

論 文

船體 上下振動에 對한 附加質量的 3次元 修正係數에 關하여

金 昌 烈

On the Three-dimensional Correction Factor for the Added Mass in the Vertical Vibration of the Ship.

by
C.Y. Kim

Abstract

The three-dimensional correction factor of the added mass of finite-length elliptic cylinders in vertical vibration in a free surface was calculated. This problem has already been dealt by T. Kumai [5] to contribute to analytical prediction of the three-dimensional correction factor for the added mass in vertical vibration of ships.

In Kumai's work, the body boundary condition involved in the appropriate boundary value problem was approximately treated in the course of obtaining the solution.

In this work, obtaining the solution derived from mathematically exact treatment of the body boundary condition, the author recalculated the three-dimensional correction factor for length-beam ratio 4~8, beam-draught ratio 2.00~4.50 and number of nodes from 2 to 7. And the numerical results were compared with both Kumai's results and the author's experimental data for two and three-noded vibrations of the cylinder of beam-draught ratio 2.40

The comparison of the numerical results shows that the author's are always higher than the Kumai's as expected. And the comparison of the numerical results with experimental data shows that the Kumai's numerical results have less deviation in case of two-noded vibration, and that, in case of three-noded vibration, the author's numerical results are in fairly good correspondence.

1. 序 論

振動하고 있는 船體周圍의 流體의 흐름은 事實上 3次元의이기 때문에 附加質量은 2次元理論에 依하여 計算된 값보다 작다. 그리하여 F.M. Lewis[1]는 船體에 對한 3次元의 附加質量計算을 爲하여

$$J = \frac{\text{3次元의運動에서의 물러싸고 있는 流體의 運動 Energy}}{\text{2次元의運動에서의 물러싸고 있는 流體의 運動 Energy}}$$

와 같이 定義한 附加質量的 3次元 修正係數를 導入하므로써 2次元의 附加質量에 이 修正係數를 곱하여 3

次元의 附加質量을 算定하는 方法을 提示하였는 바 이 方法은 現今까지 襲用되고 있다. 또 Lewis[1]는 J의 推定을 爲하여 數學的模型으로서 廻轉橢圓體를 擇하여 剪斷型의 上下振動에 對한 J의 값을 求하였다. 한편 J.L. Taylor [2,3]는 實船의 振動은 撓曲型임을 考慮하여 廻轉橢圓體에 對해서 上下振動에 對한 J의 값과 無限長圓筒의 撓曲振動型에 對한 J의 값을 求하였다. C. Kruppa [4]는 3軸橢圓體의 J의 값을 求하므로써 幅吃水比의 影響을 導入하였다. T. Kumai [5]는 實船 形狀(특히 肥大船)이 廻轉橢圓體와는 棼 差異가 있을 뿐만 아니라, Taylor의 無限長圓筒에 對한 J값은 端末條件이 不合理하고 또 幅一吃水比 影響을 反映시키

지 않고 있다는 점을考慮하여 有限長橢圓斷面柱狀體의 上下振動에 對한 J 의 값을 計算하였다. 有限長 柱狀體의 上下振動에 있어서의 J 에 關한 研究로서는 上記 橢圓斷面柱狀體外에 Kumai [6]의 Lewis form 斷面柱狀體에 對한것, K. C. Kim 등 [7]의 chine型 斷面柱狀體에 對한 것이 있다.

Kumai [5]의 有限長橢圓斷面柱狀體에 對한 J 의 理論的計算은 柱狀體周圍流體의 速度 potential을 計算하는데 있어서 物體表面에 對한 境界條件을 近似的으로 取扱하였다는데 問題點이 있다. 本論文에서는 上記 境界條件의 取扱에 數學的인 嚴密을 期하여 J 를 計算하고 同結果와 Kumai의 計算值를 實驗值와 比較檢討하였다.

2. 理論解析

自由水面에서 長徑 $2b$, 短徑 $2d$ 이고 길이 L 인 等質橢圓斷面柱狀體가 半沒狀態에서 垂直하게 振動한다고 생각하자. 물은 理想流體라 假定한다. 橢圓斷面柱狀體의 左端斷面의 圖心을 原點으로 해서 水面과 一致하는 長軸方向을 x 軸으로 하는 直角座標系(x, y, z)를 取하면, 이 座標系와 橢圓柱座標系(ξ, η, z) 사이에는 다음 關係가 成立한다.

$$\left. \begin{aligned} x &= h \cosh \xi \sin \eta \\ y &= h \sin h \xi \sin \eta \\ z &= z \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

여기에서 $2h$ 는 橢圓斷面의 焦點間距離

(1)에서 $\eta=0$ 및 π 가 自由水面이고, $\xi=0$ 및 $\xi \rightarrow \infty$ 는 各各 차례로 幅 $2b$ 인 平板과 無限半徑의 圓斷面柱狀體에 對應한다. 한편 $\eta=\text{const.}$ 인 雙曲線의 弧의 길이를 ds_1 , $\xi=\text{const.}$ 인 橢圓의 弧의 길이를 ds_2 라 하면

$$\left. \begin{aligned} ds_1 &= \left[\left(\frac{\partial x}{\partial \xi} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \xi} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} d\xi = l_1 d\xi \\ ds_2 &= \left[\left(\frac{\partial x}{\partial \eta} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \eta} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} d\eta = l_2 d\eta \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

여기에서 $l_1=l_2$ 이다.

또 (1)의 關係로부터

$$l_1 = \frac{h}{\sqrt{2}} (\cosh 2\eta - \cos 2\eta)^{\frac{1}{2}}$$

$\xi=\xi_0$ 인 橢圓斷面에 對해서 船型幾何學의 寸수 및 寸수比를 定義하면 다음과 같다.

$$\left. \begin{aligned} B &= 2b = 2x_0 = 2h \cosh \xi_0 \\ d &= y_0 = h \sin h \xi_0 \\ \frac{B}{2d} &= \frac{h \cosh \xi_0}{h \sin h \xi_0} = \text{coth} \xi_0 \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

橢圓斷面柱狀體周圍의 流體의 3次元의 速度 poten-

tial ϕ 에 對한 Laplace 方程式 $\nabla^2 \phi = 0$ 는 橢圓座標系에서 다음과 같이 表示된다.

$$\frac{2}{h^2 (\cosh 2\xi - \cos 2\eta)} \left\{ \frac{\partial^2 \phi}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial \eta^2} \right\} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0 \quad (5)$$

주어진 問題에 對한 境界條件은 다음과 같이 取한다.

i) 自由水面 即 $\eta=0, \pi$ 에서 $\phi=0$ (6)

ii) 無限遠點 即 $\xi \rightarrow \infty$ 에서 $\phi=0$ (7)

iii) 兩端 即 $z=0, L$ 에서 $\phi=0$ (8)

iv) 橢圓斷面柱狀體의 接水面 即

$$\xi = \xi_0 \text{에서 } \left(\frac{\partial \phi}{l_1 \partial \xi} \right)_{\xi=\xi_0} = V_n \quad (9)$$

但 V_n 는 柱狀體의 振動速度 V 의 法線方向 成分임.

振動型을 cosine mode로 取하면

$$\begin{aligned} V_n &= V \cos \frac{s\pi z}{L} \left(\frac{\partial y}{\partial s_1} \right)_{\xi=\xi_0} \\ &= V h \cosh \xi_0 \cdot \left(\frac{1}{l_1} \right)_{\xi=\xi_0} \cos \frac{s\pi z}{L} \sin \eta \end{aligned}$$

여기에서 s 는 振動節數이다.

$\cos \frac{s\pi z}{L}$ 를 $0 < z < L$ 에 對하여 Fourier sine 級數로 展開하면

$$V_n = \frac{4V}{\pi} \frac{h \cosh \xi_0 \sin \eta}{l_1} \sum_m \left(\frac{m}{m^2 - s^2} \right) \sin k_m z \quad (10)$$

여기에서 $k_m = \frac{m\pi}{L}$

$s=1, 3, 5, \dots$ 에 對해서 $m=2, 4, 6, \dots$

$s=2, 4, 6, \dots$ 에 對해서 $m=1, 3, 5, \dots$

이제 速度 potential $\phi(\xi, \eta, z)$ 를

$$\phi(\xi, \eta, z) = \phi_1(\xi) \phi_2(\eta) \phi_3(z) \quad (11)$$

와 같이 놓자. 단, time factor $e^{i\omega t}$ 는 窮極의 으로 J 計算에 無關하므로 省略한다. 境界條件 (8)과 V_n 의 z 方向의 分布를 考慮하여

$$\phi_3(z) = \sum_m C_m \sin k_m z \quad (12)$$

여기에서 C_m 는 常數

와 같이 取할 수 있다. 따라서 (5)로부터

$$\frac{\phi_1''}{\phi_1} - \frac{h^2}{2} k_m \cosh 2\xi = - \frac{\phi_2''}{\phi_2} - \frac{h^2}{2} k_m^2 \cos 2\eta \quad (13)$$

그러므로 分離常數를 a 로 하여

$$\frac{d^2 \phi_1}{d\xi^2} - \{a - 2(-q_m) \cosh 2\xi\} \phi_1 = 0 \quad (14)$$

$$\frac{d^2 \phi_2}{d\eta^2} + \{a - 2(-q_m) \cos 2\eta\} \phi_2 = 0 \quad (15)$$

여기에서 $q_m = \frac{1}{4} h^2 k_m^2$

(14), (15)는 Mathieu 方程式이다. 이들의 解系中*

*以下 Mathieu function에 關聯되는 모든 記號는 N.W. McLachlan [8]의 記號에 따랐을.

(15)의 解로서는 周期 2π 인 周期解, (14)의 解로서는 非周期解를 取하되 modified Bessel function I, K 의 product series로 展開되는 第2의 解를 取하면

$$\begin{aligned} \hat{\phi}_m &= \phi_1 \cdot \phi_2 \\ &= \sum_{r=1}^{\infty} D_{2r-1} Fek_{2r-1}(\xi, -q_m) \cdot ce_{2r-1}(\eta, -q_m) \\ &\quad + \sum_{r=1}^{\infty} E_{2r-1} Gek_{2r-1}(\xi, -q_m) \cdot se_{2r-1}(\eta, -q_m) \end{aligned} \quad (16)$$

그런데 境界條件 (6)을 만족시키기 위해서는 $D_{2r-1} = 0$ 이다.

또 $Gek_{2r-1}(\xi, -q_m)$ 이 境界條件 (7)을 滿足시키는 것은 自明하다. 따라서

$$\hat{\phi}_m = \sum_{r=1}^{\infty} E_{2r-1} Gek_{2r-1}(\xi, -q_m) \cdot se_{2r-1}(\eta, -q_m) \quad (17)$$

그러므로

$$\begin{aligned} \phi &= \sum_m \sum_{r=1}^{\infty} C'_{m, 2r-1} Gek_{2r-1}(\xi, -q_m) \cdot se_{2r-1}(\eta, -q_m) \\ &\quad \cdot \sin k_m z \end{aligned} \quad (18)$$

(10)과 (18)을 境界條件 (9)에 代入하면

$$\begin{aligned} \frac{1}{l_1} \sum_m \sum_{r=1}^{\infty} C'_{m, 2r-1} Gek'_{2r-1}(\xi_0, -q_m) \cdot se_{2r-1}(\eta, -q_m) \\ \sin k_m z = \frac{4V}{\pi} \frac{h \cdot \cos h\xi_0 \cdot \sin \eta}{l_1} \sum_m \left(\frac{m}{m^2 - s^2} \right) \\ \sin k_m z \end{aligned} \quad (19)$$

여기에서 Gek' 는 Gek 의 ξ 에 關한 微分이다.

(19)에

$$\sin \eta = \sum_{r=1}^{\infty} (-1)^r A_1^{(2r-1)} \cdot se_{2r-1}(\eta, -q_m) \quad (20)$$

의 關係를 代入하여 $C'_{m, 2r-1}$ 를 求하면

$$C'_{m, 2r-1} = \frac{\alpha (-1)^r A_1^{(2r-1)}}{Gek'_{2r-1}(\xi_0, -q_m)} \left(\frac{m}{m^2 - s^2} \right) \quad (21)$$

여기에서 $\alpha = \frac{4V}{\pi} h \cosh \xi_0$

故로 求하는 解는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \phi &= \sum_m \sum_{r=1}^{\infty} \alpha (-1)^r A_1^{(2r-1)} \left(\frac{m}{m^2 - s^2} \right) \\ &\quad \cdot \frac{Gek_{2r-1}(\xi, -q_m)}{Gek'_{2r-1}(\xi_0, -q_m)} \cdot se_{2r-1}(\eta, -q_m) \sin k_m z \end{aligned} \quad (22)$$

半徑橢圓斷面柱狀體周圍의 流體의 運動 Energy T 는

$$\begin{aligned} 2T &= -\rho \int_0^L \int_0^{\tau} \left(\phi \frac{\partial \phi}{l_1 \partial \xi} \right)_{\xi_0} (l_1)_{\xi=\xi_0} d\eta dz \\ &= -\rho \alpha^2 \frac{L}{2} \cdot \pi \sum_m \sum_{r=1}^{\infty} \left(\frac{m}{m^2 - s^2} \right)^2 (A_1^{(2r-1)})^2 \\ &\quad \cdot \frac{Gek(\xi_0, -q_m)}{Gek'(\xi_0, -q_m)} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} (A_{2n-1}^{(2r-1)})^2 \end{aligned}$$

$se_{2r-1}(\eta, -q_m)$ 의 Fourier 係數 $A_{2n-1}^{(2r-1)}$ 로서

normalize 한 값을 使用하면

$$\sum_{n=1}^{\infty} (A_{2n-1}^{(2r-1)})^2 = 1$$

이므로 結局

$$\begin{aligned} 2T &= -\rho \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \frac{L}{2} \sum_m \sum_{r=1}^{\infty} \left[\left(\frac{4V}{\pi} \right)^2 (h \cdot \cos h\xi_0)^2 \right. \\ &\quad \cdot \{ A_1^{(2r-1)} \}^2 \cdot \left. \left(\frac{m}{m^2 - s^2} \right)^2 \frac{Gek_{2r-1}(\xi_0, -q_m)}{Gek'_{2r-1}(\xi_0, -q_m)} \right] \end{aligned} \quad (23)$$

$Gek_{2r-1}(\xi, -q_m)$ 의 modified Bessel function I, K 의 級數表示는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} Gek_{2r-1}(\xi, -q_m) &= \frac{P^{2r-1}}{\pi A_1^{(2r-1)}} \sum_{n=1}^{\infty} A_{2n-1}^{(2r-1)} \\ &\quad \cdot \{ I_{n-1}(u_m) K_n(v_m) \\ &\quad + I_n(u_m) K_{n-1}(v_m) \} \end{aligned} \quad (24)$$

여기에서 $u_m = \sqrt{q_m} \cdot e^{-\xi}$, $v_m = \sqrt{q_m} \cdot e^{\xi}$

한편 自由水面에서 半徑橢圓柱狀體가 上下振動을 할 때 流體의 2次元의 運動 Energy T' 는

$$\begin{aligned} 2T' &= \int_0^L \frac{1}{2} \rho \pi b^2 C_V V^2 \cos^2 \frac{s\pi z}{L} dz \\ &= \rho \pi (h \cosh \xi_0)^2 V^2 \cdot \frac{L}{4} \end{aligned} \quad (25)$$

따라서 附加質量 3次元修正係數 J_V 는

$$\begin{aligned} J_V &= \frac{T'}{T} \\ &= \frac{16}{\pi^2} \sum_m \sum_{r=1}^{\infty} \left(\frac{m}{m^2 - s^2} \right)^2 (A_1^{(2r-1)})^2 \\ &\quad \cdot \frac{\sum_{n=1}^{\infty} A_{2n-1}^{(2r-1)} \left\{ 1 + \frac{I_n(u_m)}{I_{n-1}(u_m)} \cdot \frac{K_{n-1}(v_m)}{K_n(v_m)} \right\}}{\sum_{n=1}^{\infty} A_{2n-1}^{(2r-1)} \left\{ (2n-1) \left(1 - \frac{I_n(u_m) K_{n-1}(v_m)}{I_{n-1}(u_m) K_n(v_m)} \right) \right.} \\ &\quad \cdot \frac{I_{n-1}(u_m) K_n(v_m)}{+ (u_m + v_m) \left(\frac{K_{n-1}(v_m)}{K_n(v_m)} + \frac{I_n(u_m)}{I_{n-1}(u_m)} \right) \left. \right\}} \\ &\quad \cdot I_{n-1}(u_m) K_n(v_m) \end{aligned} \quad (26)$$

여기에서 $u_m = \sqrt{q_m} \cdot e^{-\xi_0}$, $v_m = \sqrt{q_m} \cdot e^{\xi_0}$

$$q_m = \frac{h^2 k_m^2}{4} = \left(\frac{hm\pi}{2L} \right)^2 = \left[\frac{m\pi}{2 \cosh \xi_0} \left(\frac{b}{L} \right) \right]^2$$

이다. 또 J_V 의 算式中 B/d 는

$$\frac{B}{d} = \frac{2 \cosh \xi_0}{\sinh \xi_0} = 2 \coth \xi_0$$

와 같이 주어진다.

3. 數值計算

數值計算의 範圍는 다음과 같다.

$$\frac{B}{d} = 2.0, 3.0, 4.0, 4.5$$

$$\frac{L}{b} = 8, 10, 12, 14, 16$$

$$s = 2, 3, 4, 5, 6, 7,$$

本計算에 있어서의 $A_{2n-1}^{(2r-1)}$ 의 값은 文獻 [9]로부터 取하였다. 計算結果는 Fig.1~Fig.6에 주어졌다. 圖表中 $B/d=2.0$ 即, 圓斷面에 對한 값은 Kumai[5]의

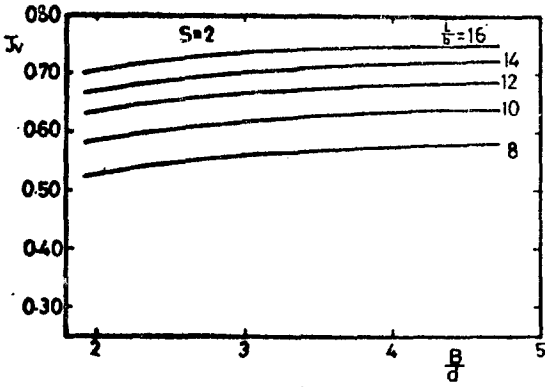


Fig. 1.

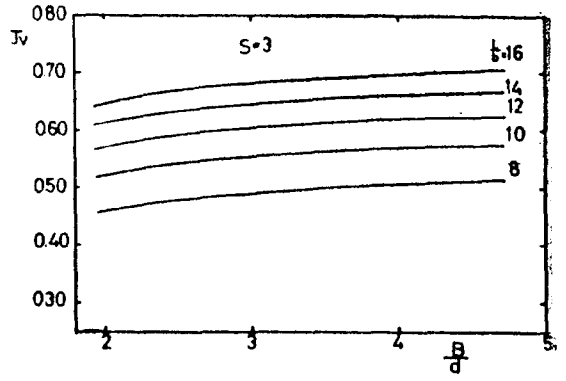


Fig. 2.

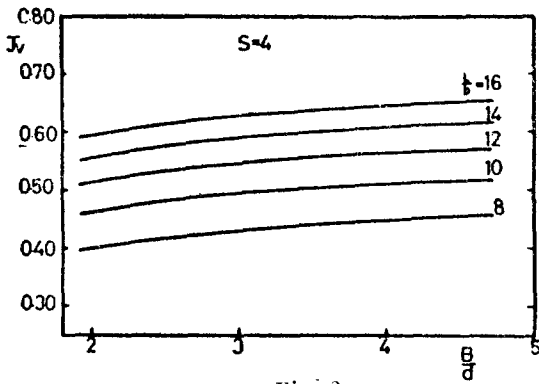


Fig. 3.

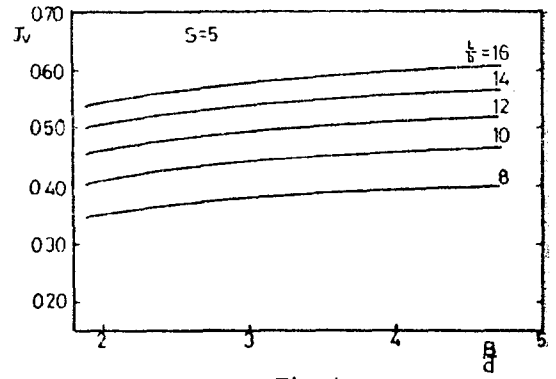


Fig. 4.

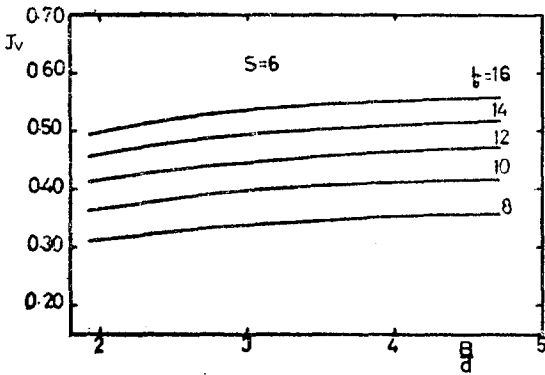


Fig. 5.

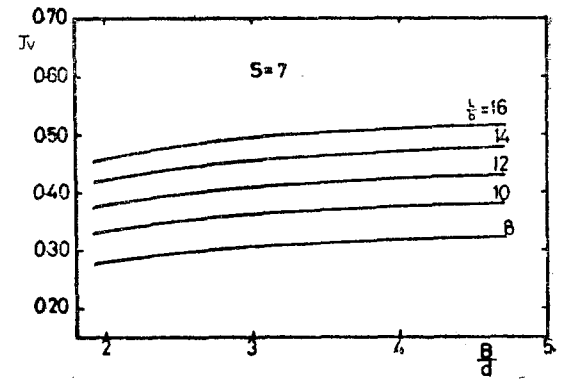


Fig. 6.

橢圓斷面柱狀體에 對한 算式에 依하여 計算한 값이다.

4. 實 驗

模型實驗은 길이 2.0m, 幅 1.0m인 水槽에서 水深 約 0.7m에서 行하였다. 模型材料는 日産赤松이다. 大型油槽船의 長幅比가 大體로 6 近處임을 勘案하여 L/b 은 8, 10, 12, 14, 16 으로 取하였다.

橢圓斷面柱狀體의 一端에 起振力 1kg 과 加速度 50g 容量의 vibropet 를 設置하여 起振하고 他端에 設置한 cristal pick up 에 依해서 模型의 振動을 受振하였다. 그리고 charge 振動計에 依해서 空氣中에서와 水中에서 的 固有振動數를 測定하였다. 模型은 計算된 2節振動의 節點에서 매달고 縱, 橫의 移動을 防止하기 위해서 水槽下部의 兩壁으로부터의 가는줄로서 安定시켰다.

3次元 附加質量比의 實際值 τ 는

$$\tau = \left(\frac{f_s}{f_w}\right)^2 \left(\frac{C_w}{C_s}\right)^2 - 1$$

에 依해서 算定된다. 但 f_s, f_w 는 各各 空氣中 및 水中에서 的 固有振動數, C_s, C_w 는 各各의 固有值이다. 斷面이 均一하고 等質인 橢圓斷面柱狀體에 對해서는 $C_w \approx C_s$ [10]임으로 結局

$$\tau = \left(\frac{f_s}{f_w}\right)^2 - 1 \tag{27}$$

로서 計算되고, 한편 2次元의 附加質量比 τ' 는 다음과 같다.

$$\tau' = \frac{\int_0^L \frac{1}{2} \rho \pi \left(\frac{B}{2}\right)^2 C_v y^2 dZ}{\int_0^L \rho' (B \cdot d \cdot \sigma) y^2 dZ} = \frac{1}{4} \cdot \frac{\rho}{\rho'} \cdot \frac{B}{d}$$

여기에서 ρ, ρ' 는 流體 및 橢圓斷面柱狀體의 密度, σ 는 斷面積係數, B 는 斷面의 水面에서 的 幅, d 는 吃水이다. 그러므로 J_v 의 實際值 J_{vexp} 는

$$J_{vexp} = \frac{\tau}{\tau'} \tag{28}$$

에 依해서 算定할 수 있다.

上記 實驗結果로부터 (28)式에 依해 算定한 J_{vexp} 中 2節 및 3節에 對한 값은 Fig. 7에 주어진 바와 같다.

5. 考 察

著者의 數值計算結果를 Kumai의 數值計算結果와 比較하면 (Fig. 7 參照) 全體의으로 著者의 計算值가 큰데, 例로서 $L/b=12, B/d=2.40$ 일 때 2節에서 約 0.02, 3節에서 約 0.025 程度의 差를 보이고 있다. 이 差는 振動節數가 클수록 더 크리라는 것은 쉽게 짐작된다. 이와같은 差異는 Kumai가 境界條件 (9)의 取扱에 있어서 V_n 의 算式 (10)의 $\sin \eta$ 를

$$\sin \eta \approx \text{se}_1(\eta, -q_m) \tag{a}$$

로 取하여 速度 potential 을 求한데 緣由한다. (a)는 $q_m \ll 1$ 일 때에만 妥當하며, 一般의으로 (20)과 같이

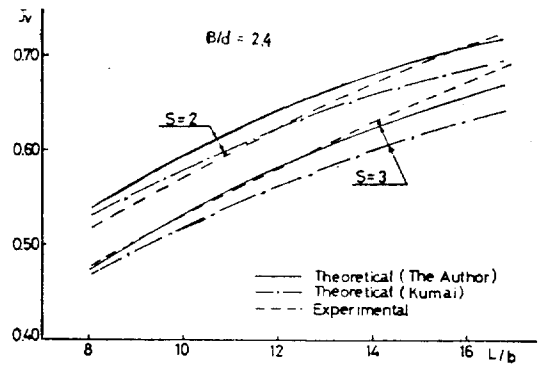


Fig. 7.

取하여야 한다. 또 Kumai는 그와같이 하여 얻은 J 의 算式에 依한 數值計算過程에서 $Gek_1(\xi, -q_m)$ 를

$$Gek_1(\xi, -q_m) \approx \left(\frac{\rho'}{\pi A_1^{(D)}}\right) A_1^{(D)} \cdot \{I_0(u_m)K_1(v_m) + I_1(u_m)K_0(v_m)\} \tag{b}$$

와 같이 取했다. 이 部分도 嚴密히는 (24)와 같이 取함이 옳다.

이로부터 著者의 計算值가 全體的으로 Kumai의 數值計算結果보다 큰 값이어야함은 쉽게 首肯된다. 理論計算結果를 實驗值와 比較하면 Fig. 7과 같은데, 2節의 경우에는 Kumai의 計算值가 오히려 實驗值와 더 잘 符合되는 傾向이나, 3節인 경우에는 著者의 計算值가 實驗值와 매우 잘 符合하고 있으며 이에 反해 Kumai의 計算值는 相當히 작다. 이로부터 推하여 高次振動에 移行할수록 J_v 의 값으로서 著者의 計算值가 더 信憑度가 높으리라고 推定된다.

6. 結 論

叙上한 考察로부터 다음과 같은 結論이 얻어진다.

- (1) 3次元 修正係數는 B/d 의 增加, L/b 의 增加, 振動節數의 減少에 따라 增加한다.
- (2) L/b , 振動節數, B/d 의 3次元 修正係數에 對한 影響은 L/b 및 振動節數의 變化에 依한것이 비슷한 程度로 크고, B/d 의 變化에 依한 것은 比較的 작다.
- (3) 特히 肥大型船의 J_v 의 推定值로서 有限長橢圓斷面柱狀體에 對한 理論計算值가 有用함은 Kumai [5, 10]에 依하여 主張된 바 있거니와, 이 경우 高次振動에 對해서는 著者의 計算值의 信憑度가 더 높다고 推定된다.

後 記

本論文作成에 있어서 서울大學校의 金極天教授의 有益한 助言에 힘입은 바 컸으며 아울러 電子計算機利用의 便宜를 提供해준데 對하여 深甚한 謝意를 表하고, 實驗과 問題의 討議를 해준 釜山大學校의 金士洙 副教授에게 感謝드린다.

參考文獻

- [1] F.M. Lewis; "The Inertia of the Water Surrounding a Vibrating Ship", *Trans. of SNAME*, Vol.37, 1929.
- [2] J.L. Taylor; "Vibration of Ships", *Trans. of INA*, Vol.72, 1930.
- [3] J. L. Taylor; "Some Hydrodynamical Inertia Coefficients", *Phil. Mag.* Vol.9, 1930.
- [4] C. Kruppa; "Beitrag zum Problem der Hydrodynamischen Trägheitsgrößen bei elastischen Schiffsswingungen", *Schiffstechnik*, Bd. 9, 1962.
- [5] T. Kumai; "On the Three-dimensional Correction Factor for the Virtual Inertia Coefficient in the Vertical Vibration of Ships I (J-value of elliptical cylinder)", *JSNA, Japan* Vol.112, 1962.
- [6] T. Kumai; "A Method for Evaluating the Three-dimensional Reduction Factor of the Virtual Mass in the Vertical Vibration of Ships", *Japan Shipbuilding and Marine Eng'g*, Vol.1, No.3, 1966. Also, *Report of Research Inst. for Appl. Mech.*, Kyushu Univ. Vol. 26, 1967.
- [7] K.C. Kim, J.J. Kim; "On the Virtual Inertia Coefficient of the Chine-type Ship in Vertical Vibration", *Journal of The Society of Naval Architects of Korea*, Vol.9, No.1, 1972.
- [8] N.W. McLachlan; *Thory and Application of Mathieu Functions*, Dover Publication, Inc., New York, 1964.
- [9] The National Applied Mathematics Lab., National Bureau of Standard; *Tables Re'ating to Mathieu Functions*, Columbia Univ. Press, New York, 1951.
- [10] T. Kumai; "On the Virtual Inertia Coefficients of the Vertical Vibration of Ships", *JSNA, Japan*, Vol.105, 1959.