β가 G에서 adjacent 이면 $r(x_\alpha) \cap r(x_\beta) \neq \phi$ 일때 r를 graph G의 intersection representation 이라고 한다.

graph G가 주어졌을 때 이에 따른 family S가 존재하여 $G=G(S)$가 될 수 있느냐의 문제는 Paul Erdös, A.W.Goodmon, Louis Posa 등이 해결했고 S가 circle 위에서의 arc 들의 family 일 때 $G(S)$를 circular-arc graph 라고 부르는데 이 경우의 성질은 Alan Tucker 에 의하여 여러가지 발표되었다.

여기에서는 circle 대신 acyclic graph H를 사용한 $G(H)$를 생각한다. 우선 몇가지 용어를 밝혀 둔다.

graph G가 주어졌을 때, ϕ이나, $x \in V(G)$인 $\{x\}$, 또는 end point 를 포함한 simple path 의 edge 와 vertex 로 된 set 등을 arc 라고 부른다. 이러한 경우 empty set ϕ와 single point set $\{x\}$를 arc 라고 부르는 것은 조금 이상하지만 arc 를 취급하는 정의나 정리를 간단하게 일반화 하는

① Alan Tucker, Characterizing circular-arc graphs. Bull Ame. Math Soc. 1970, 1257-1260
② Paul Erdös, A.W.Goodman, Posa. The Representation of a graph by set intersections. 1966. 106-112

때는 대단히 유리하다.

지금 위에서와 같이 r를 graph H 안의 arc로 만든 graph G의 intersection representation이라고 하자. 그와 같은 r를 모든 $x_\alpha, x_\beta \in V(G)$에 대해서 $r(x_\alpha) \cap r(x_\beta)$가 다시 H 안의 arc일 때 semi-normal이라고 한다. 특히 이러한 r를 normal이라고 하는 것은 $S \subset V(G)$가 G의 non-empty complete subgraph를 만들면 $\cap \{r(x_\alpha) \mid x_\alpha \in S\}$가 H 안의 arc가 될때이다. 또 graph G가 normal (semi-normal)라고 하는 것은 어떤 graph H가 존재하여 H 안의 arc로 만든 graph G의 normal (semi-normal) intersection representation r이 생길 때이다. 여기에서 다루는 graph는 no loop이고 multiple edge가 없는 finite graph이다. graph G 안의 cycle $a_1, a_2, \cdots\cdots, a_n$에서 $(a_i, a_{i+2},)$ $1 \leqq i \leqq k-2$, (a_{k-1}, a_1), (a_k, a_2)인 edge를 위 cycle의 triangular chord라고 한다. G 안의 모든 cycle이 G 안에 triangular chord가 적어도 하나 있을 때 graph G를 rigid circuit라고 한다.

주 정리는 다음과 같다.

graph G가 acyclic graph 위의 arc로 만든 intersection representation을 가지면 그 때에 한하여 G는 normal rigid circuit graph가 된다.

2. 보조정리

먼저 graph G는 graph H위에서 만들어진 G의 intersection representation을 갖는다고하자 이때 graph H가 acyclic이기 위한 필요충분조건은 H 안의 arc로서 만들어진 G의 모든 intersection representation이 normal이 되는 것이다. 결국 H가 acyclic일 때에는 언제나 normal representation을 생각해도 무방하다.

용어사용을 간단히 하기 위하여 representation p로서 arc의 set $\{p(x) \mid x \in V(G)\}$이 H를 덮을 때 G는 H위에서 representation을 갖는다고 말하기로 하자. 이러한 경우 이 representation이 normal이면 결국 G의 clique(maximal complete subgraph of G)들이 H 안의 interval이 될 수 있고 또 이러한 interval이 새로운 graph H' 안에서 point들이 될 수도 있다。 이것을 자세하게 밝히기 전에 몇가지 용어를 다시 밝혀 둔다.

graph H의 subgraph K를 section graph라고 하는 것은 K에서 H로의 inclusion map가 homeomorphism일 때이다. q를 graph H에서 graph H'에 가는 graph homeomorphism이라고 하자. 결국 이때의 q는 $V(H)$에서 $V(H')$로의 mapping이 된다. 이때 H' 안의 어떤 connected section graph의 vertex set가 된다면 q를 connected라고 한다. 또 H위에서 G의 representation p가 simple이라는 것은 주어진 $h \in V(H)$에 대하여 다음 성질

h를 포함하는 $\cap \{p(s) \mid s \in S\}$의 connected component가 h 안으로 되어 있다.

을 만족하는 $V(G)$의 subset S가 존재할 때이다.

보조정리 1. p를 graph H위의 arc로서 만들어진 graph G의 (seminormal, normal) intersection representation이라고 하자. 이 때 graph H'과 natural connected onto homeomorphism인 $q: H \to H'$가 존재하여 qp가 H' 위에서의 G의 simple(semi-normal, normal) representation이 된다.

증명 이 증명은 $V(H)$의 cardinality에 관한 induction으로 직접 증명할 수 있다.

graph G에 대하여 G^*를 G의 모든 cligue들의 set라고 하자. $n(G^*)$는 G^*의 nerve를 나타낸다. 보조정리에서 사용한 기호 p, q, H, H', G를 그대로 사용한다。

보조정리 2. p를 graph H위의 arc로 만들어진 graph G의 normal intersection representaiton

R.Brown Elements of modern Topology, Mc Graw-hill, 1968.

라고 하자. 이때 $n(G^*)$의 1-skeleton의 subgraph K가 존재하여 다음 조건 ①−③을 만족하는 H에서 K위로의 connected graph homeomorphism이 존재한다.

① fp는 K안의 arc로 만들어진 G의 normal intersection representation이다.

② K는 $n(G^*)$의 모든 vertex를 포함한다.

③ 모든 $v\in V(G)$에 대하여 $fp(v)$의 모든 vertex는 $\{T\in G^* \mid U\in T\}$이다.

증명 $r=qp$가 graph H' 위에서 G의 simple normal representation일 때 모든 $h\in V(H')$에 대하여

$S(h)=\{s\in V(G) \mid h\in r(s)\}$는 H'의 embedding이고 이 embedding으로 vertex h가 $n(G^*)$의 1-skelecton의 subgraph를 만든다. 이러한 사실만 밝힐 수 있다면 위 보조정리 1에 따라 쉽게 증명할 수 있다. 왜냐하면 $f=Sq$로 놓으면 되기 때문이다.

먼저 graph G가 graph H위에서 normal representation을 갖는다고 하고 x는 Euler characteristic을 나타낸다고 하자. $E(G)=x(n(G^*))$로 정의한다. a_0는 G의 connected component의 갯수를 표시한다. H가 E^3에 embedded된 simplical 1-complex라면 $x(H)$를 다음과 같이 계산할 수 있다. $\{p(v) \mid v\in V(G)\}$는 H의 cover이다. 모든 $S\subset V(G)$에 대하여

$$
\begin{aligned}
x(\cap\{p(s) \mid s\in S\}) &= \begin{cases} 0 & \cap\{p(s) \mid s\in S\}=\phi \\ 1 & \cap\{p(s) \mid s\in S\}\neq\phi \end{cases} \\
&= \begin{cases} 0 & S: G\text{의 complete subgraph를 만들지 않을 때} \\ 1 & S: G\text{의 complete subgraph를만들 때} \end{cases} \\
&= \begin{cases} 0 & \exists T\in G^*,\ \phi\neq S\subset T \\ 1 & \text{그렇지 않을 때} \end{cases}
\end{aligned}
$$

이다. 이것을 사용하여 다음 보조정리를 증명한다.

보조정리 3. graph G가 graph H위에서의 normal representation을 갖는다면 $E(G)=x(H)$이다.

증명 $\#(s)$를 s의 cardinality라고 하자. 모든 $S\in V(G)$에 대하여 S^*를 $S\in T$인 모든 $T\in G^*$로서 만들어진 $n(G^*)$ 안의 simplex라고 하면 Klee에 따라 $x(H)$는 다음과 같이 계산된다.

$$
\begin{aligned}
x(H) &= \sum(-1)^{\#(s)-1}x(\cap\{p(s) \mid s\in S\}),\quad (\phi\neq S\subset V(G)) \\
&= \sum(-1)^{\#(s)-1}(s\subset V(G)\text{가 } G\text{의 complete subgraph를 만든다}) \\
&= \sum(-)^{\#(s)-1}x(\cap\{s^* \mid s\in S\})\ (\phi\neq S\subset V(G)) \\
&= x(n(G^*))=E(G) \\
&\therefore\ x(H)=E(G)
\end{aligned}
$$

보조정리 4. graph G가 어떤 acyclic graph H 위의 arc들로 만들어진 intersection representation을 갖기 위한 필요충분조건은 G가 normal이고 $a_0(G)=E(G)$인 것이다.

증명 $a_1(H)$를 독립된 cycle의 갯수라고 하면

$$
\begin{aligned}
x(H) &= a_0(H)=a_1(H) \\
&= a_0(G)-a_1(H) \\
&= E(G)
\end{aligned}
$$

H가 acyclic이므로 $a_1(H)=0$

$$\therefore\ E(G)=a_0(G)$$

V.L.Klee, The Euler characteristic in combinatorial geometry, Amer. Math. Monthly 70(1963), 119-127.

D.R. Fulkerson and O.A. Gross, Incidence matrices and interval graphs, Pacsific J.Math. 15(1965) 835-855.

graph G 에서 $v \in V(G)$ 의 neighborhood 가 G의 complete subgraph 를 만들 때 v 를 simplicial vertex 라고 한다. 모든 non-empty rigid circuit graph 는 simplicial vertex 를 갖는다.

보조정리 5. c 는 simplicial complex 이고 p 는 다음 (i) (ii)

(i) $\{p(g) \mid g \in V(G)\}$ 는 c 의 cover 이다.

(ii) non-empty set 인 $S \subset V(G)$ 가 G 안에서 complete subgraph 를 만들면 언제나 $\cap \{p(s) \mid s \in S\}$ 는 non-empty 이다.

를 만족하는 c 의 closed simplex 로서 만들어진 graph G 의 intersection representation 이라고 하자 그러면 G 가 connected rigid graph 이면 c 는 C 위에서 한점으로 contractible 된다.

증명 $k(G, C) = \#(V(G)) + \#(V(c))$ 라고 정의하자. 단 $\#(V(G))$ 는 $V(G)$ 의 cardinality 이다. $k(G, C)$ 에 관한 Induction 으로 증명된다. G 가 rigid circuit graph 이므로 G 의 simplicial vertex v_0 가 존재한다. 이때 두 경우

① $p(v_0)$ 가 c 에서 single point 인 경우와

② $p(v_0)$ 가 c 안에서 nontrivial simplex 인 경우

로 나누어 생각한다. 증명은 Fulkerson 과 Gross ③에 따라 직접 이루어진다.

보조정리 6. graph G 가 rigid circuit graph 이면 $E(G) = a_0(G)$ 이다.

증명 $n(G^*)$ 만 simplex 로 만들어진 graph G 의 intersection representation 이 보조정리 5 의 가정을 만족시키므로 G 가 rigid circuit graph 라면 $E(G) = x(n(G^*)) = 1$ 따라서 $E(G) = a_0(G)$.

3. 주정리 (결론)

주정리의 증명을 지금까지의 보조정리를 사용하여 증명한다.

주정리 graph G 가 acyclic graph 위의 arc 들로 만든 intersection representation 을 가지기 위한 필요충분조건은 G 가 normal rigid circuit 가 되는 것이다.

증명 먼저 충분조건부터 증명한다. G 가 normal rigid circuit graph 라고 하자. 그러면 보조정리 6 에 따라 $E(G) = a_0(G)$ 이다. 보조정리 4 에 따라 graph G 를 acyclic graph 위의 arc 들로 만들어진 intersection representation 이 된다. 다음에 필요조건을 증명하자. 일반성을 잃지 않고 graph G 는 어떤 acyclic graph 위에서 representation 을 갖는다고 가정하자. 이에따라 G 가 simplicial point 를 갖는다는 것을 밝힐 수 있다.

곧 보조정리 2 와 "graph H 가 acyclic 가 되기 위한 필요충분조건은 H 안의 arc 들로 만든 모든 intersection representation 이 normal 이다" 라는 성질에 따라 H 의 vertex 들을 G^* 와 같다고 가정할 수 있다. 이것은 보조정리 2 의 graph homeomorphion 에 따라 graph 의 acyclicity 의 보존을 쓰고 있다. H 가 acyclic 이므로 H 는 적어도 하나의 terminal vertex h_0 를 갖는다. $S \in G^*$를 $h_0 \in H$ 에 대응시키자. $\cap \{p(s) \mid s \in S\} = h_0$ 이고 h_0 에서 나오는 edge 는 단 하나이므로 $p(s_0) = h_0$ 이고 s_0 가 G 의 simplicial point 인 $s_0 \in S$ 가 존재한다. 즉 G 가 simplicial point 를 갖는다.

또는 G 의 모든 section graph 는 acyclic graph 위에서 representation 을 가질 수 있으므로 모든 non-empty section graph simplicial point 를 갖는다. 따라서 Fulkerson 과 Gross 에 따라 G 는 rigid circuit graph 이다.

참 고 문 헌

1. F.Harary, graph theory, Addison-Wesley, Reading, Mass, 1969.
2. R.Brown, Elements of Modern Topology, McGraw-Hill, 1968.

3. D.R.Fulkerson and O.A. Gross, Incidence matrices, and interval graphs, Pacific J.Math, 15 (1965) 835-855.
4. P.C.Gilmore and A.J.Hoffman, A characterization of comparability graphs and of interval graphs, Canad, J.math, 16(1964) 539-548.
5. V.Klee, What are the intersection graphs of arcs in a circle? Amer Math, Monthly 76(1969)810-813
6. A.Tucker, Characterizing circular-arc graphs, Bull. Amer, Math. soc. 76(1970) 1257-1260
7. Paul Erdös A.W.Goodman, and Louis Posa, The representation of a graph by Set intersections, Canad, J.math, 18(1966) 106-112.

Abstarct

We consider "ordinary" graphs: that is, finite undirected graphs with no loops or multiple edges. An intersection representation of a graph G is a function r from $V(G)$, the set of vertices of G, into a family of sets S such that distinct points x_α and x_β of $V(G)$ are neighbors in G precisely when $r(x_\alpha)\cap r(x_\beta)\neq\phi$, A graph G is a rigid circuit grouph if every cycle in G has at least one triangular chord in G. In this paper we consider the main theorem;

A graph G has an intersection representation by arcs on an acyclic graph if and only if is a normal rigid circuit graph.

(서울대학교 사범대학)