背骨型斷面 柱狀體의 橫動搖에 있어서의 附加慣性모우먼트와 減衰모우먼트에 관하여

黃 宗 屹* · 李 起 杓**

Hydrodynamic Moments produced by Rolling Oscillation of Cylinders with Chine Sections

by

J. H. Hwang,* Key P. Rhee**

Abstract

Hydrodynamic moments produced by the rolling oscillation on the free surface and the associated swaying force were exactly calculated by Ursell-Tasai method for the cylinders with Kim's chine form sections (a_1, a_7).

The coefficient of the added moment of inertia $K_{\varphi r}$, the progressive wave height ratio $\overline{A}$, the coefficient of swaying forces K_{RS}, α_{RS} of rolling oscillations are shown in the several fiqures.

The results of the computation were compared with those of Lewis form sections.

It is concluded that the effect of the section form on the added moment of inertia is significant for the cylinder with the section of same beam-draft ratio and sectional area coefficient, on the other hand, a little effect appears on the wave damping.

1. 緖 言

水面에 떠 있는 柱狀體가 그 斷面의 中心을 지나는 軸을 回轉軸으로 하여 橫動搖할 때에 流體로부터 附加慣性모우먼트, 減衰모우먼트 및 水平力 등의 流體力學的인 힘과 모우먼트를 받는다.

Lewis 斷面에 對한 위와 같은 힘과 모우먼트 等은 1961年에 F. Tasai [1]에 依해서 計算되었다. 本 論文에서는 Bieberbach의 變換式에 依한 2 parameter family로 表示 可能한 斷面中 金[2]의 單一背骨型 斷面을 가지는 2次元 柱狀體가 靜水面에서 그 斷面의 中心을 回轉軸으로 橫動搖할 때의 附加慣性모우먼트와 減衰모우먼트 및 水平力을 Ursell-Tasai [1, 3] 方法에 依해서 計算하고 그 結果를 Lewis 斷面에 對한 Tasai의 結果와 比較하여 斷面의 變化에 對한 影響을 考察하였다.

2. 基礎方程式 및 境界條件

斷面은 金의 單一背骨型斷面(a_1, a_7) [2]을 取하고 座標系는 Fig. 1과 같이 取한다.

流體는 非粘性, 非壓縮性이며, 表面張力은 無視하고

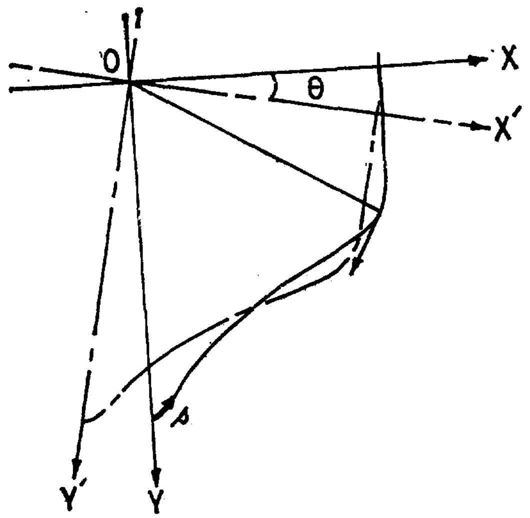

Fig. 1 Coordinate system.

接受日字 1974年 10月 16日

* 正會員 서울大學校 工科大學
** 正會員 서울大學校 大學院

船體의 運動은 微小하며 流體의 運動이 正常狀態에서 始作하였다고 假定하자.

위의 假定과 Thomson의 定理로 부터 流體는 非回轉運動을 함을 알수 있으므로 速度포텐샬 ϕ를 導入하면

連續方程式은

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}=0 \quad (y>0), \tag{2-1}$$

運動方程式은

$$\frac{\partial\phi}{\partial t}+gy+\frac{p}{\rho}=0 \quad (y>0), \tag{2-2}$$

但, g는 重力加速度, ρ는 流體의 密度

自由表面에서의 境界條件은

$$K\phi+\frac{\partial\phi}{\partial y}=0 \quad (y=0), \tag{2-3}$$

但, $K=\dfrac{\omega^2}{g}$

水底條件은

$$\frac{\partial\phi}{\partial y}\to 0 \quad (y\to\infty), \tag{2-4}$$

放射條件은

$$\phi\to iH^{\pm}(K)e^{-Ky\pm iKx} \quad (x\to\pm\infty) \tag{2-5}$$

但, $H^{\pm}(K)$는 振幅函數다.

船體表面에서의 境界條件은 2次元 柱狀體가 自由表面에 떠 있으며 微小角變位

$$\theta=\theta_0\cos(\omega t+\gamma) \tag{2-6}$$

로 橫動搖할 때

$$\left(\frac{\partial\phi}{\partial n}\right)_{\alpha=0}=r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)\frac{dr}{ds}$$

따라서

$$-\left(\frac{\partial\Psi}{\partial s}\right)_{\alpha=0}=\left(\frac{d\theta}{dt}\right)\frac{\partial}{\partial s}\left\{\frac{1}{2}(x_0^2+y_0^2)\right\}$$

그러므로

$$\Psi=-\frac{1}{2}\left(\frac{d\theta}{dt}\right)(x_0^2+y_0^2)+c(t) \tag{2-7}$$

로 表示되며, $c(t)$는 時間만의 函數이다.

3. 計算結果 및 考察

附加慣性모우먼트, 減衰모우먼트 및 聯成水平力等에 관한 解析은 Tasai [1]의 Lewis 斷面에 對한 것을 金의 背骨型斷面을 包含하는 2徑數群斷面에 對한 것으로 擴張하였으며, 附錄에 收錄하였다. 本報文에서는 Fig. 2, Fig. 3에 表示된 金의 單一背骨型 斷面에 對해서 計算을 遂行하였다.

Ursell이나 Tasai에 따라서 聯立方程式(A-14), (A-15)에서 p_{2l}, q_{2l}을 最小自乘法에 依해서 計算하였으며, 境界條件을 滿足시키는 斷面上의 點은 $\frac{1}{2}$ 斷面에서 等間隔으로 20等分하여서 取하였다. 最小自乘法에 依해서 上記 聯立方程式을 푸는데 있어서 適當한 項數를 求하기 위해서 먼저 項數에 따른 誤差를 調査하였다. 그 結果가 表 1.에 있으며 이 結果에서 볼때 10項 以上의 境遇에 값의 變動이 거의 없으므로, 以後의 全計算은

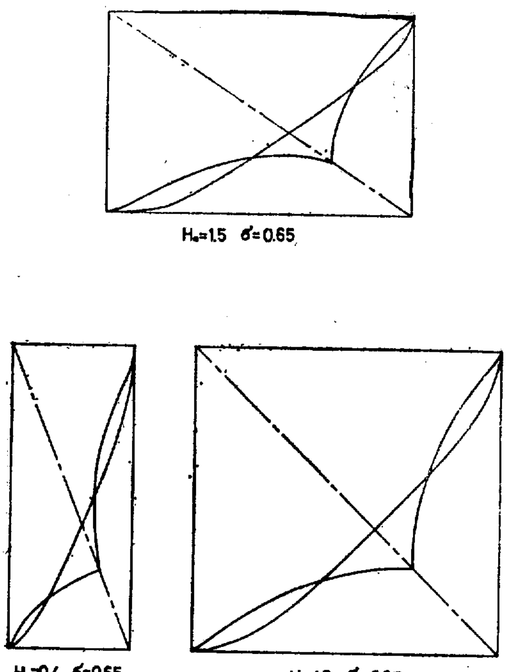

Fig. 2

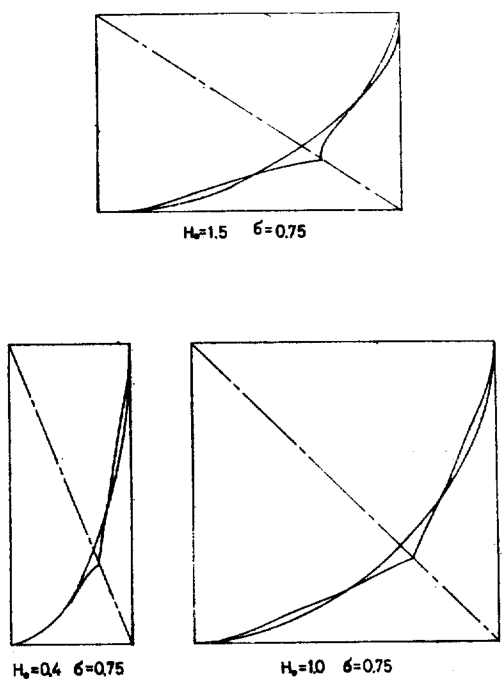

Fig. 3

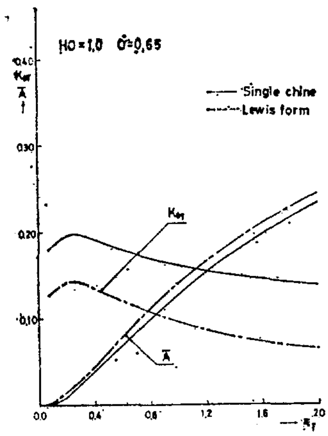

Fig 4.

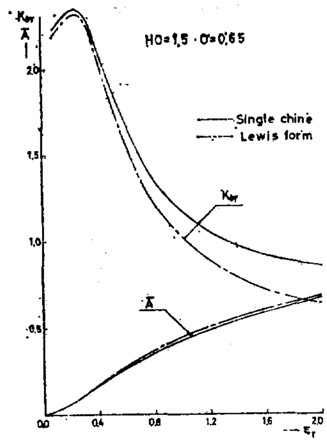

Fig 5.

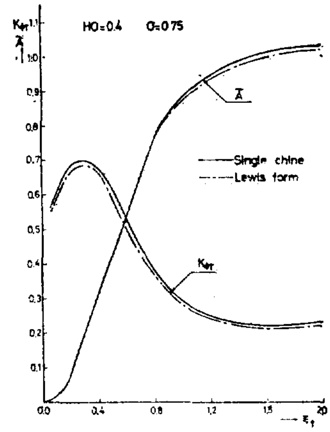

Fig 6.

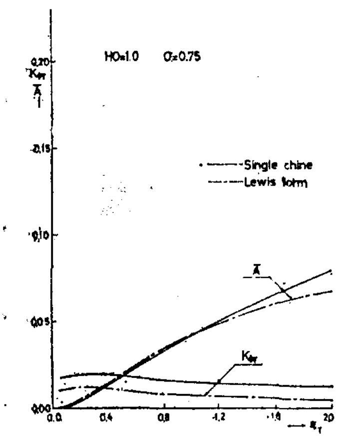

Fig 7.

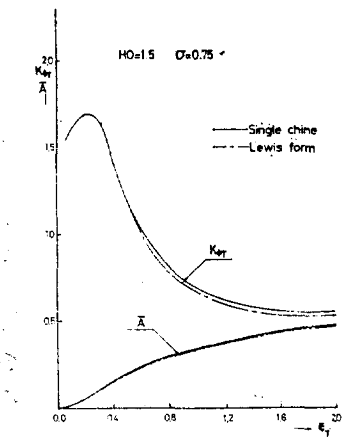

Fig 8.

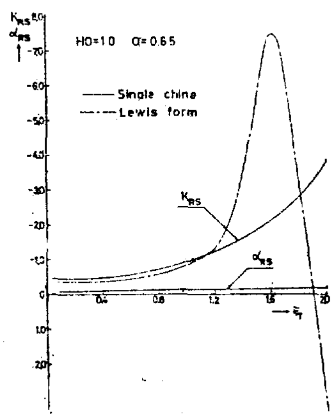

Fig 9.

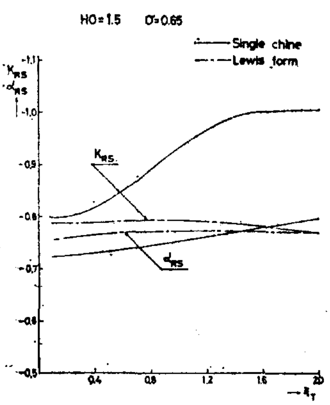

Fig 10.

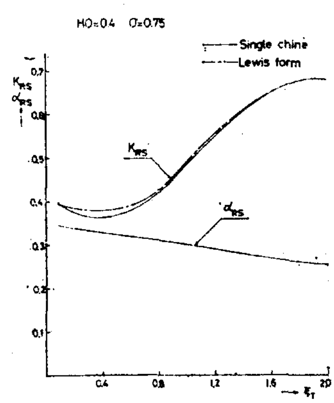

Fig 11.

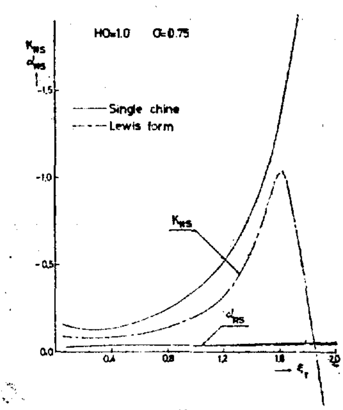

Fig 12.

10項을 取하여 遂行하였다.

表 1. 項數에 따른 數值計算의 精度

(a_1, a_7) 斷面 $H_0=1.0$, $\sigma=0.75$, $\xi_T=0.8$

項 數	6	8	10	12	20
$\overline{A}$	0.0336229	0.0333933	0.0333245	0.0333118	0.0333140
$K_{\phi T}$	0.0170345	0.0171020	0.0171152	0.0171161	0.0171142
誤 差	−0.0097664	−0.00217574	0.00020829	0.00066443	0.00060957

表 1.에서의 誤差는 (A-33)에서

$$(\text{誤差})=(P_0 Y_R-Q_0 X_R)-\frac{\pi^2}{8}$$

을 利用하여 計算하였다. 金의 背骨型斷面에 對해서는 左右動搖[6], 上下動搖[4], 橫動搖의 順으로 上記誤差가 커진다.

Lewis 斷面(a_1, a_3)과 金의 斷面(a_1, a_7)에 對해서 半幅과 吃水와의 比(H_0)가 0.4, 1.0, 1.5 일때의 各各의 境遇에 對한 斷面積係數 (σ)를 0.65, 0.75로 變化시키면서 計算한 結果를 Fig. 4~Fig. 13에 吃水로 無次元化한 wave number를 橫軸으로, $K_{\phi T}, \overline{A}, \alpha_{RS}, K_{RS}$ 等을 縱軸으로 하여 圖示하였다.

이로부터 本 計算의 範圍에서는 橫動搖에 依한

(1) 附加慣性 모우먼트係數 $(K_{\phi T})$는

同一한 σ에 對해서는 H_0가 1.0일때 가장 작은 값을 가지며, 同一한 H_0에 對해서는 肥大斷面 일수록 작은 값을 가진다.

Wave number가 커지면 $K_{\phi T}$의 값은 減小하여, wave

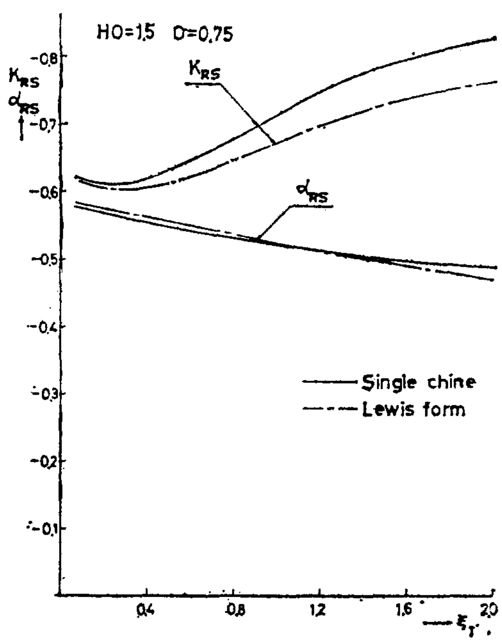

Fig 13.

number 0.3 近方에서 最大值를 가진다.

斷面의 變化에 依한 즉 Lewis 斷面과 Kim의 斷面에 對한 $K_{\phi T}$의 差는 wave number가 커짐에 따라 커지며, 그 정도는 肥大斷面이 細形斷面보다 작으며, 同一한 σ에 對해서는 H_0가 커짐에 따라 커진다. 전체적으로 Lewis 斷面이 金의 斷面보다 작은 값을 가진다.

(2) 波浪의 振幅과 强制振動에 依한 振幅과의 比$(\overline{A})$는 同一한 σ에 對해서는 H_0가 1.0일때 가장 작은 값을 가지며, 同一한 H_0에 對해서는 肥大斷面 일수록 작은 값을 가진다.

Wave number가 커지면 $\overline{A}$도 커지며, 그 정도는 肥大斷面이 細形斷面보다 작으며, 細形斷面에 對해서는 金의 斷面이, 肥大斷面에 對해서는 Lewis 斷面이 작은 $\overline{A}$의 값을 가진다.

한편 橫動搖에 依한 聯成水平力에서

(3) 減衰係數(α_{RS})는

Wave number가 커짐에 따라서는 肥大斷面에 對해서는 減小하며, 細形斷面에 對해서는 增加하나 全體的인 變化量은 거의 없으며, 斷面의 變化에 依한 影響도 거의 없다.

(4) 附加質量係數(K_{RS})는

Wave number가 커짐에 따라서는 肥大斷面에 對해서는 增加하나 wave number 0.4 近方에서 最小值를 가지며 H_0가 1.5인 Lewis斷面에서만 減小한다. 이와 같이 K_{RS}는 wave number의 變化에 依한 影響도 크고, 斷面의 變化에 의한 影響도 크다.

4. 結 論

靜水中에서 2次元柱狀體가 微小橫動搖를 할때 粘性影響을 完全히 無視하고 造波現象만을 고려하는 境遇에 附加慣性모우먼트, 減衰모우먼트 및 橫動搖에 依한 聯成水平力 等에 對하여 다음과 같은 結論을 얻는다.

(1) 斷面의 變化에 依한 影響은 wave number가 커짐에 따라 커진다.

(2) 斷面의 變化가 生成波의 振幅과 强制振動에 依한 振幅과의比 및 橫動搖에 依한 聯成水平力에서의 減衰係數에 미치는 影響은 대단히 작다.

(3) 반면에, 斷面의 變化가 附加慣性모우먼트 및 橫

動搖에 依한 聯成水平力에서의 附加質量係數에 커다란 影響을 준다.

(4) 圓斷面에 가까울수록 附加慣性모우먼트, 波浪의 振幅과 强制振動에 依한 振幅과의 比 및 橫動搖에 依한 聯成水平力에서의 附加質量係數와 減衰係數는 작아지는것 같다.

(5) 끝으로, 附加慣性모우먼트에 對해서는 Lewis 斷面이 金의 斷面보다 대체적으로 작은 값을 가지며, 生成波의 振幅과 强制振動에 依한 振幅과의 比에 對해서는 Lewis 斷面과 金의 斷面과의 값의 差가 매우 작다. 이는 粘性을 무시하고 wave damping 만을 생각하였기 때문이다.

參 考 文 獻

〔1〕 F. Tasai : "Hydrodynamic Force and Moment produced by Swaying and Rolling Oscillation of Cylinders on the Free Surface", Reports of Research Institute for Applied Mechanics, Kyushu Univ., Vol. Ⅸ, No. 35, 1961.

〔2〕 K.C. Kim : "Added Mass for both Vertical and Horizontal Vibration of Two-Dimensional Cylinders of Curvilinear-Element Sections with Chines in a Free Surface", J. of the Society of Naval Archit. of Korea, Vol. 6, No. 1, 1969.

〔3〕 F. Ursell : "On the Rolling Motion of Cylinders in the Surface of a Fluid", Q.J.M.A.M., Vol. Ⅱ, Part 3, 1949.

〔4〕 黃宗屹 · 金潤鎬 : "背骨型斷面柱狀體의 上下動搖에 있어서의 附加質量과 減衰에 關하여", 大韓造船學會誌, 第10卷, 第 1 號, 1973.

〔5〕 T. Kumai : "Added Mass Moment of Inertia Induced by Torsional Vibration of Ship", Report of Research Institute for Applied Mechancis, Kyushu Univ., Vol. Ⅶ, No. 28, 1959.

〔6〕 黃宗屹 · 梁永淳 : "背骨型 斷面 柱狀體의 左右搖動에 있어서의 動流體力學的 힘에 關하여", 大韓造船學會誌, 第11卷, 第 1 號, 1974.

〔7〕 李起杓 · 梁永淳 : "背骨型 斷面 柱狀體의 自由水面에서의 비틂振動에 對한 二次元的 附加慣性모우먼트의 計算"(未發表).

〔8〕 H. Maeda : "Wave Excitation Forces on Two Dimensional Ship of Arbitrary Sections", Selected Papers from J. of S.N.A.J., Vol. 7, 1971.

附　　錄

I. 速度포텐샬과 進行波의 波高

半幅과 吃水로 無次元化한 wave number를 各各 ξ_B, ξ_T라고 하면

$$\xi_B=\frac{\omega^2}{g}\cdot\frac{B}{2},$$

$$\xi_T=\frac{\omega^2}{g}\cdot T \tag{A-1}$$

로 表示되며, (A-1)을 利用하여 自由表面의 境界條件 (2-3)을 極座標로 表示하면 〔4〕

$$\xi_B\phi\left[\frac{e^{\alpha}+(-1)^{2m-1}(2m-1)a_{2m-1}e^{-(2m-1)\alpha}+(-1)^{2n-1}}{1+a_{2m-1}}\right.$$
$$\left.\frac{(2n-1)a_{2n-1}e^{-(2n-1)\alpha}}{+a_{2n-1}}\right]-\frac{\partial\phi}{\partial\theta}=0$$
$$\left(\theta=\pm\frac{\pi}{2}\right) \tag{A-2}$$

連續方程式(2-1)은

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial\gamma^2}+\frac{1}{\gamma}\frac{\partial\phi}{\partial\gamma}+\frac{1}{\gamma^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial\theta^2}=0, \tag{A-3}$$

으로 變形되며, (A-3)의 解中 水底條件(2-4)와 橫動搖의 特性 即,

$$\phi(\alpha,\theta)=-\phi(\alpha,-\theta)$$

를 滿足하는 解는

$$\phi=\sum_{l=1}^{\infty}\{A_{2l}e^{-2l\alpha}\sin 2l\theta+A_{2l+2m}e^{-(2l+2m)\alpha}\sin(2l$$
$$+2m)\theta+A_{2l+2n}e^{-(2l+2n)\alpha}\sin(2l+2n)\theta$$
$$+A_{2l+1}e^{-(2l+1)\alpha}\sin(2l+1)\theta\} \tag{A-4}$$

와 같이 假定할 수 있다. 또한 ϕ는 自由表面에서의 境界條件 (A-2)을 滿足하여야 하므로, (A-2)와 (A-4)로 부터

$$\phi_{2l}=A_{2l+1}\left[e^{-(2l+1)\alpha}\sin(2l+1)\theta+\frac{\xi_B}{1+a_{2m-1}+a_{2n-1}}\right.$$
$$\left\{\frac{e^{-2l\alpha}}{2l}\sin 2l\theta+\frac{(-1)^{m-1}(2m-1)a_{2m-1}}{2l+2m}\right.$$
$$e^{-(2l+2m)\alpha}\sin(2l+2m)\theta-\frac{(-1)^{n-1}(2n-1)a_{2n-1}}{2l+2n}$$
$$\left.\left.e^{-(2l+2n)\alpha}\sin(2l+2n)\theta\right\}\right]\begin{matrix}\cos\omega t\\ \sin\omega t\end{matrix} \tag{A-5}$$

但, $l=1,2,3,\cdots\cdots$

따라서 (A-5)의 共軛 流量函數는

$$\Psi_{2l}=B_{2l+1}\left[-e^{-(2l+1)\alpha}\cos(2l+1)\theta-\frac{\xi_B}{1+a_{2m-1}+a_{2n-1}}\right.$$
$$\left\{\frac{e^{-2l\alpha}}{2l}\cos 2l\theta+\frac{(-1)^{m-1}(2m-1)a_{2m-1}}{2l+2n}e^{-(2l+2m)\alpha}\right.$$
$$\cos(2l+2m)\theta-\frac{(-1)^{n-1}(2n-1)a_{2n-1}}{2l+2n}e^{-(2l+2n)\alpha}$$
$$\left.\left.\cos(2l+2n)\theta\right\}\right]\begin{matrix}\cos\omega t\\ \sin\omega t\end{matrix} \tag{A-6}$$

但, $l=1,2,3,\cdots\cdots$

(A-5), (A-6)는 無限遠點에서 $\phi_{2l}\to 0$, $\Psi_{2l}\to 0$ 이므로 無限遠點에서 發散波를 나타내는 補正項으로 2次元의 水平 doublet을 導入하였으며, 이것의 流量函數는 아래와 같다. 〔1〕

$$\Psi=\frac{g\eta}{\pi}\{\Psi_c(K,x,y)\cos\omega t+\Psi_s(K,x,y)\sin\omega t\} \tag{A-7}$$

但, $\Psi_c=\pi e^{-Ky}\cos Kx$,

$$\Psi_s=\pm\pi e^{-Ky}\sin Kx-\int_0^\infty\frac{k\cos ky-K\sin ky}{K^2+k^2}e^{\mp kx}dk-\frac{y}{K(x^2+y^2)},$$

η는 無限遠點에서의 波浪의 振幅이며 符號는 上과 下가 各各 $x\geq0$, $x<0$인 境遇를 意味한다.

따라서 (2-3), (2-4), (2-5)의 境界條件을 滿足하는 (A-3)의 解의 共軛流量 函數는

$$\begin{aligned}\left(\frac{\omega\pi}{g\eta}\right)\Psi&=\{\Psi_c(\xi_B,\alpha,\theta)\cos\omega t+\Psi_s(\xi_B,\alpha,\theta)\sin\omega t\}\\&+\cos\omega t\sum_{l=1}^{\infty}P_{2l}\Big[-e^{-(2l+1)\alpha}\cos(2l+1)\theta\\&+\frac{\xi_B}{1+a_{2m-1}+a_{2n-1}}\cdot\Big\{\frac{e^{-2l\alpha}}{2l}\cos2l\theta\\&+\frac{(-1)^{m-1}(2m-1)a_{2m-1}}{2l+2m}e^{-(2l+2m)\alpha}\cos(2l+2m)\theta\\&-\frac{(-1)^{n-1}(2n-1)a_{2n-1}}{2l+2n}e^{-(2l+2n)\alpha}\cos(2l+2n)\theta\Big\}\Big]\\&+\sin\omega t\sum_{l=1}^{\infty}Q_{2l}\Big[-e^{-(2l+1)\alpha}\cos(2l+1)\theta\\&+\frac{\xi_B}{1+a_{2m-1}+a_{2n-1}}\cdot\Big\{\frac{e^{-2l\alpha}}{2l}\cos2l\theta\\&+\frac{(-1)^{m-1}(2m-1)a_{2m-1}}{2l+2m}e^{-(2l+2m)\alpha}\cos(2l+2m)\theta\\&-\frac{(-1)^{n-1}(2n-1)a_{2n-1}}{2l+2n}e^{-(2l+2n)\alpha}\cos(2l+2n)\theta\Big\}\Big]\end{aligned} \tag{A-8}$$

로 表示된다.

(A-8)에 $\alpha=0$을 代入한 후, 船體表面에서의 境界條件(2-7)과 結合하면

$$\left(\frac{\omega\pi}{g\eta}\right)\Psi(\theta)\Big|_{\alpha=0}=\frac{\pi\xi_Bh_r}{2\eta}\mu(\theta)\sin(\omega t+\gamma)+c(t) \tag{A-9}$$

但, $h_r=\frac{B\theta_0}{2}$,

$$\begin{aligned}\mu(\theta)&=\frac{1}{(1+a_{2m-1}+a_{2n-1})^2}\{1+a^2_{2m-1}+a^2_{2n-1}\\&-2a_{2m-1}\cos2m\theta-2a_{2m-1}a_{2n-1}\cos(2m-2n)\theta\\&+2a_{2n-1}\cos2n\theta\}.\end{aligned}$$

(A-9)에 $\theta=\frac{\pi}{2}$를 代入하여 $c(t)$를 決定한 다음 原式에 代入하여 整理하면

$$\begin{aligned}&\Big[\Big\{\Psi_c(\xi_B,0,\theta)-\Psi_c\Big(\xi_B,0,\frac{\pi}{2}\Big)\Big\}+\sum_{l=1}^{\infty}P_{2l}(\xi_B)\\&\Big\{-\cos(2l+1)\theta-\frac{\xi_B}{1+a_{2m-1}+a_{2n-1}}\cdot\Big(\frac{1}{2l}\cos2l\theta\\&+\frac{(-1)^{m-1}(2m-1)a_{2m-1}}{2l+2m}\cos(2l+2m)\theta\\&+\frac{(-1)^{n-1}(2n-1)a_{2n-1}}{2l+2n}\cos(2l+2n)\theta\Big)\\&-\frac{(-1)^l\xi_B}{1+a_{2m-1}+a_{2n-1}}\Big(\frac{1}{2l}+\frac{(-1)^{m-1}(2m-1)a_{2m-1}}{2l+2m}\\&+\frac{(-1)^{n-1}(2n-1)a_{2n-1}}{2l+2n}\Big)\Big\}\Big]\cos\omega t\\&+\Big[\Big\{\Psi_s(\xi_B,0,\theta)-\Psi_s\Big(\xi_B,0,\frac{\pi}{2}\Big)\Big\}+\sum_{l=1}^{\infty}Q_{2l}(\xi_B)\\&\Big\{-\cos(2l+1)\theta-\frac{\xi_B}{1+a_{2m-1}+a_{2n-1}}\cdot\Big(\frac{1}{2l}\cos2l\theta\\&+\frac{(-1)^{m-1}(2m-1)a_{2m-1}}{2l+2m}\cos(2l+2m)\theta\\&+\frac{(-1)^{n-1}(2n-1)a_{2n-1}}{2l+2n}\cos(2l+2n)\theta\Big)\\&-\frac{(-1)^l\xi_B}{1+a_{2m-1}+a_{2n-1}}\Big(\frac{1}{2l}+\frac{(-1)^{m-1}(2m-1)a_{2m-1}}{2l+2m}\\&+\frac{(-1)^{n-1}(2n-1)a_{2n-1}}{2l+2n}\Big)\Big\}\Big]\sin\omega t\\&=\frac{\pi\xi_B}{2\eta}h_r\{\mu(\theta)-1\}\ \sin(\omega t+\gamma)\end{aligned} \tag{A-10}$$

(A-10)는 右邊에서

$g(\theta)=\mu(\theta)-1$

로 놓으면

$$\begin{aligned}&\frac{\pi\xi_B}{2\eta}h_r\{\mu(\theta)-1\}\sin(\omega t+\gamma)\\&=g(\theta)\{P_0\cos\omega t+Q_0\sin\omega t\}\end{aligned} \tag{A-11}$$

$$但,\ P_0=\frac{\pi\xi_B}{2\eta}h_r\sin\gamma,\quad Q_0=\frac{\pi\xi_B}{2\eta}h_r\cos\gamma \tag{A-12}$$

와 같이 表示된다. 따라서 (A-10)은

$f_0=g(\theta)$

$$\begin{aligned}f_{2l}{}_{l\neq0}&=\cos(2l+1)\theta+\frac{\xi_B}{1+a_{2m-1}+a_{2n-1}}\Big\{\frac{1}{2l}\cos2l\theta\\&+\frac{(-1)^{m-1}(2m-1)a_{2m-1}}{2l+2m}\cdot\cos(2l+2m)\theta\\&+\frac{(-1)^{n-1}(2n-1)a_{2n-1}}{2l+2n}\cos(2l+2n)\theta\Big\}\\&+\frac{(-1)^l\xi_B}{1+a_{2m-1}+a_{2n-1}}\Big\{\frac{1}{2l}+\frac{(-1)^{m-1}(2m-1)a_{2m-1}}{2l+2m}\\&+\frac{(-1)^n(2n-1)a_{2n-1}}{2l+2n}\Big\}\end{aligned} \tag{A-13}$$

로 놓으면 아래와 같이 簡單한 形態로 表示할 수 있다.

$$\Psi_c(\xi_B,0,\theta)-\Psi_c\Big(\xi_B,0,\frac{\pi}{2}\Big)=\sum_{l=0}^{\infty}P_{2l}\cdot f_{2l} \tag{A-14}$$

$$\Psi_s(\xi_B,0,\theta)-\Psi_s\Big(\xi_B,0,\frac{\pi}{2}\Big)=\sum_{l=0}^{\infty}Q_{2l}\cdot f_{2l} \tag{A-15}$$

(A-12)에서

$$\sqrt{P_0^2+Q_0^2}=\frac{\pi\xi_B}{2\eta}h_r$$

이므로, 波浪의 振幅과 强制振動에 依한 振幅과의 比 $\overline{A}$는

$$\overline{A}=\frac{\eta}{h_r}=\frac{\pi\xi_B}{2\sqrt{P_0^2+Q_0^2}} \tag{A-16}$$

로 表示되며, 聯立方程式 (A-14), (A-15)에서의 P_{2l},

Q_{2l}은 最小自乘法에 依해서 求하였다. [3]

Ⅱ. 附加慣性 모우먼트

船體表面에서의 流體動力學的 壓力은 運動方程式(2-2)에서 靜水壓에 依한 項을 除外하여

$$p=-\rho\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)_{\alpha=0}=\frac{\rho g\eta}{\pi}\Bigg[\Bigg\{\phi_c(\xi_B,0,\theta)+\sum_{l=1}^{\infty}P_{2l}\Bigg\{\sin(2l+1)\theta+\frac{\xi_B}{1+a_{2m-1}+a_{2n-1}}\Bigg(\frac{\sin 2l\theta}{2l}+\frac{(-1)^{m-1}(2m-1)a_{2m-1}}{2l+2m}\sin(2l+2m)\theta-\frac{(-1)^{n-1}(2n-1)a_{2n-1}}{2l+2n}\sin(2l+2n)\theta\Bigg)\Bigg\}\Bigg\}\sin\omega t-\Bigg\{\phi_s(\xi_B,0,\theta)+\sum_{l=1}^{\infty}Q_{2l}\Bigg\{\sin(2l+1)\theta+\frac{\xi_B}{1+a_{2m-1}+a_{2n-1}}\Bigg(\frac{\sin 2l\theta}{2l}+\frac{(-1)^{m-1}(2m-1)a_{2m-1}}{2l+2m}\sin(2l+2m)\theta-\frac{(-1)^{n-1}(2n-1)a_{2n-1}}{2l+2n}\sin(2l+2n)\theta\Bigg)\Bigg\}\Bigg\}\cos\omega t\Bigg] \tag{A-17}$$

時計方向을 陽의 方向으로 생각하면, 流體動力學的 모우먼트 M_ϕ는

$$M_\phi=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}p\left(x_0\frac{dx_0}{d\theta}+y_0\frac{dy_0}{d\theta}\right)d\theta \tag{A-18}$$

로 表示되며, (A-17)을 (A-18)에 代入하면

$$M_\phi=\frac{\rho gB^2\eta}{\pi}[X_R\sin\omega t-Y_R\cos\omega t] \tag{A-19}$$

여기서 X_R, Y_R은 左右動搖의 境遇 [6]에서 얻은 값과 같은 것이다.

한편, 流體動力學的 모우먼트 M_ϕ를 $\ddot\theta$와 $\dot\theta$의 項으로 分離하여, I_R을 附加慣性 모우먼트係數, N_R을 減衰모우먼트 係數라고 하면

$$M_\phi=I_R\ddot\theta+N_R\dot\theta \tag{A-20}$$

로 놓을 수 있으며, (2-6)과 (A-12)를 (A-20)에 代入하여 整理하면

$$M_\phi=\left(\frac{4\eta\omega^2}{\pi B\xi_B}P_0I_R-\frac{4\eta\omega}{\pi B\xi_B}Q_0N_R\right)\sin\omega t+\left(-\frac{4\eta\omega^2}{\pi B\xi_B}Q_0I_R-\frac{4\eta\omega}{\pi B\xi_B}P_0N_R\right)\cos\omega t \tag{A-21}$$

(A-19)와 (A-21)에서 I_R과 N_R을 求하면

$$I_R=\frac{\rho B^4}{8}\cdot\frac{(Q_0Y_R+P_0X_R)}{(P_0^2+Q_0^2)} \tag{A-22}$$

$$N_R=\frac{B^3\xi_B\rho g}{4\omega}\cdot\frac{(Q_0X_R-P_0Y_R)}{(P_0^2+Q_0^2)} \tag{A-23}$$

附加慣性모우먼트 係數와 $\frac{\pi}{8}\rho\left(\frac{B}{2}\right)^4$과의 比를 $K_{\phi B}$, $\frac{\pi}{8}\rho T^4$과의 比를 $K_{\phi T}$라고 하면, (A-22)에서

$$K_{\phi B}=\frac{16}{\pi}\cdot\frac{(Q_0Y_R+P_0X_R)}{(P_0^2+Q_0^2)} \tag{A-24}$$

$$K_{\phi T}=K_{\phi B}\cdot H_0^4 \tag{A-25}$$

또한, $\omega\to\infty$ 일때의 附加慣性모우먼트는 Kumai[5], 李와 梁[7]의 結果로부터

$$I_{R\infty}=\frac{\rho\pi B^4}{16}\cdot\frac{a^2_{2m-1}+(n-1)a^2_{2m-1}a^2_{2n-1}+na^2_{2n-1}}{(1+a_{2m-1}+a_{2n-1})^4} \tag{A-26}$$

이므로,

$$K_{\phi B}(\omega\to\infty)=\frac{8(a^2_{2m-1}+(n-1)a^2_{2m-1}a^2_{2n-1}+na^2_{2n-1})}{(1+a_{2m-1}+a_{2n-1})^4} \tag{A-27}$$

다음에 N_R과 $\bar{A}$의 關係式을 求해 보자.

(2-6), (A-12)와 (A-23)을 利用하면, 減衰모우먼트 M_D는

$$M_D=N_R\dot\theta=(Q_0\sin\omega t+P_0\cos\omega t)\frac{Q_0X_R-P_0Y_R}{P_0^2+Q_0^2}\cdot\frac{\rho gB^2\eta}{\pi} \tag{A-28}$$

로 表示되며, M_D에 依해서 한 週期 $\tau=\frac{2\pi}{\omega}$ 동안에 하여진 일을 W라고 하면

$$W=\int_{t=0}^{t=\tau}M_Dd\theta=\int_0^\tau M_D\frac{d\theta}{dt}dt=\int_0^\tau N_R\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2dt=\pi\omega\theta_0^2N_R \tag{A-29}$$

反面에, 外向으로 進行하는 波浪 $\eta^*=\eta\sin(Kx-\omega t)$에 依해서 한 週期동안에 傳達되어지는 에너지는 波長 $\frac{2\pi}{K}$ 사이의 波浪의 포텐샬에너지와 같으므로

$$E=2\int_0^{\frac{\pi}{K}}\rho g\eta^2\sin^2 Kx\,dx=\frac{\pi\rho g\eta^2}{K} \tag{A-30}$$

에너지의 保存法則에 依해서 (A-29)와 (A-30)으로부터

$$\pi\omega\theta_0^2N_R=\frac{\pi\rho g\eta^2}{K} \tag{A-31}$$

(A-16)과 (A-31)에서

$$N_R=\frac{\rho g^2}{\omega^3}\bar{A}^2\left(\frac{B}{2}\right)^2 \tag{A-32}$$

(A-32)에 (A-16)과 (A-23)을 代入하여

$$P_0Y_R-Q_0X_R=\frac{\pi^2}{8} \tag{A-33}$$

의 關係式을 얻을 수 있으며, 이 式은 計算을 檢算할 때 使用된다.

Ⅲ. 聯成水平力의 計算

x의 陰의 方向으로의 流體動力學的 힘 F_x는

$$F_x=-2\int_0^{\frac{\pi}{2}}p\left(\frac{dy_0}{d\theta}\right)d\theta \tag{A-34}$$

(A-17)을 (A-34)에 代入하여 整理하면

$$F_x=-\frac{\rho gB}{\pi}(N_0\sin\omega t-M_0\cos\omega t) \tag{A-35}$$

여기서 N_0, M_0는 左右動搖의 境遇에서 얻은 값과 같고, 前節에서와 같이 $\ddot\theta$와 $\dot\theta$의 項으로 分離하면

$$F_x=F_{RS}(-\ddot\theta)+F_{RS}(-\dot\theta) \tag{A-36}$$

(2-6)을 (A-36)에 代入한 후 (A-35)와의 恒等式을

풀면

$$F_{RS}=\frac{\rho B^3}{8}\cdot\frac{Q_0M_0+P_0N_0}{P_0^2+Q_0^2} \quad (A-37)$$

$$N_{RS}=\frac{\rho\omega B^3}{8}\cdot\frac{P_0M_0-Q_0N_0}{P_0^2+Q_0^2} \quad (A-38)$$

지금,

$$F_{RS}=\frac{I_R}{K_{RS}\cdot T} \quad (A-39)$$

$$N_{RS}=\frac{N_R}{\alpha_{RS}\cdot T} \quad (A-40)$$

로 놓으면, 橫動搖에 依한 水平力의 係數 K_{RS}, α_{RS}는 (A-22), (A-37)과 (A-39)에서

$$K_{RS}=2H_0\left(\frac{P_0X_R+Q_0Y_R}{P_0N_0+Q_0M_0}\right) \quad (A-41)$$

(A-23), (A-38)과 (A-40)에서

$$\alpha_{RS}=\left(\frac{\pi}{2}\right)^2\frac{H_0}{(P_0M_0-Q_0N_0)} \quad (A-42)$$

Ⅳ. 指數積分 [8]

$$I_1=\int_0^\infty\frac{e^{-k|x|}}{K^2+k^2}(k\cos ky-K\sin ky)dk \quad (A-43)$$

I_1은 다음과 같이 變形된다.

$$I_1=\frac{1}{2}\left\{\int_0^\infty\frac{e^{-k(|x|-iy)}}{k-iK}dk+\int_0^\infty\frac{e^{-k(|x|+iy)}}{k+iK}dk\right\} \quad (A-44)$$

지금

$$\pi J=\int_0^\infty\frac{e^{-(|x|+iy)k}}{k+iK}dk \quad (A-45)$$

로 놓으면, (A-44)는

$$I_1=\frac{1}{2}(\overline{\pi J}+\pi J)=R_e(\pi J) \quad (A-46)$$

$z=|x|+iy$라고 하면

$$\pi J=\int_0^\infty\frac{e^{-kz}}{k+iK}dk=e^{iKz}\int_{iKz}^\infty\frac{e^{-v}}{v}dv \quad (A-47)$$

이며, (A-47)의 右邊의 積分은 Exponential integral 이며,

$$E(iKz)=\int_{iKz}^\infty\frac{e^{-v}}{v}dv=E_c-iE_s \quad (A-48)$$

로 놓으면

$$\pi J=e^{-Ky+iK|x|}(E_c-iE_s) \quad (A-49)$$

따라서

$$R_e(\pi J)=(E_c\cos K|x|+E_s\sin K|x|)e^{-Ky} \quad (A-50)$$

$$I_m(\pi J)=(E_c\sin K|x|-E_s\cos K|x|)e^{-Ky} \quad (A-51)$$

지금 Euler 常數 γ에 對해서 $\gamma=\log\gamma'$인 γ'를 取하면

$$E(iKz)=-\log(iKz\gamma')-\sum_{n=1}^\infty\frac{(-iKz)^n}{n\cdot n!} \quad (A-52)$$

또한 $r=\sqrt{x^2+y^2}$, $\theta=\tan^{-1}\frac{y}{x}$로 놓으면 (A-52)는

$$E(iKz)=-\gamma-\log(Kr)-\sum_{n=1}^\infty\frac{(Kr)^n\cos n\theta}{n\cdot n!}$$
$$-i\left\{\pi-\theta-\sum_{n=1}^\infty\frac{(Kr)^n\sin n\theta}{n\cdot n!}\right\} \quad (A-53)$$

(A-49)와 (A-53)에서 E_c와 E_s를 구하면

$$\left.\begin{aligned}E_c&=-\gamma-\log(Kr)-\sum_{n=1}^\infty\frac{(Kr)^n\cos n\theta}{n\cdot n!}\\E_s&=\pi-\theta-\sum_{n=1}^\infty\frac{(Kr)^n\sin n\theta}{n\cdot n!}\end{aligned}\right\} \quad (A-54)$$

그러므로

$$I_1=R_e(\pi J)=-e^{-ky}\cos K|x|(\gamma+\log(Kr)+\sum_{n=1}^\infty\frac{(Kr)^n\cos n\theta}{n\cdot n!}+e^{-Ky}\sin K|x|\left(\pi-\theta-\sum_{n=1}^\infty\frac{(Kr)^n\sin n\theta}{n\cdot n!}\right) \quad (A-55)$$

다음에 I_2의 計算을 생각하자.

$$I_2=\int_0^\infty\frac{e^{-k|x|}}{K^2+k^2}\{k\sin ky+K\cos ky\}dk \quad (A-56)$$

I_2를 앞에서와 同一한 方法으로 變形하면

$$I_2=\frac{1}{2i}\left\{\int_0^\infty\frac{e^{-k(|x|-iy)}}{k-iK}dk-\int_0^\infty\frac{e^{-k(|x|+iy)}}{k+iK}dk\right\} \quad (A-57)$$

(A-45), (A-57)에서

$$I_2=\frac{1}{2i}(\overline{\pi J}-\pi J)=-I_m(\pi J) \quad (A-58)$$

따라서 (A-49), (A-54)와 (A-58)에서

$$I_2=e^{-Ky}\sin K|x|\left(\gamma+\log(Kr)+\sum_{n=1}^\infty\frac{(Kr)^n\cos n\theta}{n\cdot n!}\right)$$
$$+e^{-Ky}\cos K|x|\left(\pi-\theta-\sum_{n=1}^\infty\frac{(Kr)^n\sin n\theta}{n\cdot n!}\right) \quad (A-59)$$