管渠의 應力解析

Analysis of Stress for Underground Pipe line

高 在 君*

Jae Koon Ko

1. 緖 論

用·排水暗渠에 널리 쓰이는 管渠는 潛管과 같은 內壓管과는 고 應力解析에 있어서 全然 다른것이다. 바꾸어 말하면 潛管은 內壁에 作用하는 壓力(水壓)에 의하여 圓周方向의 引張力 卽 周管力(hoop tension)이 생기며 그 應力解析은 비교적 간단 하지만 管渠는 外壁에 作用하는 壓力(土壓)에 의하여 휨모우멘트 剪斷力 軸力이 생기며 그 應力解析은 까다롭다. 따라서 여기에서는 管渠設計에 있어서 參考가 되겠으면 하여 몇가지 荷重狀態에 對하여 管渠의 應力解析을 紹介하기로 한다.

2. 理 論

管渠의 應力解析은 斷面이 圓形이므로, 直線材가 아니고 曲材이므로 Rahmen 構造의 應力解析에 널리 쓰이고 있는 撓角撓度法(Slope-deflection method)이나 모우멘트分配法(Moment distributiou method)의 適用이 不可能한 것이다. 따라서 變形 Energy (Strain energy)의 理論을 適用하게 되며 여기에서는 Castiglianlo 定理에 의하여 解析하게 된다.

Castigliano이 定理를 要約하면 部材의 變形 Energy를 任意의 한 힘(集中荷重 또는 偶力)에 關하여 偏微分하면 그 偏導函數는 힘의 作用點에서 힘의 作用方向의 變位(처짐 또는 回轉角)을 나타내는 것이다. 이를 數式으로 表現하면 다음과 같다.

$$\frac{\partial U}{\partial P_n}=\delta_n, \quad \frac{\partial U}{\partial M_n}=\phi_n$$

여기서 U: 變形 Energy (또는 內部일)

P_n: 어떤 한 集中荷重

M_n: 어떤 한 偶力

δ_n: n點의 P_n 方向의 變位(처짐)

ϕ_n: n點의 M_n 方向의 變位(回轉角)

變形 Energy U는 部材의 應力 卽 直應力(軸力), 휨응력(휨모우멘트) 전단응력(剪斷力)등에 의한 內部일을 뜻하며 그 基本式은 다음과 같이 表示된다.

$$U_1=\int_0^l \frac{N^2}{AE}dx, \quad U_2=\int_0^l \frac{M^2}{EI}dx, \quad U_3=\int_0^l \frac{\alpha S^2}{AG}dx$$

여기서 U_1: 軸力에 의한 變形 Energy

U_2: 휨모우멘트에 의한 變形 Energy

U_3: 剪斷力에 의한 變形 Energy

A: 部材의 斷面積

E: 彈性係數(Young 係數)

I: 斷面 2 차모우멘트(2차率)

G: 剪斷彈性係數(剛性係數)

N: 軸方向力

M: 휨모우멘트

S: 剪斷力

α: 斷面形狀에 의한 係數

部材는 荷重狀態와 斷面의 位置에 따라 直應力 휨應力 剪斷應力을 同時에 받거나 또는 두 가지 應力이나 한가지 應力만을 받을 수 있는 것이다. 그런데 變形 Energy의 값은 다른 應力의 變形 Energy 값에 비하여 퍽 크기 때문에 一般的으로 휨應力의 變形 Energy가 그 部材의 變形 Energy를 代表하고 다른 應力에 의한 變形 Energy도 無視하게 된다. 따라서 여기에서도 變形 Energy은 힘應力의 變形 Energy 값을 쓰도록 한다.

管渠의 應力解析은 Castigliano의 定理가 基本이 되고 있는데 解析上 變位(처짐, 回轉角)가 零이 되는 條件을 利用하므로 그 內容은 最小일로 歸結되는 것

* 서울大學校 農科大學

을 알수 있다. 따라서 管渠의 應力解析은 最小일의 適用이라고 말할 수도 있겠다.

3. 應力解析

a) 鉛直集中荷重이 作用할 경우

그림(a)와 같이 集中荷重이 作用하면 圓管과 外力이다 같이 圓管의 中心을 지나는 縱軸·橫軸에 對하여 對稱이 되므로 A點과 B點의 斷面力은 같고 C點과 D點의 斷面力이 서로 같다는 것을 알 수 있다.

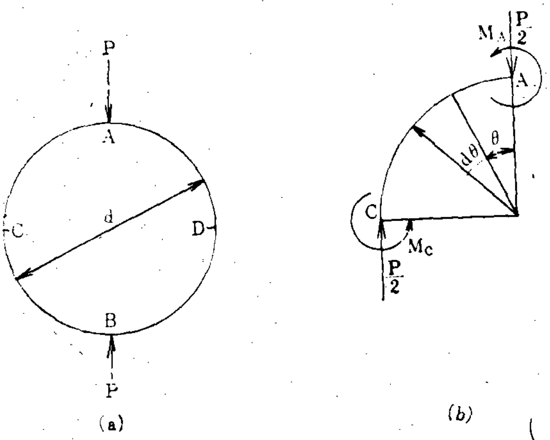

그림 (a)

따라서 그림(b)와 같이 4分圓에 對하여 自由體線圖를 생각할 수 있다.

그림(b)에서 平衡條件을 $\sum M=0$를 適用하면

$$A_A+M_C-\frac{p}{2}\cdot\frac{d}{2}=0$$

$$\therefore M_A=\frac{pd}{4}-M_C\cdots\cdots(1)$$

휨應力에 의한 變形 Energy의 偶力 M_A에 對한 偏導函數는 A點의 回轉角을 意味(Castigliano's theorem)하며 이 값은 圓管과 荷重의 對稱條件에 의하여 零이 된다. 卽

$$\frac{\partial U}{\partial M_A}=\frac{\partial}{\partial M_A}\int_0^{l}\frac{M^2}{EI}dx=\frac{1}{EI}\int M\cdot\frac{\partial M}{\partial M_A}dx$$
$$=\phi_A=0$$

여기에서 $dx\rightarrow ds=rd\theta$이고 $EI=$一定하므로 윗식은 다음과 같이 정리되며 最小일의 꼴이 된다.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}M\cdot\frac{\partial M}{\partial M_A}\cdot rd\theta=0\cdots\cdots(2)$$

任意의 斷面 θ에 있어서 휨모우멘트 M와 M_a에 관한 導函數는 各各 다음과 같다.

$$M=M_A-\frac{p}{2}\cdot\frac{d}{2}\sin\theta,\qquad \frac{\partial M}{\partial M_A}=1$$

이들 값을 (2)式에 代入하고 展開한다.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}M\cdot\frac{\partial M}{\partial M_A}\cdot rd\theta=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(M_A-\frac{pd}{4}\sin\theta\right)(1)rd\theta$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(M_Ar-\frac{pd\gamma}{4}\sin\theta\right)d\theta$$
$$=\left[M_A\gamma_\theta+\frac{pdr}{4}\cos\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi r}{2}M_A-\frac{pdr}{4}=0$$

$$\therefore M_A=\frac{pd}{2\pi}=0.0159pl=0.318p\gamma$$

M_C의 값은 (1)式에 의하여 구하면

$$M_C=\frac{pd}{4}-M_A=\frac{pd}{4}-0.159pd=0.091pd$$
$$=0.182pr$$

따라서 $M_A=M_B=0.318pr$, $M_C=M_D=-0.182pr$

剪斷力 S와 軸力 N의 값은 그림(c), (d)의 自由體線圖에 의하여 간단히 구할 수 있다.

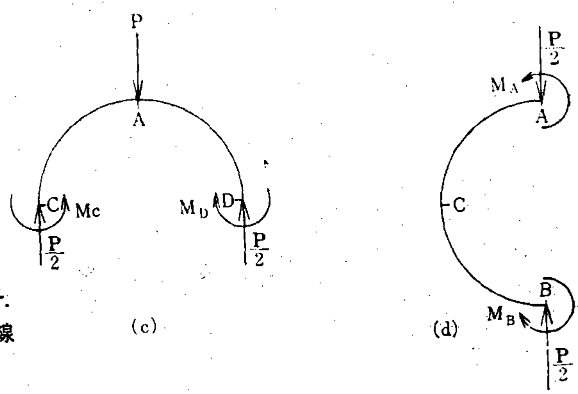

그림 (b)

$$S_A=S_B=\frac{p}{2}$$
$$S_C=S_D=0$$
$$N_A=N_B=0$$
$$N_C=N_D=\frac{p}{2}$$

b) 鉛直等分布荷重이 作用할 경우

鉛直等分布荷重이 作用하는 경우에도 鉛直集中荷重의 경우와 같은 對稱關係가 成立 되므로 그림(b)에 있어서 平衡條件 $\sum M=0$를 適用하면

$$M_A+\frac{wp}{2}\cdot\frac{d}{4}+M_C-\frac{wd}{2}\cdot\frac{d}{2}=0$$

$$M_A=-M_C+\frac{wd^2}{8}\cdots\cdots\cdots(1)$$

任意의 點의 휨모우멘트 M와 M_A에 관한 偏導函數는 다음과 같다.

$$M=M_A-wr\sin\theta\cdot\frac{1}{2}r\sin\theta=M_A-\frac{w}{2}r^2\sin^2\theta$$

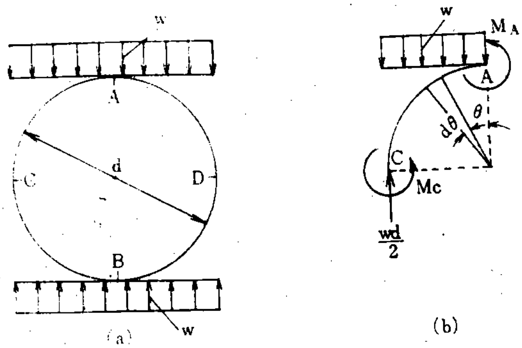

그림 (c)

$$\frac{\partial M}{\partial M_A}=1$$

$$\therefore \int_0^{\frac{\pi}{2}} M\cdot\frac{\partial M}{\partial M_A} r d\theta=\int\left(M_A-\frac{wr^2}{2}\sin^2\theta\right)(1) r d\theta$$

$$=\left[M_A r\,\theta-\frac{wr^3}{2}\left(\frac{\theta}{2}-\frac{1}{4}\sin 2\theta\right)\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=M_A r\frac{\pi}{2}-\frac{wr^3}{2}\cdot\frac{\pi}{4}=0$$

$$\therefore \quad M_A=\frac{wr^2}{4}$$

M_C 를 (1)式에 의하여 구하면

$$M_C=-M_A+\frac{wd^2}{\delta}=-\frac{wr^2}{4}+\frac{w}{8}(2r)^2=\frac{wr^2}{4}$$

對稱條件에 의하여

$$M_A=M_B=\frac{wr^2}{4}$$

$$M_C=M_D=-\frac{wr^2}{4}$$

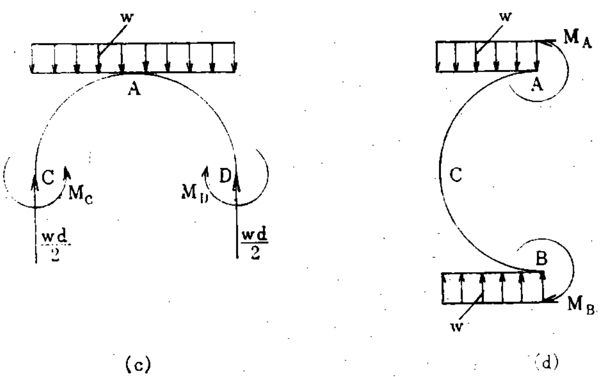

그림 (d)

剪斷力과 軸力은 그림 (c), (d)에 의하여

$S_A=S_B=0$ $\qquad$ $N_A=N_B=0$

$S_C=S_D=0$, $\qquad$ $N_C=N_D=\frac{wd}{2}=wr$

(c) 水平等分布荷重을 받은 경우

이 경우는 鉛直等分布荷重을 받는 경우를 90° 回轉시킨것과 同一한 條件이므로 (b)경우의 結果를 引用할 수 있다. 따라서 各 斷面의 應力은 다음과 같다.

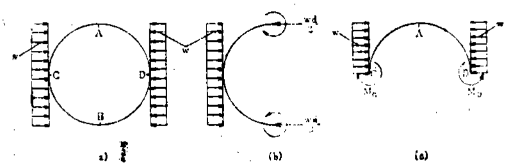

그림 (e)

$$M_A=M_B=-\frac{wr^2}{4}$$

$$M_C=M_D=\frac{wr^2}{4}$$

$S_A=S_B=0$ $\qquad$ $N_A=N_B=wr$

$S_C=S_D=0$ $\qquad$ $N_C=N_D=0$

(d) 水平等變荷重이 作用하는 경우

水平等變荷重이 作用하는 경우에는 (a), (b)의 경우와 달리 縱軸에 限하여 圓管과 外力이 對稱이고 橫軸에 對해서는 外力이 非對稱이므로 그림(b)와 같이 縱軸에 對하여 卽 半圓에 對한 自由體線圖를 생각할 수 있다.

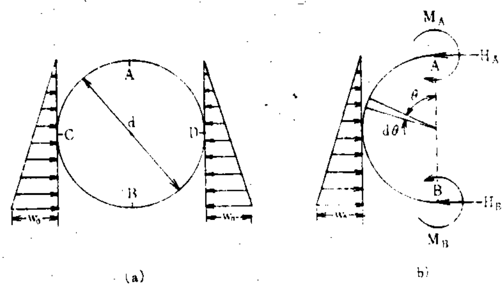

그림 (f)

그림(b)에서 $\sum M=0$;

$$N_A 2r-M_A-w_0 r(2r/3)+M_B=0$$

$$\therefore \quad M_A=2N_A r-\frac{2}{3}w_0 r^2+M_B\cdots\cdots(1)$$

任意의 斷面의 휨모멘트 M와 M_A 및 N_A에 관한 偏導函數는

$$M=N_A r(1-\cos\theta)-M_A$$

$$-\frac{w_0 r}{4}(1-\cos\theta)^2\cdot\frac{r}{3}(1-\cos\theta)$$

$$\therefore \quad M=N_A r(1-\cos\theta)-M_A-\frac{w_0 r^2}{12}(1-\cos\theta)^3$$

$$\frac{\partial M}{\partial M_A}=-1, \qquad \frac{\partial M}{\partial M_A}=r(1-\cos\theta)$$

$$\int_0^\pi M\frac{\partial M}{\partial M_A}rd\theta=\int_0^\pi\Big\{N_Ar(1-\cos\theta)-M_A$$
$$-\frac{w_0r^2}{12}(1-\cos\theta)^3\Big\}(-1)rd\theta$$
$$=\Big[-N_Ar^2\theta+N_Ar^2\sin\theta+M_ar\theta$$
$$+\frac{w_0r^3}{12}\Big\{\theta-3\sin\theta+3\Big(\frac{\theta}{2}+\frac{1}{4}\sin 2\theta\Big)$$
$$-\frac{1}{3}\sin\theta(\cos^2\theta+2)\Big\}\Big]_0^\pi$$
$$=-N_Ar^2\pi+M_Ar\pi+\frac{w_0r^3}{12}\Big(\pi+\frac{3}{2}\pi\Big)=0$$
$$\therefore\quad M_AN_Ar-\frac{5}{24}w_0r^2\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$
$$\int_0^\pi M\frac{\partial M}{\partial N_A}rd\theta=\int_0^\pi N_Ar(1-\cos\theta)-M_A$$
$$-\frac{w_0r^2}{12}(1-\cos\theta)^3\cdot r(1-\cos\theta)rd\theta$$
$$=\int_0^\pi\Big\{N_Ar^3(1-\cos)^2-M_Ar^2(1-\cos\theta)$$
$$-\frac{w_0r^4}{12}(1-\cos\theta)^4\Big\}d\theta$$
$$=\Big[\{N_Ar^3\Big(\theta-2\sin\theta+\frac{\theta}{2}+\frac{1}{4}\sin2\theta\Big)$$
$$-M_Ar^2(\theta-\sin\theta)-\frac{w_0r^4}{12}\Big\{(\theta-4\sin\theta)$$
$$+6\Big(\frac{\theta}{2}+\frac{1}{4}\sin\theta\Big)+4\times\frac{1}{3}\sin\theta(\cos^2\theta+2)$$
$$+\frac{1}{4}\cos^3\theta\sin\theta+\frac{3}{4}\Big(\frac{\theta}{2}+\frac{1}{4}\sin2\theta\Big)\Big\}\Big]_0^\pi$$
$$=N_Ar^3\Big(\pi+\frac{\pi}{2}\Big)-M_Ar^2\pi-\frac{w_0r^4}{12}\Big\{(\pi+\frac{6\pi}{2}$$
$$+\frac{3}{4}\cdot\frac{\pi}{2})\Big\}$$
$$=\frac{3}{2}N_A\pi r^3-M_A\pi r^2-\frac{1}{12}\times\frac{35}{8}\pi wr^4=0$$
$$\therefore\quad M_A=\frac{3}{2}N_Ar-\frac{35}{96}w_0r^2\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

(2)式과 (3)式에 의하여 M_A 및 N_A를 구하면

$$M_A=N_Ar-\frac{5}{24}w_0r^2=\frac{3}{2}N_Ar-\frac{35}{96}w_0r^2$$
$$\therefore\quad N_A=\frac{5}{16}w_0r^2$$

N_A를 (2)式 또는 (3)式에 의하여 구할수 있다.

$$M_A=\frac{5}{16}w_0r^2-\frac{5}{24}w_0r^2=\frac{5}{48}w_0r^2$$

(1)式에 의하여 M_B를 구하면

$$M_B=M_A-N_A2r+\frac{2}{3}w_0r^2=\frac{5}{48}w_0r^2-\frac{5}{16}w_0r_02r$$
$$+\frac{2}{3}w_0r^2$$
$$\therefore\quad M_B=\frac{7}{48}w_0r^2$$

M_C의 값은 任意의 點의 휨모우멘트式에 代入하고 이式에서 $\theta=\frac{\pi}{2}$로 놓는다.

$$M_{\theta=\frac{\pi}{2}}=N_Ar\Big(1-\cos\frac{\pi}{2}\Big)-M_A-\frac{w_0r^3}{12}\Big(1-\cos\frac{\pi}{2}\Big)^3$$
$$\therefore\quad M_C=\frac{5}{16}w_0r^2-\frac{5}{48}w_0r^2-\frac{w_0r^2}{12}=\frac{w_0r^3}{8}$$

M_D의 값은 對稱에 의하여 M_C와 같다.

N_A의 값은 그림(b)에서 $\sum H=0$에 의하여 구하면

$$N_B=w_02r\cdot\frac{1}{2}-N_A=w_0r-\frac{5}{16}w_0r=\frac{11}{16}w_0r$$
$$\therefore\quad N_B=\frac{11}{16}w_0r$$

剪斷力과 軸力은 그림(c), (d)에 의하여 구하면

$$S_A=S_B=0,\qquad S_C=S_D=0$$
$$N_A=\frac{5}{16}w_0r\qquad N_B=\frac{11}{16}w_0r$$
$$N_C=N_D=0$$

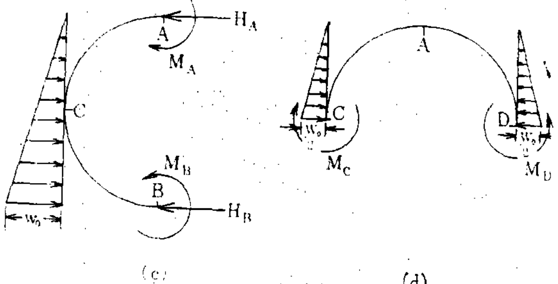

그림 (g)

(e) 水平梯形等變荷重이 作用할 경우

梯形等荷重이 作用할 경우는 중첩법에 의하여 荷重을 水平等分布荷重 w와 水平等變荷重 w_0가 중첩하여 作用한 것으로 그림에서와 같이 생각할 수 있다. 따라서 이 경우에는 應力解析을 되풀이하지 않

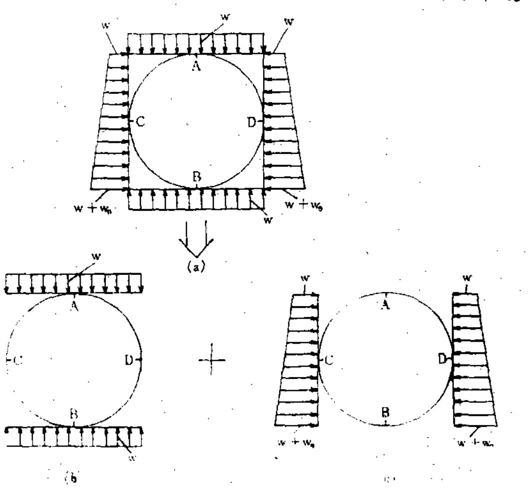

그림 (h)

고 (c)경우와 (d)경우의 結果를 引用하면 된다. 그 結果를 要約하면 다음과 같다.

$$M_A=-\frac{wr^2}{4}-\frac{5}{48}w^0r^2 \qquad M_C=\frac{wr^2}{4}+\frac{w_0r^2}{8}$$

$$M_B=-\frac{wr^2}{4}-\frac{7}{48}w_0r^2 \qquad M_D=\frac{xr^2}{4}+\frac{w_0r^2}{8}$$

剪斷力과 軸力에 對해서도 휨모우멘트와 같이 중첩법을 適用 (b)경우와 (d)경우의 結果를 引用한다. 卽

$$S_A=S_B=0, \qquad S_C=S_D=0$$

$$N_A=wr+\frac{5}{16}w_0r \qquad N_B=wr+\frac{11}{16}w_0r$$

$$N_C=N_D=0$$

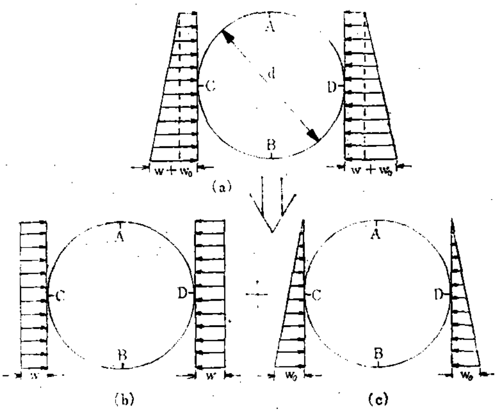

그림 (i)

(f) 鉛直等分布荷重과 水平梯形等變荷重이 作用한 경우

이 荷重狀態는 實際로 管渠에 作用할 수 있는 모든 荷重의 경우이다. 이 경우에도 그림과 같이 중첩법을 적용하며 各 斷面의 斷面力을 算出할 수 있으며 (b)경우와 (e)경우의 結果를 引用하면 된다. 卽

$$M_A=\frac{wr^2}{4}-\frac{xr^2}{4}-\frac{5}{48}w_0r^2=-\frac{5}{48}w_0r^2$$

$$M_B=\frac{wr^2}{4}-\frac{wr^2}{4}-\frac{7}{48}w_0r^2=-\frac{7}{48}w_0r^2$$

$$M_C=-\frac{wr^2}{4}+\frac{wr^2}{4}+\frac{w_0r^2}{8}=\frac{w_0r^2}{8}$$

$$M_D=-\frac{wr^2}{4}+\frac{wr^2}{4}+\frac{w_0r^2}{8}=\frac{w_0r}{8}$$

$$S_A=S_B=S_C=S_D=0$$

$$N_A=0+wr+\frac{5}{16}w_0r=wr+\frac{5}{16}w_0r$$

$$N_B=0+wr+\frac{11}{16}w_0r=wr+\frac{11}{16}w_0r$$

$$N_C=N_D=wr+0=wr$$

이 경우에 휨모우멘트의 값은 鉛直等分布荷重만이 作用할 때나 또는 水平梯形等變荷重만이 作用할 때보다 적은 應力이 생기는 것을 알 수 있다. 이것은 各荷重에 의하여 應力이 相殺되기 때문이며 따라서 鉛直荷重과 水平荷重중에서 큰 荷重을 擇하여 (b)경우나 (d)경우의 應力解析結果를 設計에 反映한다면 安全하게 되므로 一般設計에서는 이 方法이 採擇되고 있다. 그러나 더욱 경제적인 設計를 企圖한다면 (f)의 경우를 適用할 수 있다.