<論說>

水資源開發計劃과 最適化手法에 對하여
on the Optimization Methods for Water Development Planning

崔 榮 博
Choi, young Bak

1. 머 릿 말

最適化의 手法은 數理計劃法(mathematical Programming)이라고도 하여 매우 넓게 應用範圍를 가진 數學的 手法이다. 이 最適化問題의 歷史는 數學史와 같은 정도로 오래된 것이다. 이 종류의 問題에 대한 最初의 系統的인 試圖는 Newton, Lagrange, Cauchy등의 이름아래 微分學의 發達에서 시작하고 있다. 그러나 그후 實質的인 進展은 거의 볼수 없었으나, 20世紀中葉경에 이르러서 電子計算機가 利用될 수 있게 되고 또한 決定論의 問題(decision problem)解法에 대한 要求가 强하게 요청됨에 따라 급격히 發展하게 되었다.

最近 그 發展이 눈부신 시스템設計 synthesis hydrology 등으로 불리워지는 이른바 "創出"하는 것에 관계하는 分野에는 반드시 最適化의 問題가 나타난다.

最適化의 手法은 原來 實務者를 위한 手法이고 G.B. Dantzig의 線形計劃法, R.Bellman의 動的計劃法, L.S.Pontryagin의 最大原理에 대해서는 그 理論이 體系的으로 展開되어 있다. 이에 대해서 非線形計劃法에 관한 硏究로서는 H.W. Kuhn과 A.W Tucker의 유명한 理論이 있고, 凹函數의 理論은 대체로 體系化되어 있으나 그 밖의 制約條件을 十, 即 陽形으로 取扱하는 手法은 일반적으로 어는 누구도 成功하지 못하고 있는것 같다.

制約條件이 없는 경우의 非線形問題에 대한 解法은 直接探索法, 傾斜法, Newton의 反復法등 수많은 시도에 의거 成功하고 있으나, 이들 方法으로서 重要한 應用으로서 制約條件이 있는 非線形計劃法의 問題를, 制約條件이 없는 경우에 非線形問題로 잘 變換시켜 푸는 方法이 硏究하게 되었다. 이와같은 手法은 SUMT라 부르고 있다.

이와같이 넓은 範圍에 걸친 最適化手法을 古典理論에서부터 現在의 그것에 이르기까지 總網羅해서 소개하는 것은 紙面制限으로 不可能하다. 따라서 여기서는 線形計劃法, 動的計劃法, 最大原理 및 非線形計劃法의 基礎的인 部分에 초점을 두어 可能한 數値解法을 計算例에 의거 풀이한다. 그리하여 보다 高度의 理論과 그 擴張에 관해서는 參考文獻에 의거하기 바라며 여기서는 省略한다.

2. 線形計劃法

a. 線形計劃法의 定式化

線形計劃法(linnear Programming)이란 어떤 制約條件(Constraints)에 따르는 수많은 變數의 相互作業을 取扱하는 最適化를 위한 手法이다. 이와 같은 問題를 푸는데 있어서는 目的對象으로 되는 것, 예를 들어 利益・費用・生産 기타 有效性의 尺度로 되는 것이 어느 條件下에 最適한 方法으로 達成되어야만 한다. 이 경우의 制約條件으로서는 政府의 要請, 法律上의 制限, 經濟的인 制約, 生産活動의 狀況, 資源上의 制約, 輸送上의 制約 등을 들 수 있다. 일반으로 線形計劃法의 問題는 다음과 같이 定式化된다.

目的函數:

$$\max f(x)=c_1x_1+c_2x_2+\cdots+c_nx_n \quad \cdots\cdots\cdots(1)$$

制約條件:

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots\cdots\cdots a_{1n}x_n\leqq S_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots\cdots\cdots a_{2n}x_n\leqq S_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots\cdots\cdots a_{mn}x_n\leqq S_m \\ x_1, x_2, \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots x_n\geqq 0 \end{array}\right\} \cdots\cdots\cdots (2)$$

本會副會長・高麗大理工大敎授

의 條件下에서 最大化하는 것.

위 式에서 明白한 바와 같이 線形計劃法이란 + 또는 0의 값을 취하는 數個의 連續變數에 관한 聯立1次不等式의 制約條件下에서 이들의 變數에 관한 어떤 1次式(目的函數 : objective function)을 最大化 또는 最小化하는 것이다.

실제로 線形計劃法의 問題를 풀때는 式(2)의 不等式을 等式으로 고칠 필요가 있다. 즉 式(2)의 m個 不等式의 個個의 兩邊差를 x_{n+1}, $x_{n+2}, \cdots$, x_{n+m}으로 하면

目的函數 :

$$f(x)=c_1x_1+c_2x_2+\cdots\cdots+c_nx_n$$

制約條件 :

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots\cdots+a_{1n}x_n+x_{n+1}=S_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots\cdots+a_{2n}x_n+x_{n+2}=S_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots\cdots+a_{mn}x_n+x_{n+m}=S_m \\ x_1,\ x_2,\cdots\cdots,\ x_n,\ x_{n+1},\cdots\cdots\cdots,\ x_{n+m}\geqq 0 \end{array}\right\}\cdots\cdots(3)$$

式(1)은 x_1, $x_2,\cdots$, x_n, $x_{n+1},\cdots$, x_{n+m}에 관한 1次式으로서, 偶然히 $x_{n+1},\cdots$, x_{n+m}의 係數가 0으로 되었다고 생각하면 된다. $x_{n+1},\cdots$, x_{n+m}을 slack變數라 한다.

b. Simplex法

Simplex法에 의한 計算順序를 說明하기 위하여 다음 線形計劃法의 問題를 생각하여 보자.

目的函數

$$f(x)=8.5x_1+13x_2+15x_3+16x_4\ \cdots\cdots\cdots\cdots(4)$$

制約條件

$$\left.\begin{array}{l} 0.9x_1+2.0x_2+2.2x_3+2.0x_4\leqq 24 \\ 1.5x_1+1.0x_2+1.8x_3+2.0x_4\leqq 23 \\ 1.1x_1+1.5x_2+2.4x_3+2.5x_4\leqq 25 \end{array}\right\}\cdots\cdots\cdots(5)$$

式(5)에 slack를 添加하면

$$\left.\begin{array}{l} 24=0.9x_1+2.0x_2+2.2x_3+2.0x_4+x_5 \\ 23=1.5x_1+1.0x_2+1.8x_3+2.0x_4+x_6 \\ 25=1.1x_1+1.5x_2+2.4x_3+2.5x_4+x_7 \end{array}\right\}\cdots(6)$$

그러나 表-1의 제1단계 行列은 제1行에 目的函數 係數의 陰値 벡터를, 제2~4行에는 式(6)의 係數行列을 整理해서 기입함으로써 작성한 것이다. 이 表를 simplex tableau라 하고 線形計劃法의 計算순서를 方式化한 것이다.

Simplex表의 第1段階(Step)에서는 x_1, x_2, x_3, x_4는 任意로 정할 수가 있다. 이것을 任意로 1組 정한 후 식(6)에 의하여 x_5, x_6, x_7을 정하면 x_6, x_7이 解가 된다. 지금 $x_1=x_2=x_3=x_4=0$으로 정하면 만약 S列의 數値가 모두 非陰數로 되면 $x_5=24$, $x_6=23$, $x_7=25$로 된다. 이와같은 식(6)의 制約條件을 만족하는 $x_1,\cdots$, x_7을 實行可能解(feasible solution)이라고 한다.

다음에 이와같이 하여 求한 實行可能解와 그 以外의 實行可能解와의 得失을 比較하는 것을 생각하기로 하자. 이것을 위하여는 Simplex表의 各段階의 第1行을

表-1 Simplex表

段階	基底	S	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	θ
1	$f(x)$	0	−8.5	−13	−15	−16	0	0	0	—
	x_5	24	0.9	2.0	2.2	2.0	1	0	0	12
	x_6	23	1.5	1.0	1.8	2.0	0	1	0	11.5
←	x_7	25	1.1	1.5	2.4	2.5	0	0	1	10
2	$f(x)$	160	−1.46	−3.4	0.36	0	0	0	6.4	—
→	x_5	4	0.02	0.8	0.28	0	1	0	−0.8	5
	x_6	3	0.62	−0.2	−0.12	0	0	1	−0.8	—
←	x_4	10	0.44	0.6	0.96	1	0	0	0.4	16.7
3	$f(x)$	177	−1,375	0	1.55	0	4.25	0	3	—
→	x_2	0	0,025	1	0.35	0	1.25	0	−1	200
←	x_6	4	0.62	0	−0.05	0	0.25	1	−1	6.4
	x_4	7	0,425	0	0.75	1	−0.75	0	1	16.5
4	$f(x)$	185.8	0	0	1.44	0	4.8	2.2	0.8	—
	x_2	4.84	0	1	0,352	0	1.24	−0.04	−0.96	—
→	x_1	6.4	1	0	−0.08	0	0.4	1.6	−1.6	—
	x_4	4.28	0	0	0,784	1	−0.92	−0.68	1.68	—

보면 좋다. 그 이유로는 이行은 Simplex가 基準(Simplex criterion) $W_j=Z_j-C_j$를 나타내고 모든 j에 대하여 $W_j \geqq 0$이 成立한다면 그 實行 可能解는 最適解(optimum solution)이 되는 것을 G.B.Dantzig에 의하여 證明되어 있는 까닭이다.

第1段階의 S列은 모두 非陰數일것, 즉 이 形이 하나의 實行可能解를 나타내고 있는 것을 確認한 후에 W_j數에 陰數가 없는가를 조사한다. 이 경우 −8.5, −13, −15, −16=1 4個가 있다. 이 중에서 絶對値의 가장 큰 것(most negative), 즉 $x_4=-16$에 注目하여 x_4列를 표식한다. 다음에 x_4列과 S列과의 數値에서 θ列을 24/2.0=12, 23/2.0=11.5, 25/2.5=10에 의하여 만들고 그 大小를 비교한다. 이 경우에는 x_7行에 對應하는 10이 最小이므로 x_7行을 표식한다. 이 方法에 의하여 第2段階의 基底(basis)에 새로 取入하여야할 變數 x_4 代身에 基底에서 내쫓아야할 變數 x_7이 결정된다. 즉 第2段階의 基底는 x_5, x_6, x_4가 된다. 따라서 第2段階의 基底의 欄에 이것을 記入하고 이에 수반하는 消去變換을 한다. 第2段階의 第1行 즉 W_j陰數를 찾자면 −1.46, −3.4의 2개가 있다. 이 중에서 絶對値의 가장 큰것, 즉 x_2列의 −3.4에 注目하고 x_2列를 표식한다. 다음에 x_2列의 陽數字와 S列의 數字에서 θ列을

$$4/0.8=S,\quad 10/0.6=16.7$$

에 의하여 만들고 그 大小를 비교한다. 이 경우 x_s行에 對應하는 5가 最小이므로 x_2를 基底에 넣어 x_5를 쫓아내고 이에 수반하는 消去變換을 하여 第3段階를 얻는다. 이하 이 方法을 反復한다.

이 問題에서는 第4階에 있어서 모든 j에 대하여 $W_j \geqq 0$으로 된다. 이것을 最適解에 도달한 것을 나타낸다.

最適解는 $x_1=6.4$, $x_2=4.84$, $x_4=4.28$, $x_3=x_5=x^6=x_7=0$, $f(x)=185.8$이다.

〔計算例〕 벼 栽培期間이 3期로 나누어져 耕作別 各期의 單位 必要水量 및 各期의 總 利用可能 水量이 表—2와 같이 부여되어 있을 때 最大利益을 얻기 위하여 各 耕種을 어떻게 할당하면 좋은가.

表—2 單位用水量(m^3/day/ha)과 利益

(千원/ha)

期別＼區分	야 채	과 수	利用可能水量
	(m^3/day/ha)	(m^3/day/ha)	(m^3/day)
第1期	30	55	24,650
第2期	50	61	30,000
第3期	70	30	28,000
	(千원/ha)	(千원/ha)	
利 益	50	32	—

表—2에 바탕하여 制約條件 및 目的函數의 標準式을 쓰면 다음과 같이 된다. 단 S는 slack變數이다.

制約條件：
$$30x_1+55x_2+S_1=24,650$$
$$55x_1+61x_2+S_2=30,000$$
$$70x_1+30x_2+S_3=28,800$$
$$xj \geqq 0(j=1,2)$$
$$S_k \geqq 0(k=1,2,3)$$

目的變數：$Z=50x_1+32x_2$

이 式들을 바탕으로 하여 表—3을 만든다. 이것이 simplex表이다. 이 表로 부터 알 수 있는 바와같이 第1段階 (step1)의 제3란은 위 式의 계수를 그대로 並列한 것이고 제2란에 S_k 및 $-Z$를 기입한다. 각 行 우단에 그 行의 합계를 써서 검산에 사용한다.

다음에 $-Z$의 行에 있는 제3란 내의 陰數중 絶對値가 最大가 되는 것을 찾는다. 지금의 경우 −50으로 x_1列 안에 있다. 따라서 x_1列 안에서 定數(x_1의 계수)의 最小値를 찾는다. 이 예에서는 28,800/70이 最小이므로 이 行 S_3에 표시한다. 단 이 계산에서 $-Z$行 및 比가 −로 되는 行이 있다면 이 行은 제외하고 생각한다.

다음에 第2段階로 옮긴다. 第1段階에서 표시된 S_3의 대신으로 x_1을 넣어 第1段階의 S_3行 값을 ［　］의 값 70으로 나눈 결과를 x_1行에 기입한다. S_1行의 값은 당연히 1로 된다. 다음에(第1段階의 S_1行 값)−(第2段階의 S_1行 값)×30을 구해서 第2段階의 S_1行에 어떻게 x_1列에서 x_1行 그밖의 값을 0으로 하는것 같은 계산을 S_3行, $-Z$行에 대하여 行하고 第2段階의 각行, 각列의 값을 구한다.

다음에 第1段階에서 行하였던 것과 같은 수법을 반복하고 第2段階의 수치를 구한다. 이 계산을 $-Z$行에 陰數가 없을 때까지 반복한다.

이 예에서는 第3段階로 계산이 끝나고 풀이가 구하여져 있다. 즉 第3段階의 定數列에서 $-Z$行의 수치가 最適配當을 行하였을 때의 利益을 22,653千원, $x_1=327$(ha) 및 $x_2=197$(ha)이 그 配當面積이란 것을 또 $S_1=4,007$(m^3/day)이 利用可能水量의 잉여량이란 것을 나타내고 있다. 또 最終段階의 $-Z$行, S_1, S_2, S_3列의 숫자는 各期의 利用可能 水量이 1단위(m^3/day) 增加하는 것에 의하여 생기는 이익을 나타내고 있다. 이 이익 증가는 他期의 利用可能水量과 연관하므로 한계가 있는 것은 당연하다.

따라서 이 숫자들은 利用可能 水量의 限界收益과 같은 것에 상당하는 것으로서 이것을 潛在價格(Shadow price)이라 부르고 있다.

表-3 Simplex表

段階	基底變數	x_1	x_2	S_1	S_2	S_3	$-Z$	定數	計
1	S_1	30	55	1	0	0	0	24,650	24,736
	S_2	55	61	0	1	0	0	30,000	30,117
	S_3	70	30	0	0	1	0	28,800	28,901
	$-Z$	−50	−32	0	0	0	1	0	−81
2	S_1	0	42,143	1	0	−0,429	1	12,307.16	12,349.87
	S_2	0	37,429	0	1	−0,786	0	7,371.44	7,409.08
	x_1	1	0,429	0	0	0,014	0	411.43	412.87
	$-Z$	0	−10,572	0	0	0,714	1	20,571.41	20,562.55
3	S_1	0	0	1	−1,126	0,456	0	4,007.26	4,007.59
	x_2	0	1	0	0,027	−0,021	0	196.95	197.95
	x_3	1	0	0	−0,012	0,023	0	327.02	328.03
	$-Z$	0	0	0	0,282	0,492	1	22,653.43	22,655 20

b) 雙對性(duality)

모든 종류의 線形計劃問題(primal)가 集合된 것을 雙對性이라고 말하며 이것 역시 다른 한 線形計劃問題가 된다. 원래의 線形計劃問題가 n個의 變數와 m個의 制約條件을 갖는다면 이에 대한 雙對性문제는 n개의 制約條件과 m개의 變數를 갖는다. 이들 雙對問題나 원래문제의 풀이는 보통 線形문제의 해법으로 충분히 해결할 수 있다. 실제로 雙對性문제에 대한 雙對가 원래의 문제이므로 처음부터 線形計劃으로 설계된 문제는 존재할 수 없다. 이에 관한 증명은 Hadley의 "Linear programing에 수록되어 있다.

원래문제를 아래 식과 같다 하면

目的函數 max: $2'p=c_1x_1+\cdots\cdots+c_nx_n$ ·········(7)

制約條件: $\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n\leq b_1 \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\quad+a_{mn}x_n\leq b_n \end{array}\right\}$ ···(8)

$xj\geq 0 \quad j=1,\cdots,\ n$ ··············(9)

雙對性문제는 다음과 같이 정의된다.

目的函數 min: $Zd=b_1y_1+\cdots+b_ny_n$ ············(10)

條約條件: $\left.\begin{array}{l} a_{11}y_1+a_{21}y_2+\cdots+a_{m1}y_m\geq c_1 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{2n}y_2+\cdots+a_{mn}y_m\geq c_n\cdots\cdots\cdots \end{array}\right\}$ (11)

$y_i\geq 0 \quad i=1,\cdots,\ m$··············(12)

따라서 雙對性의 주요 성질은 다음과 같다.

① 식(9)의 변수 즉 원래문제의 變數 n은 식(12)의 雙對문제에서 m으로 바뀌었다.

② 식(8)의 계수행렬 aij는 식(11)에서 aji로 대치되었다.

③ 식(7) 및 식(8)에서 bi와 ci는식 (10) 및 식(11)에서 서로 바뀌게 된다.

④ 식(8)에서 不等號의 方向은 식(11)에서 그 方向이 바뀌게 된다.

⑤ 식(7)의 目的變數 max은 식(12)에서 목적변수 min으로 치환된다.

(b-4) 식(10)의 雙對性문제 표시방법는 對稱雙對性(symmetric clual)이라 불리우며 다음과 같은 성질이 있다.

i. 원래문제의 制約條件을 아래와 같다 하면

$\sum_{j=1}^{n} aijxj\geq bi$ 　　最小 目的變數

혹은

$\sum_{j=1}^{n} aijxj\leq bi$ 　　最大 目的變數

이에 대응하는 雙對性制約條件은 각각 다음과 같다.

$\sum_{i=1}^{m} aijyi\geq Cj$ 　　最大 目的變數

혹은

$\sum_{i=1}^{m} aijyi\geq C_j$ 　　最小 目的變數

ii. 原來變數는 물론 雙對變數에도 非陰數條件은 적용할 수 없다.

必要할때는 等式으로서의 制約條件은 不等式인 한쌍의 制約條件으로 代置될 수 있다. 예를 들면 $3x_1+x_2=4$의 제약조건은 $3x_1+x_2\geq 4$와 $3x_1+x_2\leq 4$로서 代置될 수 있다. 이들 부등식은 양변에 −1을 곱하여 不等號의 방향을 적절히 바꿀 수 있으므로 對稱雙對의 變換은 쉽게 行할 수 있고 simplex 0으로 해를 구할 수 있다.

예컨데 원래의 문제를

목적변수 max: $Z'p=x_1+4x_2$

制約條件: $3x_1+2x_2\leq 6$

$$2x_1+x_2=5$$
$$x_1-3x_2\geq 7$$
$$x_1,\ x_2\geq 0$$

이라 하면 이 문제는 다음과 같이 표시할 수 있다.

목적변수 min: $Z'p=x_1+4x_2$

제약조건 : $3x_1+2x_2\leq 6$

$2x_1+x_2\leq 5$

$2x_1-x_2\leq -5$

$-x_1+3x_2\leq -7$

$x_{12}\ x_2\geq 0$

원래의 문제를 직접 풀이하는 것이 아니므로 원래문제의 變數 bi는 반드시 (+)일 필요는 없다. 따라서 雙對性문제는 다음과 같이 된다.

목적변수 min: $Zd=6y_1+5(y_2-y_3)-7y_4$

制約條件 : $3y_1+2(y_2-y_3)-y4\geq 1$

$2y_1+(y_2-y_3)+3y_4\geq 4$

$y_1,y_2,y_3,y_4\geq 0$

우발적으로 等式의 制約條件은 雙對性문제의 不等式에 미치는 영향이 없으므로 等式인 制約條件은 한쌍의 不等式의 制約條件으로 반드시 치환될 필요는 없다. 그러나 i번째의 制約條件이 等式으로 존속되면 雙對性문제의 i번째 變數는 부호의 제한을 받지 않는다. 이와 마찬가지로 원래문제의 j번째 變數가 제한을 받지 않으면 雙對性문제의 j번째 제약조건은 等式이 된다. 따라서 앞의 예에서 雙對性문제는 同等하도록 다음과 같이 된다.

목적변수 min: $Zd=6y_1+5y_5-7y_4$

제약조건 : $3y_1+2y_5-y_4\geq 1$

$2y_1+y_5+3y_4\geq 4$

$y_1,y_4\geq 0$

y_5, 부호의 제한을 받지 않음.

이제 남은 과제는 雙對性문제에 관한 最適解로 부터 여하히 원래문제에 관한 最適解를 결정하는가의 문제이다. 첫째로 일련의 不等式 식(11)을 각각 $x_1,\cdots,\ x_n$을 곱하여 그 합을 구한다. xj가 +가 되는 제한을 받도록 정리하면

$$\begin{aligned}&y_1(a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n)\\&\quad+y_2(a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n)+\\&\quad\cdots+y_m(a_{m1}x_{14}a_{m2}x_2+\\&\quad\cdots+a_{mn}x_n)\geq c_1x_1+c_2x_2+\\&\quad+c_nx_n=Z'p\ \cdots\cdots\cdots\cdots(13)\end{aligned}$$

이 된다.

不等式 (2)에서 괄호내의 량은 이에 대응하는 식(8)의 값보다 작으므로 식(13)은 다음과 같이 된다.

$$y_1b_1+y_2b_2+\cdots+y_mb_m\geq c_1x_1+c_2x_2+x_n$$

바꾸어 말하면 (7)~(12)식을 만족시키는 모든(x_1, $\cdots$, x_n) 및 (y^1, $\cdots$, y_n)에 관하여 $Zd\geq Z'p$가 성립된다. 따라서 Zd를 최소로 하면서 $Z'p$를 최대로 되게 하는 $Z'p=Zd$와 같은 x^1 및 y^1의 조합은 즉 雙對문제의 最小가 되는 最適의 값은 원래문제의 최대가 되는 최적의 값이 된다.

Dantzig와 Orden의 이론을 응용하여 원래문제의 基本變數의 最適値는 雙對性문제의 풀이로서 구할 수 있다. 이 이론은 雙對性문제의 i번째 제약조건이 不等式이라면 이에 대응하는 원래문제의 i번째 變數는 비기초 변수가 되고 즉, 이는 무시된다. 또 雙對性문제의 i번째 變數가 (+)이라면 원래문제의 i번째 制約條件은 等式을 만족시킨다. 따라서 원래문제 變數의 값은 이에 대응하는 雙對變數가 되는 원래문제의 制約條件의 조합을 동시에 해결하므로서 구할 수 있다. 원래의 변수를 구하는 편리한 방법으로는 雙對表(dual tableau)를 이용할 수 있다. 원래문제의 i번째 變數는 最終의 雙對性문제표에서 $(m+i)$번째 slack의 목적계수와 同一하다.