單位換算과次元解析

Conversion of Unit and Analysis of Demension

韓 乙 出 ※
Ul Chool Han

1. 緖 言

日常生活에 있어 우리가 使用하고 있는 物理學上의 量 즉 長, 面積, 容積, 重量, 等은 政府 및 國際的 方針에 따라 메타法으로 統一的으로 使用되어야 하겠지만 從前의 習性, 外國과의 貿易 및 科學技術, 文化交流 等의 關係로 因하여 아직까지 多樣하게도 尺貫法, 피트—파운드 法 等을 混用하고 있는 實情이다. 理論公式에 있어서는 別로 單位에 神經을 쓰지 않지만 實驗公式, 實用公式에 있어서는 單位가 매우 중요하며 特히 實驗公式의 係數, 常數 等은 그 單位가 確然치 않기 때문에 單位換算에 있어 錯覺하기 쉽고 計算이 매우 複雜하기 때문에 이에 關한 一般的解法을 例示하면서 간단히 설명하여, 試驗, 硏究事業에 從事하는 사람 뿐만 아니라 技術者의 參考에 供하고저 하는 바이다. 또 이에 附加하여, 工學에 널리 利用되고 있는 次元解析과 그의 應用에 關하여 略述하고저 한다.

2. 基本槪念

單位(Unit); 單位라는 말은 普通 두가지 意味로 使用되고 있다. 그 하나는 單一의 1을 意味하는 것이며, 또 다른 하나는 物量의 單位로서의 單位를 말하는 것이다. 여기서는 主로 後者의 것을 說明하고저 한다. 實社會生活에 있어 使用되고 있는 單位는 그 種類로서 例를 들면 物理學上의 單位, 化學上의 單位, 貨幣의 單位, 商品去來上의 單位 等으로 許多하겠지만 結果的으로 ① Dimension을 가지지 않는 單位(無次元 單位 또는 無名數)와 ② Dimension을 가지는 單位(有次元 單位 또는 有名數)의 두가지로 大別할 수 있다.

① 無次元 單位

이것은 同種의 量의 比의 값으로서 所謂 無名數인 만큼 單位 呼稱이 없어야 하는데 實用的인 所謂 呼稱單位가 使用되고 있다. 例를 들면 句配에 있어 percent(%), millipercent(%), X割Y分, 角度에 있어 radian(孤度法), 公害問題에 있어 p.p.m等이다. 이와같은 無次元 單位 卽 無名數에 있어서는 單位換算은 必要없는 것이며, 다만 計算時에 있어 小數點만 考慮하면 되는 것이다.

② 有次元 單位

單位換算은 여기에만 해당되는 것이다. 이 有次元 單位 表示法에는 次元式과 非次元式의 두가지가 있으며, 非次元式은 간단하나 막연한 경우가 많다. 例를 들면 單尺 메타 單位, 尺貫單位 等과 같다. 이러한 境遇의 단위 환산은 Dimension의 힘을 利用하는 수 밖에 없다. Dimension을 求하는 目的의 하나도 여기에 있는 것이다.

③ 次元(Dimension)

次元이란 말도 보통 두가지 의미로 使用되고 있다 그하나는 치수(寸法), 크기를 意味하는 것이며, 다른 하나는 物理學 單位의 次元 또는 元을 말한다.

卽 어떤 量, 또는 單位의 次元이라 함은 그 量 또는 單位가 包含한 基本단위에 對한 指數를 말하는 境遇도 있고 基本單位와 指數가 結合된 것 卽 抽象的인 誘導單位를 말하는 수도 있다.

3. 基本單位(Fundamental Unit)와 誘導單位(DerivedUnit)

物理學上의 量(Q)을 測定한다는 것은 이와 同種의 單位量(q)에 對한 比 n을 구하는 것이며 이比 n을 量(Q)의 값이라 한다. 〔Q〕〔q〕 및 n 間에는 다음과 같은 關係가 있다. $\frac{[Q]}{[q]}=n$, $[Q]=n\cdot[q]$. 物理學上의 量을 測定한 單位量은 부여된 量과 同種이라야 하므로 여러가지 物理學上의 量에 對해서는 여러가지 單位量을 定할 必要가 있겠으나 各種 單位量間에 共通되고 基本的인 것만 定해 놓으면 其他는 이로부터 誘導할 수 있는 것이다. 이 共通 基本的인 單位量을 基本單位, 其他를 誘導單位라 한다. 例를 들면 面積은 길이의 平方이며, 容積은 기리의 立方이

※ 中央 技術 審査 委員會

므로 面積, 容積의 單位는 길이의 單位로 表示할 수 있다. 이때 길이의 單位는 基本單位이며 面積 容積의 單位는 誘導單位이다. 基本單位로서는 必要에 따라 任意로 定할 수 있겠지만 보통 사용되고 있는 물리학상의 기본차원 길이(Length), 質量(Mass), 時間(Time) 또는 길이(Length), 힘(Force), 시간(Time)에 따라 여러가지가 있으며 其他 物理學上의 單位는 이 基本單位로 부터 誘導(組立)할 수 있다. 그리고 이 基本 單位의 次元을 [L] [M] [T] 또는 [L] [F] [T]로서 表示하며 다른 量의 次元은 이 들로 부터 유도된다. 즉 面積은 $[A]=[L^2]$, 容積은 $[V]=[L^3]$, 速度는 $\frac{거리}{시간}=\frac{[L]}{[T]}=[LT^{-1}]$, 速度는 $\frac{質量}{容積}=\frac{[M]}{[L^3]}=[ML^{-3}]$, 句配는 $\frac{길이}{길이}=\frac{[L]}{[L]}=L^0$, 角度(radian)는 $\frac{길이}{길이}=[L^0]$이다.

4. 單位 換算

일반적으로 어떤 공식이든 變數와 係數를 包含하고 있다. 다른 단위의 수치를 代入하면 그 변수가 無次元의 量이 아닌 相異한 값을 갖이게 된다. 特히 단위 환산에 있어서 주의할 사항은 공식에 포함되어 있는 係數이다. 係數와 常數가 一定하다는 개념은 單位를 固定시켜놓고 변수가 변할 때의 이야기지 단위가 변환될 때는 無次元이 아닌 이상 단위 환산의 영향을 받는다. 공식의 단위 환산은 실로 이 係數, 常數 등의 단위 환산 만을 의미하는 것이며, 公式에 있어서 係數, 常數 등은 그 단위가 不明할 경우가 많기 때문에 次元方程式에 依하여 그 次元을 求하고 次元을 利用하여 단위 환산을 하는 것이다. 단위 환산의 방법을 순서적으로 나타내면 다음과 같다.

(1) 變數의 次元整理

(2) 係數 또는 常數등은 일단 次元을 갖인 量으로 생각하여 C_i로 表示하고 그의 次元을 $[C_i]=[M^x, L^y, T^z]$로 나타낸다.

(3) 旣知 또는 未知量의 次元을 公式에 代入하여 次元方程式을 作成하고 未知量의 次元을 求한다.

(4) 係數에만 次元에 相應하는 單位換算을 수행하여 그 환산치를 公式에 代入한다.

例題 1. Francis의 공식 $Q=3.33BH^{3/2}$ (尺—秒單位)를 m-sec 단위로 고쳐라.

① 變數의 次元整理

$[Q]=[L^3T^{-1}]$, $[B]=[L]$, $[H^{3/2}]=[L^{3/2}]$

② 係數의 次元表示

저금 係數 3.33을 C로 代置하고

$[C]=[M^xL^yT^z]$라고 하자.

③ 次元方程式에 依한 未知量의 次元決定.

Francis 公式의 次元方程式은

$[L^3T^{-1}]=[M^xL^yL^z][L][L^{3/2}]$

M: $O=X+O+O \therefore X=O$

L: $3=Y+1+3/2 \therefore Y=1/2$

T: $-1=Z+O+O \therefore Z=-1$

이 結果에서 C의 次元은 $[C]=[M^0L^{1/2}T^{-1}]=[L^{1/2}T^{-1}]$이다.

5. 單位 換算

$$C=3.33(R^{1/2}=3.33\left\{\left(\frac{1}{3.3}m^1\right)^{1/2}\Big\backslash sec\right\}=\frac{3.33}{\sqrt{3.3}}$$

$=1.834m^{1/2}/sec$

이것을 公式에 代入하면 m-sec 單位로 환산된 Franas 公式이 求해진다. 즉

$Q=1.834BH^{3/2}$(m-se) 單位

6. 次元解析과 그의 應用

우리는 硏究結果에 依하여 이미 開發된 많은 公式을 工學的 問題의 分析에 利用하고 있으며 또 새롭고 便利한 公式을 考案해낼려고 硏究하고 있다.

이와같은 公式들은 한가지 理象에 包含되는 여러 變數사이의 關係를 函數關係로 表示하는 것이다. 公式을 開發하는데는 여러가지 方法이 있겠지마는 그 중에서 가장 유용한 方法의 하나로서 「工學的 相似理論」(Similitude in Engineering)을 適用하는 方法이다. 가장 基本이 되는 것이 버킹함(Buckingham)의 "定理"이므로 이것을 여기에 紹介한다.

一般으로 어떤 測定可能量(二次量) α는 二次量에 영향을 주는 一次量에 依하여 다음과 같이 表示된다

$\alpha=f(a_1, a_2, a_3, \cdots\cdots, a_n)\cdots\cdots(1)$

여기에서 $a_1, a_2,, \cdots\cdots a_n$은 α에 영향을 주는 一次量들이다. (1)式은 多少 複雜한 數學的 過程을 通하여 다음 式으로 表示된다.

$\alpha=c_\alpha a_1^{c_1}a_2^{c_2}a_3^{c_3}\cdots\cdots a_n^{c_n}\cdots\cdots(2)$

여기서 c_α는 無次元의 係數이고 $c_1, c_2, \cdots\cdots c_n$은 常數이다.

例를들면 α를 停止狀態에서 自由落下하는 物體의 運動距離라고 하면 그것은 經過時間과 重力加速度로서 表示될수 있다.

$S=c_\alpha g^{c_1}t^{c_2}\cdots\cdots(3)$

널리 알려진 理論公式은 $S=\frac{1}{2}gt^2$ 이므로 이경우 $c_\alpha=\frac{1}{2}$, $c_1=1$, $c_2=2$이다.

지금 一二次量을 同時에 取扱하면 (1)式은 $c_\alpha a_1^{c_1}a_1^{c_2}a_3^{c_3}\cdots\cdots a_n^{c_n}=1\cdots\cdots(4)$ 로되고 이에 相當하는 次元方程式(dimemensional

Equation)은 다음과 같다.

$$(d_1^{x_{11}},\ d_2^{x_{21}},\ d_3^{x_{31}},\cdots\cdots,\ d_b^{x_{b1}})^{c_1}\ (d_1^{x_{12}},\ d_2^{x_{22}}, d_3^{x_{32}}, d_b^{x_{b2}})^{c_2}\ (d_1^{x_{13}},\ d_2^{x_{23}},\ d_3^{x_{33}},\cdots\cdots, d_b^{x_{b3}})\cdots\cdots(d_1^{x_{1n}},\ d_2^{x_{2n}}, d_3^{x_{3n}},, d_b^{x_{bn}})^{c_n}=0\cdots\cdots(5)$$

여기서 d_i 項은 包含되는 基本次元이고 b는 基本次元의 數이다.

이 (5)式은 b個의 補助方程式(Auxiliary Equation)으로 分解할 수가 있다.

$$\left.\begin{array}{l} x_{11}c_1+x_{12}c_2+\cdots+x_{1n}c_n=0 \\ x_{21}c_1+x_{22}c_2+\cdots+x_{22}c_n=0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_{b1}c_1+x_{b2}c_2+\cdots+x_{bn}c_n=0 \end{array}\right\}\cdots\cdots(6)$$

이 b個의 聯立線型方程式은 n個의 未知數를 包含하지만 이 未知數中의 b個를 나머지 (n−b)個의 未知數를 表示할 수가 있다.

이 過程은 選定된 b個 未知數의 係數로서 形成되는 行列式이 零이 되지 않으면 可能하다. 卽(n−b)項들이 常數로서 取扱되면 結果的으로 나타나는 b個의 方程式은 獨立的이 되어야 한다.

그러므로 (4)式에서의 b의 指數들은 (6)式에서 얻어진 값들로 代置될수있고 (4)式은 (n−b)個의 未知의 指數를 갖게 될 것이다.

같은 指數를 갖는 項들끼리 모으면 各項들은 無次元이 된다. 왜냐하면 (6)式은 (5)式이 無次元이 되도록 세워졌기 때문이다. 또 無次元의 項數도$(n-b)$個가 됨을 쉽게 알수있다.

이와같이 하여 形成된$(n-b)$個의 無次元의 項을 $\pi_1,\ \pi_2,\cdots\cdots,\ \pi_{n-b}$라고 하면 (4)式은 다음과 같이 表示된다.

$$\pi_1=F(\pi_2,\pi_3,\cdots\cdots\pi_{n-b})\cdots\cdots(7)$$

이것이 "바킹함의 π정리"이다.

즉 "바킹함의 π정리"는 어느 現象內에 包含되는 變數들 사이의 關係를 記述하는데 必要한 無次元의 獨立變數의 數는 現象內에 包含되는 總變數에서 그들 變數에 包含되어 있는 基本次元數를 뺀것과 같다는 것이다.

7. π 項의 決定方法

π 項에 있어서 制限事項은 各項들이 無次元이고 獨立이어야 한다는 것이다.

적절한 π항의 集合을 決定하는데는 몇가지 절차가 적용되지만 다음과 같은 過程을 밟는 것이 좋다.

(1) 補助次元方程式을 세우고

(2) 未知의 指數들中에서 $(n-b)$個에 任意의 數値를 定하고

(3) 이 結果로서 나타나는 聯立方程式을 푼다음

(4) 그 結果를 綜合하여 π項을 形成하고

(5) $(n-b)$個의 π項들이 決定될때까지 (2)에서 (4)까지의 過程을 反復한다.

(6) 그結果들을 (7)式과 같은 形態로 바꾼다.

例題 2. 球를 初速度v로 落下시켰을때 七時間後의 落下距離s에 關한 無次元方程式을 만들어 보기로 한다. 이때 落下時의 流體抵抗도 考慮하기로 한다.

지금 媒介流體의 密度를 ρ, 粘性을 μ, 球의 盲徑과 質量을 各各 d와 m으로 表示하면 이 現象은 다음과같이 表示할 수 있다.

$$S=f(g,v,t,m,d,\rho,\mu)\cdots\cdots(8)$$

또 (8)式은 다음과 같이 고쳐 쓸 수가 있다.

$$C_\alpha s^{c_1}g^{c_2}v^{c_3}t^{c_4}m^{c_5}d^{c_6}\rho^{c_7}\mu^{c_8}=1\cdots\cdots(9)$$

(9)式의 次元方程式은

$$L^{c_1}(LT^{-2})^{c_2}(LT^{-1})^{c_3}T^{c_4}M^{c_5}L^{c_6}(ML^{-3})$$
$$(ML^{-1}T^{-1})^{c_8}=0\cdots\cdots(9-1)$$

(9−1)式으로 부터 다음 3개의 補助方程式을 얻을수가 있다.

$$M: C_5+C_7+C_8=0\cdots\cdots(9-2)$$
$$L: C_1+C_2+C_3+C_6-3C_7-C_8=0\cdots\cdots(9-3)$$
$$T: -2C_2-C_3+C_4-C_8=0\cdots\cdots(9-4)$$

3個의 方程式에서 8個의 未知數를 풀어야 하므로 8個의 未知數中에서 5個의 未知數에 任意의 값을 代入하여야만 한다.

여러가지로 選擇할 수가 있으나 例로서 C_1, C_2, C_6, C_7, C_8의 5個의 未知數를 擇하면 나머지항(C_3, C_4, C_5)들의 係數의 行列式은 다음과 같이 된다.

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix}=1$$

이行列式의 값이 零이 아니므로 이 方程式들은 獨立이고 위에서와 같이 未知數를 擇한것은 타당성이 있다.

任意로 5個의 未知數에 주어진 값은 $C_1=1$, $C_2=0$, $C_6=0$, $C_7=0$, $C_8=0$ 이고 이 값들을 (9−2), (9−3), (9−4) 式등에 代入하면

$$C_5=0\cdots\cdots\cdots\cdots(9-5)$$
$$1+C_3=0\cdots\cdots(9-6)$$
$$-C_3+C_4=0\cdots\cdots(9-7)$$

이 되며 위의 세식에서 $C_3=-1$, $C_4=-1$, $C_5=0$이 얻어진다.

이들 값과 (9)式으로부터 C_α는 除去하고

$$\pi_1=\frac{s}{vt}\cdots\cdots\cdots\cdots(9-8)$$

인 無次元의 項이 만들어 진다.

π정리로부터 任意로 擇한 未知數의 數와 같은 5個의 π항들이 決意되어야 함을 알수있고 다른項들은 選擇한 5個의 指數들中에서 다른 指數에 任意의 값

을 주므로써 決定할 수가 있다.

예를 들면 $C_1=0$, $C_2=1$, $C_6=0$, $C_7=0$, $C_8=0$이 되고 이값들을 聯立方程式에 代入하여 풀면 다음과 같은 값이 얻어진다.

$C_3=-1$, $C_4=1$, $C_5=0$

그러므로 $\pi_2=\frac{gt}{v}$ ……(9—9) 이 되고 다른 π項은 $C_6=1$로 놓고 다른 指數를 零으로 놓으면 $\pi_3=\frac{d}{vt}$ ……(9—10)이 된다. 같은 方法으로 다른 2個의 獨立π項 卽 C_7, C_8도 交代로 1로 놓고 다른 指數들을 零으로 놓으면 다음과 같은 式들이 얻어진다.

$$\pi_4=\frac{\rho v^3t^3}{m} \cdots\cdots (9-11)$$

$$\pi_5=\frac{\mu t^2 v}{m} \cdots\cdots (9-12)$$

그러므로 一般解는 다음과 같이 쓸수가 있다.

$$\frac{s}{vt}=F\left(\frac{gt}{v},\ \frac{d}{vt},\ \frac{\rho v^3t^3}{m},\ \frac{\mu t^2v}{m}\right)\ (9-13)$$

例題에서 보여준 過程에 依해서 決定되는 π項들은 가끔 더 간단하게 調整될 수도 있는데 例를들면 π_4와 π_5는 다른 3個의 π項들 보다 若干 複雜하다. 그래서 새로운 π項을 求하는데는 π_4와 π_5를 利用해서 다음과 같이 求할 수가 있다.

$$\pi_6=\frac{\pi_4}{\pi_5}=\frac{\rho v^2 t}{\mu} \cdots\cdots (9-14)$$

같은 方法으로 새로운 π項을 求하는데는 π_4나 π_5 대신에 π_3와 π_6를 組合해서 求할 수가 있다.

$$\pi_7=\pi_3\pi_6=\frac{\rho v d}{\mu} \cdots\cdots (9-15)$$

이들을 代入하면 (9)式은

$$\frac{s}{vt}=F_1\left(\frac{gt}{v},\ \frac{d}{vt},\ \frac{\rho v^3t^3}{m},\ \frac{\rho v d}{\mu}\right)\cdots (9-16)$$

이 된다.

또 π_8을 π_4로 나타내면

$$\pi_8=\pi_3{}^3\pi_4=\rho\frac{d^3}{m} \cdots\cdots (9-17)$$ 이 되고

π_9를 π_3으로 表示하면

$$\pi_9=\pi_2\pi_3=\frac{gd}{v^2} \cdots\cdots (9-18)$$ 이 된다.

이와같은 結果 다음式이 얻어지게 된다.

$$\frac{s}{vt}=F_2\left(\frac{gt}{v},\frac{gd}{v^2},\frac{\rho d^3}{m},\frac{\rho v d}{\mu}\right)\cdots\cdots (9-19)$$

여러가지 變形이 있을수 있으나 앞의 例들은 傳統的인 過程을 밟은 例이며 π項들의 唯一한 條件은 그것들이 無次元이고 獨立이라는 事實에 注意할 必要가 있다.

8. 函數關係의 決定

π定理를 包含한 次元解析의 方法은 어떤 現象에 包含되는 여러 變數를 綜合하여 無次元으로 表示된 量들의 函數關係를 一般的으로 表示하였을뿐 이들 無次元의 量(π項)들 사이의 具體的인 關係까지는 求할수 없다. 이들의 具體的인 關係은 一般的으로 實驗 또는 觀測을 通하여 分析되며 實用公式으로 만들어 지는 것이다.

次元解析方法의 主要한 利用은 여러 變數를 π項으로 묶었으므로 實驗에서 調査해야할 變數들의 數를 줄일수 있다는 點과 便利한 無次元의 變數를 數式化하는데 있는 것이다.

π項사이의 關係를 數式化하는 가장 보편적인 方法은 우선 π項中 하나의 π項以外의 모든 π項을 固定시켜 놓고 獨立變數로 잡은 그 π項이 變할때의 從屬變數로서의 π_1이 어떻게 變하는가 하는 것을 實驗的으로 決定한다. 이方法을 다른 π項들에 對하여 反復한다.

이와같이 하여 얻어진 π_1과 다른 π項들의 個別的인 函數關係를 다음에서 說明하는 方法으로 合成하는 것이다. 여기에서는 곱으로 表示되는 函數關係 하나만을 說明한다.

9. 곱으로 表示되는 函數의 條件

萬若 3個의 π項이 어떤 現象에 包含되어 있다고 생각한다면 다음과 같이 表示할 수가 있다.

$$\pi_1=F(\pi_2,\pi_3) \cdots\cdots (10)$$

π_3가 常數가 되도록 固定시켜 놓고 π_2를 變換시키면서 實驗을 계속하여 π_2에 對한 π_1의 關係를 다음과 같이 얻을 수가 있다.

여기서 Bar(—)는 常數値를 表示한다.

$$(\pi_1)_{\bar{3}}=f_1(\pi_2,\bar{\pi}_3) \cdots\cdots (11)$$

또 π_2를 常數로 놓고 π_3를 變數로 取扱하여 實驗을 계속하여 π_1과 π_2와의 關係를 나타내면 다음과 같다.

$$(\pi_1)_{\bar{2}}=f_2(\bar{\pi}_2,\pi_3) \cdots\cdots (12)$$

이와같이 함수 내에 있는 π項中에서 어느하나를 除外한 모든 π項을 常數로 놓고 求하여진 方程式을 分項方程式(Component Equation)이라고 한다.

어떤 條件下에서는 이 分項方程式을 곱의 形式으로 合成해 낼수가 있다. 卽 세가지 π項사의의 關係를 하나의 數式으로 묶을 수가 있다.

(10), (11), (12)式의 關係는 다음과 같이 表示할 수가 있다.

$$\pi_1=C(\pi_1)_{\bar{3}}\ (\pi_1)_{\bar{2}} \cdots\cdots (13)$$

이렇게 할 수 있는 條件을 設定하기 위하여 먼저 分項方程式을 서로 곱하면 一般式이 얻어질 수 있다

고 假定하여 (13)式의 常數 C를 決定한다.

지금

$$F(\pi_2, \pi_3)=f_1(\pi^2\bar{\pi}_3)f_2(\bar{\pi}_2, \pi_3)\cdots\cdots(14)$$

이 成立될려면 π_3를 常數로한 첫번째 實驗에서(14-1)式이 얻어지며 (15)式을 變形하여 (14-2)式을 얻을 수가 있다.

即 $F(\pi_2, \bar{\pi}_3)=f_1(\pi^2, \bar{\pi}_3)\ f^2\ (\bar{\pi}_2, \bar{\pi}_3)\cdots\cdots(14\text{-}1)$

$$f_1\ (\pi_2,\ \pi_3)=\frac{F(\pi_2, \bar{\pi}_3)}{f_2(\bar{\pi}_2, \pi_3)}\cdots\cdots(14\text{-}2)$$

마찬가지로 (14)式에서 π_2를 常數로 한 두번째 實驗結果에서 다음과 같은 두式이 얻어진다.

$$F(\bar{\pi}_2, \pi_3=f_1(\bar{\pi}^2, \bar{\pi}_3)\ f(\bar{\pi}_2, \pi_3)\cdots\cdots(14\text{-}3)$$

$$f_2(\bar{\pi}^2, \bar{\pi}_3)=\frac{F(\bar{\pi}_2, \pi_3)}{f_1(\bar{\pi}_2, \bar{\pi}_3)}\cdots\cdots(14-4)$$

(14−2)式과 (14−4)式의 $f_1(\pi_2,\ \bar{\pi}_3)$ 및 $f_2(\bar{\pi}_2, \pi_3)$의 값을 (14)式에 代入하면 다음 式이 얻어 진다.

$$F(\pi_2, \pi_3)=\frac{F(\pi_2\bar{\pi}_3)\ F(\bar{\pi}_2, \pi_3)}{f_2(\bar{\pi}^2, \bar{\pi}_3)f_1(\bar{\pi}_2, \bar{\pi}_3)}\cdots\cdots(14-5)$$

그러나 (14−5)式의 분모는 π_2와 π_3를 常數로하여 (14)式에 代入하여 얻어진 것이므로

$$F(\bar{\pi}, \bar{\pi}_3)=f_1(\bar{\pi}_2, \bar{\pi}_3)\ f_2(\bar{\pi}_2, \bar{\pi}_3)\cdots\cdots(14-6)$$

이 되고 따라서

$$F(\bar{\pi}_2, \bar{\pi}_3)=\frac{F(\pi_2, \bar{\pi}_3)\ F(\bar{\pi}_2, \pi_3)}{F(\bar{\pi}_2, \bar{\pi}_3)}\cdots\cdots(14-7)$$

이 된다. 이 結果에서 (13)式의 C값은 $\frac{1}{F(\bar{\pi}_2\bar{\pi}_3)}$과 같다는 것을 알 수가 있다.

分項方程式을 곱으로 合成할수있는지의 여부를 검정하기 위해서는 다음과 같은 검정식이 필요하다.

例를 들면 一般式(14−7)은 π_2를 常數로 놓고 결정된 것이므로 合成이 可能하다면 π_2를 $\bar{\pi}_2$와 다른 常數値 즉 $\pi_2=\bar{\bar{\pi}}_2$인 一連의 實驗値에 依해서도 決定되어 질수가 있다.

그러면

$$F(\pi_2, \pi_3)=\frac{F(\pi_2, \bar{\pi}_3)\ F(\bar{\bar{\pi}}_2, \pi_3)}{F(\bar{\bar{\pi}}_2, \bar{\pi}_3)}\cdots\cdots(15)$$

이 되고 (14−7)式의 式의(15) 右邊과 같아야되므로

$$\frac{F(\bar{\pi}_2, \pi_3)}{F(\bar{\pi}_2, \bar{\pi}_3)}=\frac{F(\bar{\bar{\pi}}_2, \pi_3)}{F(\bar{\bar{\pi}}_2, \pi_3)}\cdots\cdots(16)$$

이 成立된다.

마찬가지로 만약 π_3를 다른값 즉 $\bar{\bar{\pi}}_3$를 갖는 常數로 놓으면

$$\frac{F(\pi_2, \bar{\pi}_3)}{F(\bar{\pi}_2, \bar{\pi}_3)}=\frac{F(\pi_2, \bar{\bar{\pi}}_3)}{F(\bar{\pi}^2, \bar{\bar{\pi}}_3)}\cdots\cdots(16-1)$$

이 되며 (16)式과 (16−1)式을 使用해서 (14)式의곱으로의 合成可能여부를 검정할 수가 있게 된다.

例題 3. 어떤 현상내에 포함되어 있는 여러 變數를 次元解析에 依해서 세개의 π項으로 表示하여 이들 π項사이의 關係를 實驗하고 세개의 分項方程式을 求한 結果가 다음과 같다고 할때 이들 關係를 하나의 合成方程式으로 表示할 수 있는가를 檢定하고 그것이 不可能하다면 合成된 一般方程式을 求해보기로 한다.

$\bar{\pi}_2=16.5$일때 $\pi_{1,\bar{2}}=4.41(\pi_3)^{0.42}$

$\bar{\pi}=370$일때 $\pi_{1,\bar{3}}=2.64(\pi_2)^{1.03}$

$\bar{\bar{\pi}}=6$일때 $\pi_{1,\bar{\bar{3}}}=0.494(\pi_2)^{1.05}$

곱으로 合成可能한가를 檢討하기 위하여

$F(\pi_2, \bar{\pi}_3)=2.64\ (\pi_2)^{1.03}$에서

$F(\bar{\pi}_2, \bar{\pi}_3)=2.64(16.5)^{1.03}$

또

$F(\bar{\pi}_2, \bar{\pi}_3)=4.41(\pi_3)^{0.42}$에서

$F(\bar{\pi}_2, \bar{\pi}_3)=4.41(370)^{0.42}$

$F(\pi_2, \bar{\bar{\pi}}_3)=0.494(\pi_2)^{1.05}$에서

$F(\bar{\pi}_2, \bar{\bar{\pi}}_3)=0.494(6)^{1.05}$로 된다.

곱으로 合成할수 있는 條件은

$\frac{F(\pi_2, \bar{\pi}_3)}{F(\bar{\pi}_2, \bar{\pi}_3)}=\frac{F(\pi_2, \bar{\bar{\pi}}_3)}{F(\bar{\pi}_2, \bar{\bar{\pi}}_3)}$이므로

$\frac{2.64(\pi_2)^{1.03}}{4.41(370)^{0.42}}=\frac{0.494(\pi_1)^{1.05}}{0.494(16.5)^{1.05}}$가 되며 이것을 정리하면

$0.0499\pi_2{}^{1.03}=0.0525\pi_2{}^{1.05}$이 된다.

이것은 π_2의 값에 關係없이 概略的으로 같으므로 곱으로 合成할 수 있음을 알 수가 있다. 合成方程式은 다음과 같이 계산해 낼 수가 있다.

$$\pi_1=F(\pi_2, \pi_3)=\frac{\pi_{1\bar{2}}, \times\pi_{1,\bar{3}}}{F(\bar{\pi}_2, \bar{\pi}_3)}$$

$$=\frac{4.41(\pi_3)^{0.42}\times 2.64(\pi_2)^{1.03}}{4.41\ (370)^{0.42}}$$

$$=0.22(\pi_2)^{1.03}\ (\pi_3)^{0.42}$$

$$\therefore \pi_1=0.22(\pi_2)^{1.03}\ (\pi_3)^{0.42}$$