招差法과 古代曆法에서의 그 應用

李　　殷　　晟
仁荷大學校 工科大學 應用物理學科

(1974年 11月 15日 接收)

On the interpolation formula, Chao-ch'a-shu, applied to the Chinese Calendar, Shou-Shih-li

Eun-Sung Lee
Department of Applied Physics, College of Engineering, Inha University

(Received November 15, 1974)

Abstract

The interpolation formula Chao-ch'a-shu devised for the Chinese calendar, Shou-shih-li, has been shown as the one of the 3rd order polynomial. Its 3 coefficients have been determined from the table of the Sun in Shou-shih-li. Its applications to the moon and planets are also briefly mentioned.

1. 緒　　論

七政算內篇은 中國 元代의 授時曆과 明代의 大統曆을 導入하여서 李朝世宗朝에 鄭欽之, 鄭招, 鄭麟趾等이 韓半島의 實情에 맞도록 엮어진 東洋式曆法이다. 이 七政算內篇에 日躔盈縮과 月離遲疾에 관한 立成(表)이 실려 있는데, 이것들은 授時曆法과 大統曆法에서 옮겨온 것이다.

授時曆法은 郭守敬·王恂·許衡이 至元 13年(AD. 1276)부터 精密한 天文觀測을 하고 累代의 曆法을 참조하여서 完成하여 至元 18年에 頒行한 曆法인데, 元明에 걸친 400年間이나 쓰인 善曆이다. 大統曆은 授時曆의 曆元을 變更하고 또 歲實消長法을 폐지하였을 뿐, 거의 全部가 授時曆 그대로를 踏襲하였다. 그러므로 大統曆은 授時曆의 範疇에 屬한다. 授時曆에서는 計算方面에 새로운 考案이 있다. 즉 太陽의 盈縮과 太陰遲疾에 招差法이 使用되었고, 黃赤道 및 黃白道의 變換, 그리고 黃道內外度의 算法에는 球面三角法과 비슷한 方法이 쓰였다는 點이다. 精密한 觀測과 算法의 발달은 授時曆의 權威를 極度로 높여주었다.

授時曆法 制定當時에는 近日點과 冬至點이 一致되어 있다고 본다. 그리고 四正間의 月數도 현대의 것과는 다음表와 같이 若干 다르다.

표 I. 四象의 區分

四　　象	七政算內篇	現 行 曆
冬至→春分(盈初)	88.91	89^d 01^h
春分→夏至(盈末)	93.71	92 20
夏至→秋分(縮初)	93.71	93 14
秋分→冬至(縮末)	88.91	89 19

Kepler의 法則에 의하면 太陽은 近日點에서 가장 빠르고 遠日點에서 가장 더디게 運行한다. 日躔盈縮을 말하려면 太陽의 運行角速度와 中心差(眞太陽과 平均太陽과의 相距度)를 알아보아야 한다. 여기에 平均太陽이라는 것은 冬至點에서 眞太陽과 同時에 出發하여서 黃道上을 東으로 均一한 角速度로 運行하는 假想太陽을 말하는 것이고, 現代天文學에서 말하는 平均太陽과는 다

르다.

太陽의 中心差 E는 現代天文學에서 다음의 式으로 주어진다.

$$E=|\kappa-\kappa_m|\doteqdot 6910''.057\sin g^{2)}$$

이에 λ는 太陽의 眞黃經, λ_m은 平均黃經, g는 太陽의 平均近地點離角(mean anomaly)이다. 中心差가 위와 같이 角의 正弦函數로 나타나지만 授時曆制定當時는 三角函數가 쓰여지지 못하였으므로 二次 또는 三次의 補間式을 쓸수밖에 없었다. 招差法은 三次式의 係數를 決定하기 위하여 考案된 方法이다.

參考로, 授時曆에서는 1年을 365.2425日, 1周天을 365度 25分75秒라 定하여서 平均太陽은 1日에 1度씩 黃道上을 運行하고, 春分點은 歲差運動에 의하여 1年에 1分50秒*3)(角度)씩 西쪽으로 徐徐히 옮겨간다고 하였다.

$$*\ 1分50秒=0.0150度\left(1度=\frac{360^\circ}{365}\right)$$
$$=\frac{360^\circ}{365}\times 0.0150$$
$$=53''.2\ (現代값\ 50''.3)$$

2. 太陽行道의 分析

七政算內篇卷中에는 「太陽冬至(夏至)前後 二象度行」의, 卷上에는 「太陽冬至(夏至)前後盈初縮末限(縮初盈末限)」[4]의 立成(表)이 揭載되어 있다. 이제 간단히 冬至後一象(盈初限)에 限하여 다음과 같이 表로 나타내고 살펴보기로 하겠다.

表 II. 太陽盈縮의 表(冬至後一象)

積日(x)	盈行度	盈加分($\Delta'x$)	盈積(yx)
	度	分	分
0	1.051085	510.8569	0.0000
1	1.050591	505.9183	510.8569
2	1.050096	506.9611	1016.7752
3	1.049598	495.9853	1517.7363
4	1.049099	490.9909	2013.7216
5	1.048597	485.9779	2504.7125
6	1.048094	480.9463	2990.6904
7	1.047589	475.8961	3471.6367
8	1.047082	470.8273	3947.5328
⋮	⋮	⋮	⋮
87	1.001161	11.6161	23997.7407
88	1.000505	5.0593	24009.3568
88.91	1.000000	0.0000	24014.4161

中國에서는 平均太陽은 每日 1度 運行한다고 定하였으므로, 近日點 즉 冬至點以後 春分點까지의 一象에서는 眞太陽은 1日에 1度以上 運行하게 된다. 眞太陽의 1日間의 行度를 盈行度라 말하고, 盈行度와 平均太陽의 行度와의 差를 盈加分이라고 말한다. 盈積은 盈加分을 累加한 것인데, 冬至以後 經過한 날(積日)에서의 平均太陽과 眞太陽과의 角距離 즉 中心差이다.

表 II을 살펴보면 어느 指摘한 積日의 盈加分은 그 前日과 翌日의 두 盈加分의 相加平均보다 0.0093分 만큼 크다는 것을 알게 된다. 즉 積日 x日의 盈加分을 Δ'_x라고 하면

$$\Delta'_x-\frac{\Delta'_{x+1}+\Delta'_{x-1}}{2}=0.0093$$

따라서 $(\Delta'_x-\Delta'_{x-1})-(\Delta'_{x+1}-\Delta'_x)=0.0186$

혹은 $\Delta''_x-\Delta''_{x-1}=-0.0186$

다시 $\Delta'''_{x-1}=-0.0186$

이에 Δ''_x, Δ'''_x는 각각 積日 x日의 盈加分의 差 및 그 差의 差를 意味한다. 이 Δ'''_x가 一定하다는 것은 盈積 y_x가 積日x의 3次式임을 알려준다. 즉

$$y_x=ax-bx^2-cx^3,\quad (a>0,\ b>0,\ c>0)\qquad (1)$$

이에 係數 a, b, c를 각각 定差, 平差, 立差라고 부르고 이것들을 合쳐서 平立定三差라고 말한다. 勿論 現在로서는 Lagrange의 補間式 또는 其他의 方法을 써서 係數a, b, c를 求하겠지만, 授時曆制定當時로서는 그다지 쉬운 일은 아니었다고 본다.

3. 招差法의 實際

大統曆法原에는 一年을 四象으로 구분한 후, 各象을 6段으로 等分하였다. 즉 盈初限 88.92日에서는 各段에 14.82日씩 배당하여 表 III을 揭示하였다[5].

表 III. 招差法의 實際

段 別	段日(x)	積差(y)	日平差 (y/x)	一 差	二 差
	日	分	分	分	分
第1段	14.82	7058.025	476.25	38.45	1.38
第2段	29.64	12976.362	437.80	39.83	1.38
第3段	44.46	17693.7462	397.97	41.21	1.38
第4段	59.28	21148.7328	356.76	42.59	1.38
第5段	74.10	23279.997	314.17	43.97	1.38
第6段	88.92	24026.184	270.20		

表Ⅳ. 一差, 二差의 表現

段	積　日	積　差	日平差	一　差	二　差
1	x_1	y_1	y^{I}/x_1	$\frac{y_1}{x_1}-\frac{y_2}{x_2}$	$\left(\frac{y_2}{x_2}-\frac{y_3}{x_3}\right)-\left(\frac{y_1}{x_1}-\frac{y_2}{x_2}\right)$
2	x_2	y_2	y_2/x_2	$\frac{y_2}{x_2}-\frac{y_3}{x_3}$	$\left(\frac{y_3}{x_3}-\frac{y_4}{x_4}\right)-\left(\frac{y_2}{x_2}-\frac{y_3}{x_3}\right)$
3	x_3	y_3	y_3/x_3	$\frac{y_3}{x_3}-\frac{y_4}{x_4}$	$\left(\frac{y_4}{x_4}-\frac{y_5}{x_5}\right)-\left(\frac{y_3}{x_3}-\frac{y_4}{x_4}\right)$
4	x_4	y_4	y_4/x_4	$\frac{y_4}{x_4}-\frac{y_5}{x_5}$	$\left(\frac{y_5}{x_5}-\frac{y_6}{x_6}\right)-\left(\frac{y_4}{x_4}-\frac{y_5}{x_5}\right)$
5	x_5	y_5	y_5/x_5	$\frac{y_5}{x_5}-\frac{y_6}{x_6}$	
6	x_6	y_6	y_6/x_6		

但 $x_1=\frac{x_2}{2}=\frac{x_3}{3}=\frac{x_4}{4}=\frac{x_5}{5}=\frac{x_6}{6}$

大統曆法原에는 다음의 文章이 실려있다. 이 原文에는 具體的인 數値가 挿入되어 있지만, 一般化하여 적어놓겠다.

置第一段日平差爲汎平積, 以第一段二差去減第一段一差爲汎平積差, 分置第一段二差折半爲立積差, 以汎平積差加入汎平積爲定差, 以汎立積差去減汎平積差, 餘爲實以段日爲法除之爲平差, 置汎立積差爲實, 以段日爲法除二次爲立差.

이 文章에서 段日이라는 것은 各段의 積日을 말한다. 이제 第1段, 第2段, 第3段의 段目을 각각 x_1, x_2, x_3라고 하면

$$x_2=2x_1,\quad x_3=3x_1$$

의 關係가 있다. 또 積差는 各段의 盈積을 말하는데, 이것이 眞太陽과의 相距度, 즉 中心差이다. 日平差는 積差를 그 段의 段日로 除한 값이므로 冬至後 積日동안의 平均中心差를 의미한다. 一差는 日平差의 差이고, 二差는 一差의 差이다.

위에 적힌 原文의 內容은 招差法을 써서 平立定三差를 求하는 公式인데, 그 數學的理論은 全然 보여주지 않고 있으니, 이 論文에서 그 根據를 밝혀 보려한다. 積日과 積差를 각각 x_i, y_i라 하면 다음과 같은 表가 얻어진다.

大統曆法原의 原文을 위의 記號로 나타내면

第一段段日 x_1, 汎平積 y_1/x_1

第一段一差 $\frac{y_1}{x^{I}}-\frac{y_2}{x_2}$, 第一段二差 $\left(\frac{y_2}{x_2}-\frac{y_3}{x_3}\right)-\left(\frac{y_1}{x_1}-\frac{y_2}{x_2}\right)$

汎平積差 $\left(\frac{y_1}{x_1}-\frac{y_2}{x_2}\right)-\left\{\left(\frac{y_2}{x_2}-\frac{y_3}{x_3}\right)-\left(\frac{y_1}{x_1}-\frac{y_2}{x_2}\right)\right\}$

汎立積差 $\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{y_2}{x_2}-\frac{y_3}{x_3}\right)-\left(\frac{y_1}{x_1}-\frac{y_2}{x_2}\right)\right\}$

또,

$$定差\ a=\left(\frac{y_1}{x_1}-\frac{y_2}{x_2}\right)-\left\{\left(\frac{y_2}{x_2}-\frac{y_3}{x_3}\right)-\left(\frac{y_1}{x_1}-\frac{y_2}{x_2}\right)\right\}+\frac{y_1}{x_1} \tag{2}$$

$$平差\ b=\frac{1}{x_1}\left\{\left(\frac{y_1}{x_1}-\frac{y_2}{x_2}\right)-\left(\frac{y_2}{x_2}-\frac{y_3}{x_3}\right)-\left(\frac{y_1}{x_1}-\frac{y_2}{x_2}\right)\right\}-\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{y_2}{x_2}-\frac{y_3}{x_3}\right)-\left(\frac{y_1}{x_1}-\frac{y_2}{x_2}\right)\right\} \tag{3}$$

$$立差\ c=\frac{1}{2x_1^2}\left\{\left(\frac{y_2}{x_2}-\frac{y_3}{x_3}\right)-\left(\frac{y_1}{x_1}-\frac{y_2}{x_2}\right)\right\} \tag{4}$$

이들의 式의 右邊은 모두 1, 2, 3段의 日平差를 擇하여 表現하였는데, 日平差의 差는 반드시 1段과 2段 또는 2段과 3段과의 差를 이용하였고, 1段과 3段과의 差를 이용한 것은 아니다. 즉 前段에 이어서 後段과의 두 日平差의 差, 또는 그 差의 差를 썼다는 데에 注目된다. 이런 方法으로 定平立의 三差를 求하는 方法을 招差法이라고 말한다.

원래 式(1)은 定差, 平差, 立差가 알려졌을 때 積日 x를 變數로 하는 盈積 y_x를 求하는 公式이지만 우리는 逆으로 觀測値 x, y_x를 주고, 三差를 求하자는데에 目標를 둔다. 이제 3段까지의 觀測値를 使用하면

$$\begin{pmatrix} 1 & -x_1 & -x_1^{2} \\ 1 & -x_2 & -x^{2}_{2} \\ 1 & -x_3 & -x_3^{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{y_1}{x_1} \\ \dfrac{y_2}{x_2} \\ \dfrac{y_3}{x_3} \end{pmatrix} \tag{5}$$

$$但\ x_1 = \frac{x_2}{2} = \frac{x_3}{3}$$

가 된다. 따라서 이것을 풀어서 얻는 a, b, c의 값은 式 (2), (3), (4)와 완전히 一致되어 大統曆法原의 原文이 理論的으로 正確하다는 것이 證明되었다. 이제 第1段 1差, 第1段 2差 및 第1段日平差를 각각 Δ'', Δ''' 및 Δ'라고 하면

$$\left.\begin{aligned} a &= \Delta'' - \Delta''' + \Delta' \\ b &= \frac{1}{2x_1}(2\Delta'' - 3''') \\ c &= \frac{1}{2x_1^{2}}\Delta''' \end{aligned}\right\} \tag{5$'$}$$

로 간단히 된다.

太陽盈初限에서 第1段에서 얻어진 값 $\Delta' =$ 476.25分, $\Delta'' =$ 33.45分, $\Delta''' =$ 1.38分 및 $x_1 =$ 14.82日을 위의 式에 代入하면

$a =$ 513.32分/日, $b =$ 2.4548分/日^2, $c =$ 0.00312分/日^{3}이 얻어진다.

이 값은 太陽盈縮을 實測한 값에 근거를 두었다고 한다.

前記의 式 (2)(3)(4)는 第1段, 第2段, 第3段의 日平差를 써서 表現하였기 때문에 第一段만의 一差와 二差로 表現할 수 있었다.

招差法에서 積日을 1日間隔으로 擇하지 않고, 약 2週의 間隔을 두고 計算하였는데, 이는 日平差와 그 差의 差가 너무 작아지면 誤差가 커질 염려가 있을 것을 避하기 위함이다.

이제까지는 盈初限에 대하여 招差法을 써왔지만, 式 (8)은 冬至前一象, 즉 縮末限에 그대로 適用된다. 盈末限과 縮初限, 즉 夏至前後二象에 대하여도 똑같은 方法으로 定平立의 三差가 求하여지는데, 이 경우에는 一象의 積日 93.72日을 6段으로 하고 따라서 每段을 15.62日로 하여 定差 476.06分/日 平定 2.21分/日^2 立差 0.0027分/日^{3}을 얻는다.

4. 太陰에의 招差法의 利用

太陰은 1近點月을 週期로 하여 月行遲疾이 反覆된다. 授時曆에서는 近點月이 27.5546日이었는데, 이 期間을 336限으로 정하였다. 따라서 1象은 84限이다. 月行遲疾에 招差法을 쓰기 위하여 每象을 7段으로 區分하고 每段에 12限을 配當하였다.[6] 그리하면

1限＝0.0820日，1日＝12.194限

1象＝84限＝6.88865日

로 된다. 달은 天球上을 每日 平均 13°.36875 運行하므로, 1限이라는 期間동안에는 1°.0963만큼 移動한다. 이 값을 달의 限平行度라고 부른다.

七政算內篇卷上에 「大陰限數遲疾度」라는 立成이, 限數順으로 初限부터 168限까지의 遲疾曆率損益分, 遲疾度, 疾曆限行度, 遲曆限行度가 적혀있다. 이 表도 大統曆法과 新元史의 曆志에 실려있는 것을 옮겨쓴 것이다. 이中에서 遲疾度(遲疾積度)는 眞太陰과 平均太陰과의 相距度, 즉 中心差이다. 太陰遲疾에 招差法을 쓰기 위하여 各段의 最終限(x) 즉 12, 24, 36, 48, 60, 72, 84限에 대한 遲疾度(y)를 表Ⅲ을 본따서 적어놓고, 限平差(y/x) 一差, 二差를 계산하여 앞에서와 같이 招差法을 쓰면 定差·平差·立差가 얻어진다. 이에 의하면 太陰遲疾의 경우에는 定差 11.11分/限, 平差 0.281分/限^2, 立差 0.000325分/限^{3}이 얻어진다.

이 招差法은 五星의 運行에도 利用되었다.

5. 結　　論

招差法은 一元三次方程式의 係數를 求하기 위하여 創案된 方法이다. 元來 授時曆의 編纂에 功이 컸던 사람은 許衡·王恂·郭守敬의 三人이다. 許衡은 古今의 曆理에 밝고 王恂은 算法의 妙를 가지고 있었으며 郭守敬은 器械의 製作에 能하고 觀測을 담당하였다. 王恂[7]은 至元 19年에 四十七歲로 死亡하였는데, 그 前年에 頒行한 授時曆은 立成(表)이 整理되지 못하였으므로, 郭守敬이가 編纂한 것으로 되어 있지만, 王恂의 數理的 創意가 없다고 斷言할 수는 없다.

一元高次方程式이 未知係數를 求한다는 것은 多元一次聯立方程式을 푼다는데에 歸着된다. 當時로서는 이解法이 용이한 일이 아닐뿐 아니라 一般化한 解法을 얻기가 어려웠다. 郭守敬이 變數(x : 段日)을 等間隔으로 區分하여서 이것에 招

差法을 考案利用하였다는 것은 좋은 着眼이다. 梅氏曆算全書에 「旣句分六段矣, 又以後段連前段, 何也, 曰此所謂招差也」[8]라고 한 것은 招差가 무엇인가를 알려준다.

授時曆以前까지의 曆法에서는 相減相乘法이라 하여 $ax(b-x)$로 表現되는 補間法이 쓰여져 왔다. 相減相乘法은 九世紀末 唐代에 편찬된 崇玄曆에서 그 撰者 邊岡이 使用한 것인데[9], 唐代까지의 補間에서는 二次까지의 式이 쓰였지만, 授時曆에 와서 三次式의 補間式[10]으로 發展하게 되었다는 것은 招差法에 의한 바 크고 또 天文學史上뜻 깊은 일이다.

參 考 文 獻

1) 元史卷 164 郭守敬傳 所創法凡五事條.
2) 教理天文學 渡邊敏夫著 p. 383
3) 七政算內篇卷上 日行諸率條.
4) 新元史卷之四十 曆志七, 明史卷三十四 大統曆法立成에서 옮겨왔음.
5),6) 明史卷三十三 曆三. 大統曆法 法原
7) 元史卷 164, 王恂傳
8) 梅氏曆算全書 卷19, 授時平定三差詳說條
9) 唐書卷三十下 志二十
10) 宋元時代の科學技術史 藪內清著 p. 72