

論 文

背骨型斷面 柱狀體의 左右動搖에 있어서의 動流體力學的 힘에 관하여

黃 宗 屹* 梁 永 淳**

Hydrodynamic Forces produced by the Swaying Oscillation of Cylinders with Chine Sections on the Free Surface.

by

J.H. Hwang,* Y.S. Yang**

Abstract

Hydrodynamic forces and moments produced by the swaying oscillation on the free surface were exactly calculated by Ursell-Tasai method for the cylinders with Kim's chine form sections. And the sway responses of the cylinders of those chine form sections among the regular beam sea were also calculated.

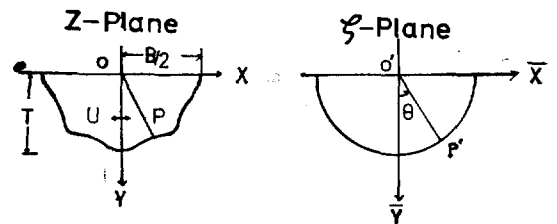
The results of the computation were compared with those of Lewis form sections.

It is concluded that the effects of the section form on the added mass, and damping are small, if the section forms had same beam-draft ratio and sectional area coefficient in the case of sway motion. It is also known that the above little effects of section shapes on the basic hydrodynamic forces do not effect on the sway motion responses of cylindrical bodies among the regular beam sea. The sway motion responses of cylindrical bodies are varied linearly with the wave numbers.

1. 緒 論

沿岸漁船이나 高速艇에는 차인 斷面을 가진 船舶이 많다. 그러나 이들 차인 斷面은 Lewis form [1]에 의해서 表示되지 않으므로 거의 研究되지 않고 있으며, 金[2]이 1969년에 單一背骨型, 複背骨型斷面의 寫像函數를 發見한 以後 그들 背骨型 斷面 柱狀體에 對한 運動의 研究가 시작되었다. 同斷面에 對한 黃, 金[3]의 上下 動搖에 關한 動流體力의 計算에 이어, 左右動搖에 關한 動流體力과 모우먼트의 計算을 Ursell-Tasai 方法에 따라서 試圖하였으며, 그 結果를 Tasai[4]의 Lewis form에 關한 것과 比較檢討 하였다.

體의 運動은 2次元的이다.



2. 境界條件과 斷面形狀

2.1. 境界條件

座標系는 아래 그림과 같이 取하여 水深은 無限大라고 流體는 完全流體로 假定한다. 지금 無限히 긴 2次元 柱狀體가 微小變位 $x = x_0 \cos(\omega t + \epsilon)$, 速度 $U = -\omega x_0 \sin(\omega t + \epsilon)$ 으로 強制左右動搖를 한다고 하면 流

連續方程式은

$$\nabla^2 \phi = 0 \tag{1}$$

와 같고, 自由表面條件은

$$K\phi + \frac{\partial \phi}{\partial y} = 0 \quad (y=0, |x| \geq \frac{B}{2}) \tag{2}$$

이며, $K = \omega^2/g$ 이다.

速度포텐셜 ϕ 는 y 軸에 關해서 反對稱性을 가지며, 즉, $\phi(x, y) = -\phi(-x, y)$ (3)

接受日字: 1974年 4月 16日

*正會員 서울 大學校 工科大學, **正會員 서울 大學校 大學院

物體表面의 境界條件은 그 平均位置에서 다음과 같이 나타내진다.

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = U \frac{\partial x}{\partial n} \quad (4)$$

여기서 n 은 物體表面에서의 外向法線이다.

(1) 式의 ϕ 즉 速度 포텐셜은 위의 (2), (3), (4)의 諸條件外에 無限遠에서의 發散波의 放射條件을 滿足하여야 한다.

2.2. 斷面形狀 [2]

本稿에서는 kim의 chine型 斷面[2] 柱狀體에 對해서 計算하였다. 그 寫像函數는

$$Z = M(\zeta + a_1 \zeta^{-1} + a_{2n-1} \zeta^{-(2n-1)}) \quad (5)$$

$n=4$ 일때 單一背骨型

$n=6$ 일때 複背骨型

와 같으며

$$Z = x + iy, \quad \zeta = ie^{i\theta} e^{-i\theta} \quad (6)$$

$$M = \frac{B}{2(1+a_1+a_{2n-1})} \quad (7)$$

이다.

斷面形狀은 $\alpha=0$ 으로 놓아 다음과 같이 表示된다.

$$\begin{aligned} x &= M\{(1+a_1)\sin\theta + (-1)^{n-1}a_{2n-1}\sin(2n-1)\theta\} \quad (8) \\ y &= M\{(1-a_1)\cos\theta + (-1)^na_{2n-1}\cos(2n-1)\theta\} \end{aligned}$$

(8)式으로 表示되는 斷面中에는 카스프가 있는 것, 斷面 스스로 交叉하는 것 등이 包含되고 있으므로 그들은 除外하여야 한다. 有效斷面의 上下限은 斷面積係數 σ , 斷面의 半幅-吃水比를 H_0 라고 할 때, 다음과 같다.

(1) 單一背骨型 (a_1, a_7)에 對해서

$$\sigma_{min} = \frac{7\pi}{128} \left(4 - \frac{1}{H_0}\right) \quad (H_0 \geq 1) \quad (9)$$

$$= \frac{7\pi}{128} (4 - H_0) \quad (H_0 < 1) \quad (10)$$

$$\sigma_{max} = \frac{\pi}{4} \quad (11)$$

(2) 複背骨型 (a_1, a_{11})에 對해서

$$\sigma_{min} = \frac{11\pi}{288} \left(6 - \frac{1}{H_0}\right) \quad (H_0 \geq 1) \quad (12)$$

$$= \frac{11\pi}{288} (6 - H_0) \quad (H_0 < 1) \quad (13)$$

$$\sigma_{max} = \frac{\pi}{4} \quad (14)$$

3. 計算結果 및 考察

附錄의 式(A-12)의 p_{2l}, q_{2l} 의 計算은 同式의 無限級數의 項數를 有限項數로 잡아서 最小自乘法에 의해 計算하였다. 먼저 項數 l 을 變化시키면서 計算의 精度를 調査하여 10項을 擇하였다. 計算의 精度는 Table 1. 에서 보는 바와 같이 滿足할만하며, 上下動搖의 경우와 같이 級數의 收斂도 比較的 빨랐다.

$$\text{誤差} = (M_0 P_0 - N_0 Q_0) - \frac{\pi^2}{2}$$

本計算에서는 船體表面上的 境界條件을 滿足하는 點을 1/2 斷面에서 21個로 잡고 項數 l 을 10으로 잡아도 上記의 聯立 方程式을 푸는데 상당히 큰 $\xi_s = \frac{\omega^2}{g} \cdot T$ 의 값까지 허용될 수 있을 程度(誤差가 10^{-4} 에서 10^{-3} 程度의 order)의 좋은 結果를 期待할 수 있었다.

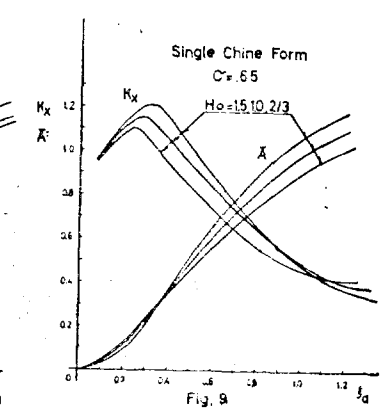
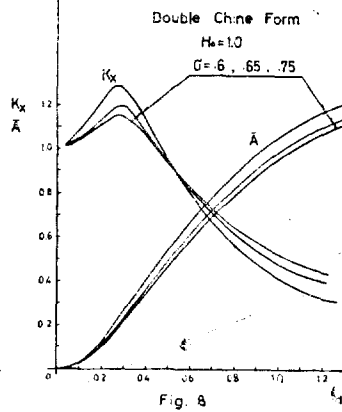
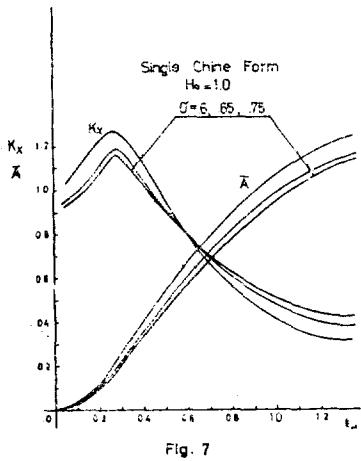
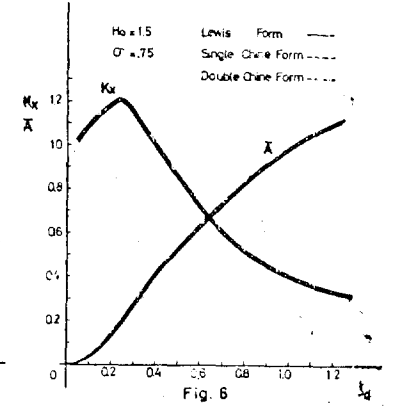
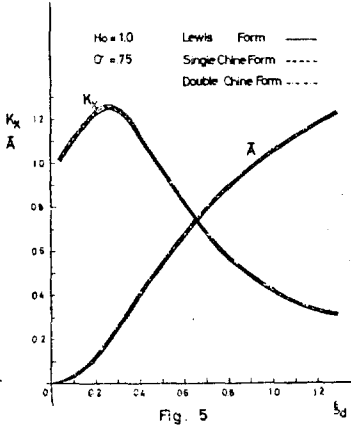
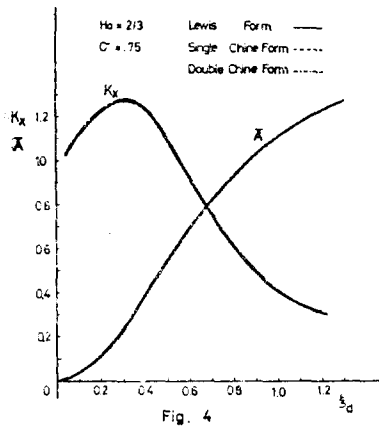
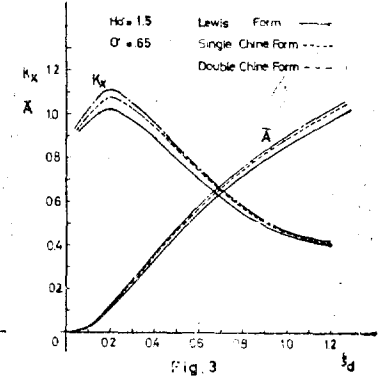
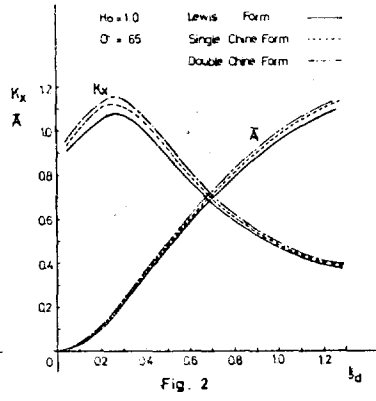
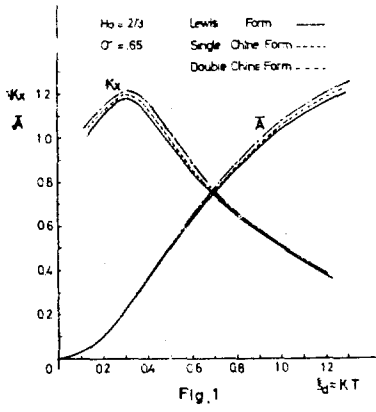
Lewis型 (a_1, a_3), Kim의 單一背骨型 (a_1, a_7) 및 複背骨型 (a_1, a_{11})에 對해서 H_0, σ 와 ξ_s 를 變化시키면서 그들 斷面柱狀體의 左右動搖에 對한 附加質量係數 K_r , 生成進行波의 波高와 強制左右動搖의 振幅의 比 \bar{A} , 左右動搖에 의해 生成되는 聯成橫動搖의 慣性 모우먼트의 吃水에 對한 無次元 arm K_{ip} , 減衰 모우먼트의 吃水에 對한 無次元 arm A_{ip} 등을 서울大學校 工科大學 IBM 1130 計算組織을 使用해서 計算하였다.

上記 3個型의 斷面에 對해서 $\sigma=0.65, 0.75$ 의 2경우에 對해서 H_0 를 각각 $\frac{2}{3}, 1.0, 1.5$, 로 變化시키면서 K_r 와 \bar{A} 를 計算한 結果를 Fig. 1~Fig. 6까지에 圖示하였다.

또 背骨型 斷面에 對해서 H_0 가 1.0의 경우에 σ 를 0.6, 0.65, 0.75로 變化시키면서 計算한 結果를 Fig. 7, Fig. 8에 圖示하였고, $\sigma=0.65, 0.75$ 에 對해서 H_0 를 2/3, 1.0, 1.5로 變化시키면서 計算한 結果를 Fig. 9~Fig. 12에 圖示하였다.

Table 1. Accuracy of the numerical calculation single chine $H_0=1.0, \sigma=0.65, l=10$

ξ_s	0.2	0.4	0.8	1.2
\bar{A}	0.1057730	0.359203	0.813075	1.09965
K_r	1.10483	1.04877	0.604266	0.399790
K_{ip}	-0.0704686	-0.0732425	-0.0522594	-0.0147249
A_{ip}	-0.0994803	-0.106971	-0.121802	-0.136244
Error	-0.2622×10^{-4}	-0.1366×10^{-4}	0.2710×10^{-4}	0.9219×10^{-4}



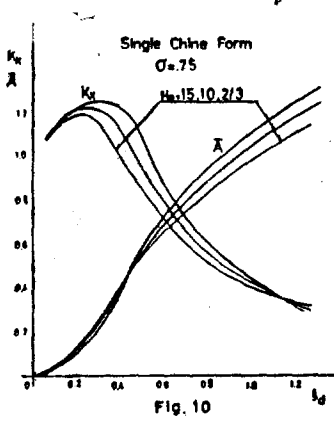


Fig. 10

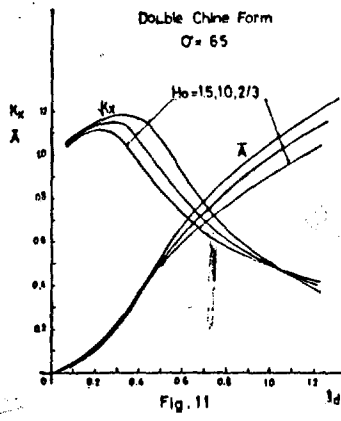


Fig. 11

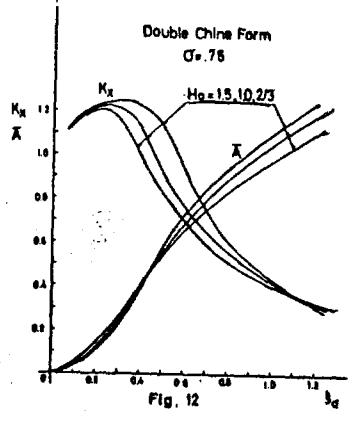


Fig. 12

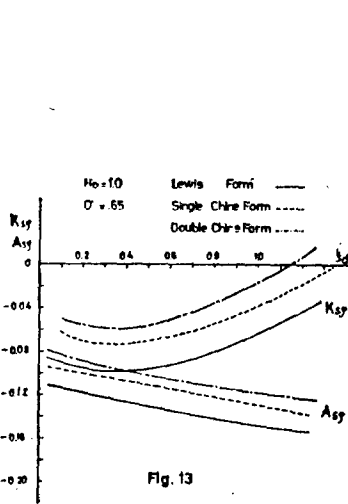


Fig. 13

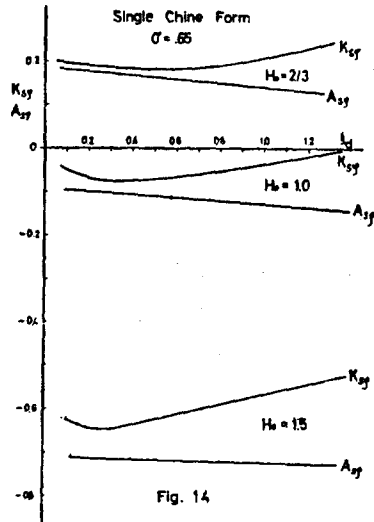


Fig. 14

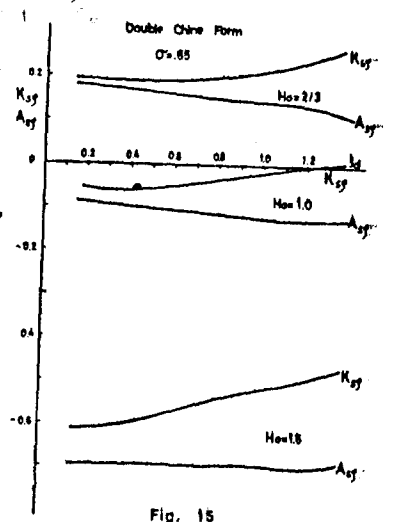


Fig. 15

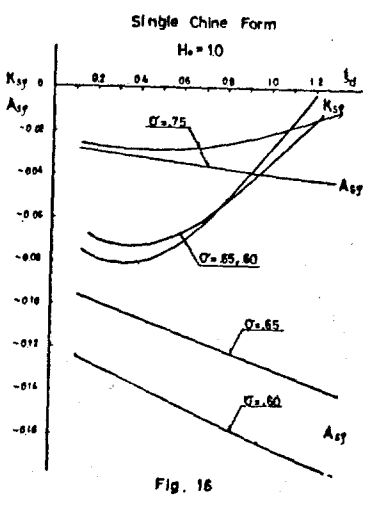


Fig. 16

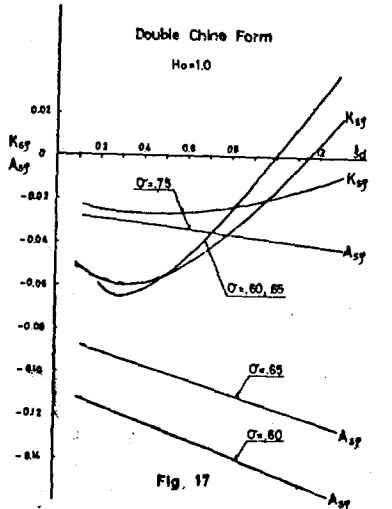


Fig. 17

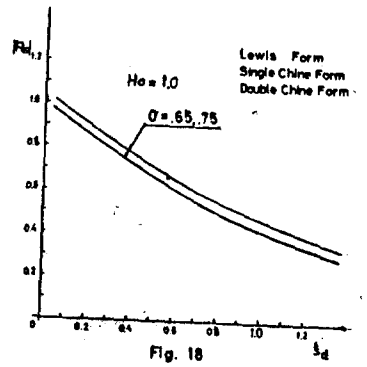
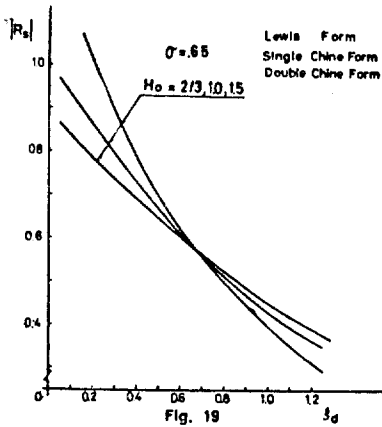


Fig. 18



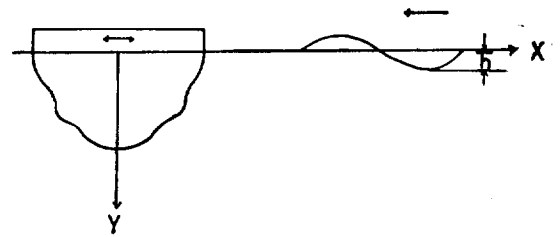
$K_{x,y}$ 와 $A_{x,y}$ 를 $H_0=1.0$, $\sigma=0.65$ 에 대해서 3개의 型的 斷面에 對하여 計算한 結果를 Fig. 13에, 또 $\sigma=0.65$ 의 單一背骨型과 複背骨型에 對해 H_0 를 2/3, 1.0, 1.5로 變化시키면서 $K_{x,y}$ 와 $A_{x,y}$ 를 計算한 結果를 Fig. 14, Fig. 15에 圖示하였다. 또 $H_0=1.0$ 의 경우에 上記의 二背骨型에 對해 σ 를 0.6, 0.65, 0.75로 變化시키면서 $K_{x,y}$ 와 $A_{x,y}$ 의 값을 計算하여 Fig. 16, Fig. 17에 그 結果를 圖示하였다.

以上的 計算結果로부터 다음과 같은 것을 알 수 있었다.

- (1) 같은 H_0 , 같은 σ 에 對해서는 \bar{A}, K_x 는 Lewis 斷面에 對한 값이 가장 작으며, Lewis 型, 單一背骨型, 複背骨型的 順으로 큰 값이 된다,
- (2) 같은 H_0 에서 Lewis 型, 單一背骨型, 複背骨型에 對한 \bar{A}, K_x 의 값은 細形斷面에서는 그 差異가 多少 크게 나타나나, 肥大斷面에서는 그 差異가 거의 없다.
- (3) 自由表面이 附加質量에 미치는 영향은 Tasai 教授가 얻은 Lewis 型 斷面에 對한 結果와 같이, 같은 H_0 에서 背骨型 斷面에 對해서도 ξ_d 가 約 0.6 以下에서는 肥大斷面이 큰 K_x 값을 가지나 ξ_d 가 約 0.6을 넘어서면 細形斷面이 큰 K_x 값을 갖는다.
- (4) 같은 H_0 에서 \bar{A} 는 肥大斷面이 細形斷面보다 큰 값을 가지며 ξ_d 가 클수록 그 差異가 커진다.
- (5) 0.65 程度의 σ 를 가지는 背骨型斷面에서는, K_x 는 ξ_d 가 約 1.0 以下에서는 H_0 가 작을수록 크고, 그 範圍를 벗어나 ξ_d 가 커지면 그 傾向은 反對가 된다. 또 K_x 의 값의 傾向이 바뀌는 ξ_d 의 값은 σ 가 增加함에 따라서 커진다.
- (6) 背骨型斷面에 對해서는 같은 σ 에서 \bar{A} 는 ξ_d 가 約 0.4 以下에서는 H_0 가 클수록 크나, ξ_d 가 0.4를 넘어서면 그 傾向은 反對가 된다.
- (7) $K_{x,y}$ 는 같은 H_0 , 같은 σ 에 對해서 Lewis 型이

가장 작은 값을 가지며, Lewis 型, 單一背骨型, 複背骨型的 順으로 큰 값이 된다. 즉 左右動搖에 起因한 橫搖 모우먼트는 複背骨型斷面에 가장 크게 작용한다.

4. 橫波中에서의 左右動搖應答



入射波의 포텐셜을

$$\phi_i = -\frac{ig}{\omega} \bar{h} e^{-ky+ix} \quad (15)$$

라 하고 x 方向의 배의 變位를

$$x_s(t) = X_s e^{i\omega t} \quad (16)$$

이라고 하자,

2차원 柱狀體의 左右運動方程式은

$$(m+a)\ddot{x}_s + N\dot{x}_s = E_s e^{i\omega t} \quad (17)$$

여기서 $m = \rho\sigma BT$, $a = K_x \cdot \frac{1}{2}\rho\pi T^2$ 이며, 單位速度에

對한 減衰力 N_s 는 $\frac{\rho g}{\omega K} \bar{A}^2$ 로 주어지며, 波에 의한 強制力 E_s 는 Haskind-Newman의 關係 [3]에 의해서 $\frac{\rho\omega^2}{K^2} \bar{h} \bar{A}$ 로 주어진다. (16), (17)에 의해서 運動方程式은

$$-\omega^2(m+a)X_s + i\omega N_s X_s = \frac{\rho\omega^2}{K^2} \bar{h} \bar{A} \quad (18)$$

와 같다.

2次元柱狀體의 左右動搖應答를 $R_s = \frac{X_s}{\bar{h}}$ 로 定義하면, (18)을 풀어서

$$R_s(a_1, a_2, \dots, \bar{\xi}_d) = \frac{\frac{\rho\omega^2}{K^2} \bar{A}}{[-\omega^2(m+a) + i\omega N_s]} = \frac{\bar{A}}{-[\sigma BT + K_x \frac{1}{2}\pi T^2]K^2 + i\bar{A}^2}$$

를 얻으며, 結局

$$|R_s| = \frac{\bar{A}}{\sqrt{(\sigma BT + \frac{1}{2}K_x \pi T^2)^2 K^4 + \bar{A}^4}} \quad (19)$$

와 같다.

$H_0=1.0$, $\sigma=0.65$ 와 $\sigma=0.75$ 의 Lewis 型, 單一背骨型, 複背骨型的 柱狀體에 對해서 ξ_d 를 變化시키면서 (15)와 같은 橫波를 入射시켰을 때의 左右運動應答를 (19)에 의해서 計算한 結果를 Fig. 18에 圖示하였다. σ 와 H_0 가 一定한 경우에 위의 3개의 型的 斷面에 對

하여 運動應答計算值에 差異가 전혀 나타나지 않으며, 그래프上에서 曲線이 完全히 포개진다. 이 點은 上下 動搖의 경우와 크게 差異가 있다.

또 Fig.19에 $\sigma=0.65$ 인 斷面에 對해서 H_0 를 2/3, 1.0, 1.5로 變化시키면서 R_s 를 計算한 結果를 圖示하였다.

以上の 計算에 의해서 다음과 같은 結果를 얻을 수 있었다.

(1) 2次元柱狀體의 規則波(橫波)中에서의 左右運動應答은 斷面積係數 σ , 幅吃水比 H_0 에 依存하고, σ 와 H_0 가 同一한 경우에는 斷面의 形狀에 依存하지 않으며

(2) 幅吃水比가 같은 경우에는 肥大斷面일수록 應答이 크며

(3) 斷面積係數가 같은 경우에는 ξ_d 가 0.7 근처까지는 幅吃水比가 큰 斷面의 應答이 크고, 그 以上の ξ_d 의 범위에서는 反對傾向이 나타나고,

(4) 一般의으로 斷面積 係數와 幅吃水比가 같은 斷面에서의 左右運動應答은 ξ_d 에 따라서 거의 線型的으로 減少한다.

5. 結 論

以上の 計算結果로 부터 左右動搖에 있어서 附加質量, 減衰力 等은 主로 振動數 ξ_d , 斷面積係數 σ , 幅吃水比 H_0 에 依存하며, H_0, σ, ξ_d 가 同一한 경우에는 斷面의 形狀에는 크게 依存하지 않으며, 背骨型斷面이 Lewis型 斷面보다 多少 큰 값을 갖는다. 左右動搖에 의해서 일어나는 聯成橫搖 모우먼트에 對해서는 斷面 形狀의 영향이 多少 크며, 역시 背骨型斷面이 큰 모우먼트를 發生한다.

2次元柱狀體의 橫波(規則波)中에서의 左右運動應答은 振動數에 따라 거의 線型的으로 減少하며, σ 와 H_0, ξ_d 가 同一한 경우에 斷面形狀의 影響은 거의 없고, H_0, σ, ξ_d 에만 依存한다.

끝으로 本研究은 1973年度 文敎部 學術研究助成費에 의해서 이루어졌으며, 關係機關에 謝意를 表한다.

參 考 文 獻

- [1] Lewis, F.M., "The Inertia of the Water Surrounding a Vibrating Ship," *T.S.N.A.M.E.*, Vol. 37, 1929
- [2] Kim, K.C., "Added Mass for both Vertical and Horizontal Vibration of Two-Dimensional Cylinders of Curvilinear-Element Sections with Chines in a Free Surface", *J. of S. N. A. K.*, Vol.

6, No.1. 1969

- [3] Hwang, J.H. and Kim, Yoon-Ho, "On the Added Mass and Damping of Chine Sections in Heaving Oscillation," *J. of S.N.A.K.*, Vol.10, No.1, 1973
- [4] Tasai, F., "Hydrodynamic Force and Moment produced by Swaying and Rolling Oscillations of Cylinders on the Free Surface", *Report of Research Institute for Applied Mechanics, Kyushu Univ.*, Vol. IX, No.35, 1961

附 錄

1. 左右動搖에 依해서 發生하는 進行波高

自由表面條件 (2)는 (5) 및 $\xi_B = \frac{\omega^2}{g} \cdot \frac{B}{2}$ 에 의해서 다음과 같이 된다.

$$\xi_B \cdot \phi \left[\frac{e^{-\alpha} - a_1 e^{-\alpha} - (2n-1)a_{2n-1} e^{-(2n-1)\alpha}}{1+a_1+a_{2n-1}} \right] \mp \frac{\partial \phi}{\partial \theta} = 0$$

$$\left(\theta = \pm \frac{\theta}{2} \right) \quad (A-1)$$

斷面上的 境界條件(4)는 流量函數 ψ 를 도입하여

$$\left(-\frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right)_{\alpha=0} = U \left(\frac{\partial x}{\partial \alpha} \right)_{\alpha=0} = UM \{ (1-a_1) \sin \theta - (-1)^{n-1} (2n-1) a_{2n-1} \sin (2n-1) \theta \}$$

따라서

$$\psi(\theta)_{\alpha=0} = UM \{ (1-a_1) \cos \theta - (-1)^{n-1} a_{2n-1} \cos (2n-1) \theta \} + C(t) \quad (A-2)$$

여기서 $C(t)$ 는 時間 t 만의 函數이다.

自由表面條件 (A-1)과 反對稱條件 $\phi(\alpha, \theta) = -\phi(\alpha, -\theta)$ 를 滿足하는 (1)의 解를 다음과 같이 생각할 수 있다.

$$\phi_{2l} = A_{2l+1} \left[e^{-(2l+1)\alpha} \sin (2l+1) \theta + \frac{\xi_B}{1+a_1+a_{2n-1}} \frac{e^{-2l\alpha}}{2l} \sin 2l \theta + \frac{a_1 e^{-(2l+2)\alpha}}{2l+2} \sin (2l+2) \theta + (-1)^{n-1} \frac{(2n-1)a_{2n-1} e^{-(2l+2n)\alpha} \sin (2l+2n) \theta}{2l+2n} \right] \frac{\cos \omega t}{\sin \omega t} \quad (A-3)$$

$$(l=1, 2, 3, \dots; n=4, 6)$$

이것에 共軛인 流量函數는

$$\psi_{2l} = B_{2l+1} \left[e^{-(2l+1)\alpha} \cos (2l+1) \theta - \frac{\xi_B}{1+a_1+a_{2n-1}} \frac{e^{-2l\alpha}}{2l} \cos 2l \theta + \frac{a_1 e^{-(2l+2)\alpha}}{2l+2} \cos (2l+2) \theta + (-1)^{n-1} \frac{(2n-1)a_{2n-1} e^{-(2l+2n)\alpha} \cos (2l+2n) \theta}{2l+2n} \right] \frac{\cos \omega t}{\sin \omega t} \quad (A-4)$$

$$(l=1, 2, 3, \dots; n=4, 6)$$

이들의 解는 無限遠에서의 放射條件을 滿足하지 않는다. 따라서 無限遠에서 進行波를 나타내는 函數로서 原點O에 있는 2次元의 水平軸을 가진 doublet을 생

각하다. 그 進行波의 波高를 γ 라고 하면 doublet의 流量函數는 다음과 같다.

$$\psi = \frac{g\gamma}{\pi\omega} \left[\psi_c(K, x(\alpha, \theta), y(\alpha, \theta)) \cos \omega t + \psi_s(K, x(\alpha, \theta), y(\alpha, \theta)) \sin \omega t \right] \quad (A-5)$$

여기서

$$\psi_c(K, x, y) = -e^{-Kx} \cos Ky$$

$$\psi_s(K, x, y) = \pm \pi e^{-Kx} \sin Kx - \int_0^\infty \frac{k \cos ky - K \sin ky}{K^2 + k^2} e^{-kx} dk \quad (A-6)$$

(A-6)式的 複符號中 윗 것은 x 가 陽, 아랫 것은 x 가 陰의 경우다. 結局 無限遠에서의 放射條件까지 滿足하는 流量函數는,

$$\begin{aligned} \left(\frac{\omega\pi}{g\gamma} \right) \psi = & \left[\psi_c(\xi_B, \alpha, \theta) \cos \omega t + \psi_s(\xi_B, \alpha, \theta) \sin \omega t \right] + \\ & \cos \omega t \sum_{l=1}^{\infty} P_{2l}(\xi_B) \left[-e^{-(2l+1)\alpha} \cos(2l+1)\theta - \right. \\ & \frac{\xi_B}{1+a_1+a_{2n-1}} \left\{ \frac{e^{-2l\alpha}}{2l} \cos 2l\theta + \frac{a_1 e^{-(2l-2)\alpha}}{2l+2} \cos(2l-2)\theta \right. \\ & \left. \left. + (-1)^{n-1} \frac{(2n-1)a_{2n-1} e^{-(2l-2n)\alpha}}{2l+2n} \cos(2l-2n)\theta \right\} \right] \\ & + \sin \omega t \sum_{l=1}^{\infty} Q_{2l}(\xi_B) \left[-e^{-(2l+1)\alpha} \cos(2l+1)\theta - \right. \\ & \frac{\xi_B}{1+a_1+a_{2n-1}} \left\{ \frac{e^{-2l\alpha}}{2l} \cos 2l\theta + \frac{a_1 e^{-(2l-2)\alpha}}{2l+2} \cos(2l+2)\theta \right. \\ & \left. \left. + (-1)^{n-1} \frac{(2n-1)a_{2n-1} e^{-(2l-2n)\alpha}}{2l+2n} \cos(2l+2n)\theta \right\} \right] \quad (A-7) \end{aligned}$$

物體表面上의 境界條件 (A-2)와 (A-7)로부터

$$\begin{aligned} \left(\frac{\omega\pi}{g\gamma} \right) \psi(\theta) \Big|_{\alpha=0} = & \psi_{c0}(\xi_B, \theta) \cos \omega t + \psi_{s0}(\xi_B, \theta) \sin \omega t \\ & + \cos \omega t \sum_{l=1}^{\infty} P_{2l}(\xi_B) \left[-\cos(2l+1)\theta - \frac{\xi_B}{1+a_1+a_{2n-1}} \right. \\ & \left. \left[\frac{\cos 2l\theta}{2l} + \frac{a_1 \cos(2l+2)\theta}{2l+2} + (-1)^{n-1} \frac{(2n-1)a_{2n-1}}{2l+2n} \right. \right. \\ & \left. \left. \cos(2l-2n)\theta \right] \right] + \sin \omega t \sum_{l=1}^{\infty} Q_{2l}(\xi_B) \left[-\cos(2l+1)\theta \right. \\ & - \frac{\xi_B}{1+a_1+a_{2n-1}} \left\{ \frac{\cos 2l\theta}{2l} + \frac{a_1 \cos(2l-2)\theta}{2l+2} + (-1)^{n-1} \right. \\ & \left. \left. \frac{(2n-1)a_{2n-1}}{2l+2n} \cos(2l+2n)\theta \right\} \right] = \frac{\omega\pi}{g\gamma} UM \{ (1-a_1) \cos \theta - (-1)^{n-1} a_{2n-1} \cos(2n-1)\theta \} + C \quad (A-8) \end{aligned}$$

여기서 ψ_{c0}, ψ_{s0} 는 (A-6)에서 $\alpha=0$ 을 代入한 값이다.

(A-8)式에서 $\theta = \frac{\pi}{2}$ 로 놓으면 C 가 決定된다. 그 C 값을 다시 (A-8)에 代入하면

$$\left[\psi_{c0}(\xi_B, \theta) - \psi_{c0}\left(\xi_B, \frac{\pi}{2}\right) \right] \cos \omega t + \left[\psi_{s0}(\xi_B, \theta) - \psi_{s0}\left(\xi_B, \frac{\pi}{2}\right) \right] \sin \omega t + \cos \omega t \sum_{l=1}^{\infty} P_{2l}(\xi_B) \left[-\cos(2l+1)\theta - \frac{\xi_B}{1+a_1+a_{2n-1}} \right.$$

$$\begin{aligned} & \left. \left\{ \frac{\cos 2l\theta}{2l} + \frac{a_1 \cos(2l+2)\theta}{2l+2} - (-1)^{n-1} \frac{(2n-1)a_{2n-1}}{2l+2n} \right. \right. \\ & \left. \left. \cos(2l+2n)\theta \right\} - \frac{\xi_B (-1)^{l+1}}{1+a_1+a_{2n-1}} \left\{ \frac{1}{2l} - \frac{a_1}{2l+2} - \right. \right. \\ & \left. \left. \frac{(2n-1)a_{2n-1}}{2l+2n} \right\} \right] + \sin \omega t \sum_{l=1}^{\infty} Q_{2l}(\xi_B) \left[-\cos(2l+1)\theta - \right. \\ & \frac{\xi_B}{1+a_1+a_{2n-1}} \left\{ \frac{\cos 2l\theta}{2l} + \frac{a_1 \cos(2l+2)\theta}{2l+2} - (-1)^{n-1} \right. \\ & \left. \left. \frac{(2n-1)a_{2n-1}}{2l+2n} \cos(2l+2n)\theta \right\} - \frac{\xi_B (-1)^{l+1}}{1+a_1+a_{2n-1}} \left\{ \frac{1}{2l} \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{a_1}{2l+2} - \frac{(2n-1)a_{2n-1}}{2l+2n} \right\} \right] = \left(\frac{\omega\pi}{g\gamma} \right) UM \{ (1-a_1) \cos \theta - (-1)^{n-1} a_{2n-1} \cos(2n-1)\theta \} \quad (A-9) \end{aligned}$$

(A-9)式的 右邊은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\left(\frac{\omega\pi}{g\gamma} \right) UM \{ (1-a_1) \cos \theta - (-1)^{n-1} a_{2n-1} \cos(2n-1)\theta \} = h(\theta) \{ P_0 \cos \omega t + Q_0 \sin \omega t \} \quad (A-10)$$

여기서

$$\begin{cases} h(\theta) = \frac{(1-a_1) \cos \theta - (-1)^{n-1} a_{2n-1} \cos(2n-1)\theta}{1-a_1+a_{2n-1}} \\ P_0 = \frac{-\pi x_0 \xi_B \sin \epsilon}{\gamma} \\ Q_0 = \frac{-\pi x_0 \xi_B \cos \epsilon}{\gamma} \end{cases} \quad (A-11)$$

(A-10)을 (A-9)에 代入하고 $\cos \omega t$ 와 $\sin \omega t$ 의 係數를 各各 比較하여서

$$\left. \begin{aligned} \psi_{c0}(\xi_B, \theta) - \psi_{c0}\left(\xi_B, \frac{\pi}{2}\right) &= \sum_{l=0}^{\infty} f_{2l}(\theta) P_{2l}(\xi_B) \\ \psi_{s0}(\xi_B, \theta) - \psi_{s0}\left(\xi_B, \frac{\pi}{2}\right) &= \sum_{l=0}^{\infty} f_{2l}(\theta) Q_{2l}(\xi_B) \end{aligned} \right\} \quad (A-12)$$

여기서

$$\begin{aligned} f_0 &= h(\theta) \\ f_{2l}(\theta) &= \cos(2l+1)\theta + \frac{\xi_B}{1+a_1+a_{2n-1}} \left[\frac{\cos 2l\theta}{2l} + \right. \\ & \frac{a_1 \cos(2l+2)\theta}{2l+2} + (-1)^{n-1} \frac{(2n-1)a_{2n-1}}{2l+2n} \cdot a_{2n-1} \cos(2l- \\ & \left. 2n)\theta + \frac{(-1)^{l+1} \xi_B}{1+a_1+a_{2n-1}} \left\{ \frac{1}{2l} - \frac{a_1}{2l+2} - \frac{(2n-1)a_{2n-1}}{2l+2n} \right. \right. \\ & \left. \left. (l \neq 0) \right\} \right] \quad (A-13) \end{aligned}$$

(A-12)式的 無限級數의 收斂性을 假定하고 有限項을 取하여 最少自乘法을 써서 P_{2l}, Q_{2l} 을 求한다. P_0 와 Q_0 가 求해지면 (A-11)式으로부터 進行波의 波高와 強制 左右動搖의 振幅의 比인 $\bar{A} = \gamma/x_0$ 가 求해진다.

$$\bar{A} = \frac{\pi \xi_B}{\sqrt{P_0^2 + Q_0^2}} \quad (A-14)$$

II. 附加質量

(A-7)의 共軛인 速度 포텐셜은

$$\begin{aligned} \left(\frac{\omega\pi}{g\gamma} \right) \psi = & \psi_c(\xi_B, \alpha, \theta) \cos \omega t + \psi_s(\xi_B, \alpha, \theta) \sin \omega t \\ & + \cos \omega t \sum_{l=1}^{\infty} P_{2l}(\xi_B) \left[e^{-(2l+1)\alpha} \sin(2l+1)\theta \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{\xi_B}{1+a_1+a_{2n-1}} \left[\frac{e^{-2l\alpha}}{2l} \sin 2l\theta + \frac{a_1 e^{-(2l+2)\alpha}}{2l+2} \right. \\
 & \left. \sin(2l+2)\theta + (-1)^{n-1} \frac{(2n-1)a_{2n-1}}{2l+2n} e^{-(2l+2n)\alpha} \right. \\
 & \left. \sin(2l+2n)\theta \right] \\
 & + \sin \omega t \sum_{i=1}^{\infty} Q_{2i}(\xi_B) \left[e^{-(2i+1)\alpha} \sin(2l+1)\theta + \frac{\xi_B}{1+a_1+a_{2n-1}} \right. \\
 & \left[\frac{e^{-2l\alpha}}{2l} \sin 2l\theta + \frac{a_1 e^{-(2l+2)\alpha}}{2l+2} \sin(2l+2)\theta \right. \\
 & \left. + (-1)^{n-1} \frac{(2n-1)a_{2n-1}}{2l+2n} e^{-(2l+2n)\alpha} \sin(2l+2n)\theta \right] \Bigg\} \quad (A-15)
 \end{aligned}$$

여기서 ϕ_x, ϕ_y 는 原點에 있는 2次元 doublet 에 對한 것이며 다음과 같다.

$$\left. \begin{aligned}
 \phi_x &= -\pi e^{-ky} \sin Kx \\
 \phi_y &= \pm \pi e^{-ky} \cos Kx \pm \\
 & \int_0^{\infty} \frac{K \cos ky + k \sin ky}{k^2 + K^2} e^{-ky} dk \\
 & + \frac{x}{K(x^2 + y^2)}
 \end{aligned} \right\} \quad (A-16)$$

柱狀體表面에 作用하는 動流體力學的 壓力는 다음式에 의해서 계산된다.

$$p = -\rho \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right)_{z=0} \quad (A-17)$$

따라서 x 方向에 作用하는 動流體力學的 힘 F_x 는

$$F_x = \rho B \left(\frac{g\eta}{\pi} \right) (N_0 \sin \omega t - M_0 \cos \omega t) \quad (A-18)$$

여기서 N_0 는

$$\begin{aligned}
 N_0 &= - \int_0^{\pi/2} \phi_{x,0}(\xi_B, a_1, a_{2n-1}, \theta) \\
 & \frac{(1-a_1) \sin \theta + (-1)^n (2n-1) a_{2n-1} \sin(2n-1)\theta}{1+a_1+a_{2n-1}} d\theta \\
 & - \frac{(-1)^n (2n-1) a_{2n-1}}{1+a_1+a_{2n-1}} \cdot \frac{\pi}{4} \cdot P_{2(n-1)} \\
 & - \sum_{i=1}^{\infty} P_{2i}(\xi_B) \frac{\xi_B (-1)^{i-1}}{(1+a_1+a_{2n-1})^2} \left[\left\{ \frac{1}{4l^2-1} - \frac{a_1}{(2l+2)^2-1} \right. \right. \\
 & \left. \left. - \frac{(2n-1)a_{2n-1}}{(2l+2n)^2-1} \right\} (1-a_1) + (2n-1)a_{2n-1} \right. \\
 & \left. \left[\frac{-1}{4l^2-(2n-1)^2} + \frac{a_1}{(2l+2)^2-(2n-1)^2} \right. \right. \\
 & \left. \left. + \frac{(2n-1)a_{2n-1}}{(2l+2n)^2-(2n-1)^2} \right] \right] \quad (A-19)
 \end{aligned}$$

여기서 $\phi_{x,0}, \phi_{y,0}$ 는 (A-16)에서 $\alpha=0$ 을 代入한 값이다. 또 $\phi_{x,0}$ 를 $\phi_{x,0}$ 로 P_{2i} 을 Q_{2i} 로 바꾸어 쓰면 M_0 의 式을 얻는다.

(A-18)로 부터 左右動搖의 附加質量 M_s 를 求하면

$$M_s = 2\rho T^2 H_0^3 \frac{N_0 P_0 + M_0 Q_0}{P_0^2 + Q_0^2} \quad (A-20)$$

여기서 ρ 는 流體의 密度, T 는 吃水, H_0 는 $B/2T$ 이다. 附加質量係數 $K_s = M_s/1/2\rho\pi T^2$ 는 다음과 같이 구해진다

$$K_s = \frac{4}{\pi} \cdot H_0^3 \frac{N_0 P_0 + M_0 Q_0}{P_0^2 + Q_0^2} \quad (A-21)$$

Ⅲ. 橫搖 모우먼트

左右動搖에 의해서 柱狀體에 作用하는 壓力은 左右兩側面에서 符號가 反對이므로 流體力 F_x 外에 橫搖모우먼트가 發生한다. 原點 O 둘레의 모우먼트를 M_R 이라고하면, 反時計方向을 陽이라고 할때

$$M_R = \frac{\rho B^2 g \eta}{\pi} (X_R \sin \omega t - Y_R \cos \omega t) \quad (A-22)$$

여기서

$$\begin{aligned}
 X_R &= \int_0^{\pi/2} \frac{\phi_{y,0}(\xi_B, a_1, a_{2n-1}, \theta)}{(1+a_1+a_{2n-1})^2} \{ a_1 \sin 2\theta \\
 & + (-1)^{n-1} n a_{2n-1} \sin 2n\theta - (-1)^{n+1} (n-1) \\
 & a_1 a_{2n-1} \sin(2n-2)\theta \} d\theta \\
 & + \frac{\pi \xi_B}{8(1+a_1+a_{2n-1})^3} \{ P_2 a_1 + (-1)^{n-1} a_{2n-1} P_{2n} \\
 & - (-1)^{n-1} a_1^2 a_{2n-1} P_{2n-4} \} \\
 & + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{P_{2i}(\xi_B) (-1)^{i+1}}{(1+a_1+a_{2n-1})^2} \left\{ \frac{2a_1}{(2l+1)^2-4} \right. \\
 & \left. + \frac{2n^2 a_{2n-1}}{(2l+1)^2-4n^2} + \frac{2(n-1)^2 a_1 a_{2n-1}}{(2l+1)^2-(2n-2)^2} \right\} \quad (A-23)
 \end{aligned}$$

上式에서 $\phi_{y,0}$ 를 $\phi_{y,0}$ 로, P_{2i} 를 Q_{2i} 로 바꾸어 쓰면 Y_R 의 式이 얻어진다.

(A-22)式의 M_R 을 左右動搖의 加速度와 速度成分으로 나누면

$$M_R = M_{s,p} \left(-\frac{d^2 x}{dt^2} \right) + N_{s,p} \left(-\frac{dx}{dt} \right) \quad (A-24)$$

(A-24)의 右邊의 第一項은 左右動搖에 의해서 發生하는 橫搖慣性 모우먼트, 第二項은 減衰 모우먼트이며 $M_{s,p}, N_{s,p}$ 는 각각 左右動搖 및 橫動搖의 聯成運動의 聯成項이다.

지금 $M_{s,p} = M_s \cdot l_{s,p} = M_s \cdot K_{s,p} \cdot T$ (A-25)로 놓으면 聯成모우먼트의 압 $l_{s,p}$ 의 吃水에 對한 比 $K_{s,p}$ 는

$$K_{s,p} = 2H_0 \left(\frac{P_0 X_R + Q_0 Y_R}{N_0 P_0 + M_0 Q_0} \right) \quad (A-26)$$

$$\text{또 } N_{s,p} \text{ 는 } N_{s,p} = \frac{\rho B^2 w}{2} \left(\frac{P_0 Y_R - Q_0 X_R}{P_0^2 + Q_0^2} \right) \quad (A-27)$$

과 같이 된다. 그런데 左右動搖의 damping N_s 는

$$N_s = \frac{\rho g^2}{\omega^3} \bar{A}^2$$

$$\text{이므로 } N_{s,p} = N_s \cdot T \cdot A_{s,p} \quad (A-28)$$

$$\text{로 놓을 때 } A_{s,p} = \frac{4H_0}{\pi^2} (P_0 Y_R - Q_0 X_R) \quad (A-29)$$

과 같이 된다. $M_{R,i}$ 이 陰이 될 때에는 (A-26), (A-29)의 값은 陰이 된다.