

翼胴體의 空力彈性學의 特性에 관한 研究

李 海 京*

On the Aeroelastic Characteristics for the Flight Vehicle of Wing-Body Combination

by
Hae Kyong Lee

Abstract

This paper shows the method for obtaining the body flutter velocity and frequency for flight body which consists of low aspect ratio wing and body combination by assuming slender body of cylindrical shell structure. The stiffness matrix of the cylindrical shell is represented from Donnel eq. by the finite difference method, and also unsteady aerodynamic influence matrix is represented by the Doublet Lattice Method of Albano & Rodden. The flutter matrix can be obtained from those matrices.

使用한 記號

a : cylinder 半徑
 $[A]$: 非定常空氣力의 influence matrix.
 c : $= \frac{Et}{1-\nu}$
 d : 要素의 圓周方向의 無次元길이
 e : 要素의 span 의 길이의 1/2
 E : Young 의 係數
 F_{xij} : ij 要素에 作用하는 外力의 x 成分
 F_{yij} : ij 要素에 作用하는 外力의 y 成分
 F_{zij} : ij 要素에 作用하는 外力의 z 成分
 h : 길이方向의 要素의 無次元길이
 k : $= \left(\frac{\omega l}{\bar{u}} \right)$
 K : 空氣力의 influence function
 K_{ij} : Donnel Eq.의 演算子記號
 $\left. \begin{matrix} [K_{ww}] \\ [K_{ww}] \end{matrix} \right\}$ stiffness matrix
 l : cylinder 의 흐름方向의 길이
 $[M]$: 慣性에 對한 對角線 matrix
 $p(\xi, \sigma)$: $\xi\sigma$ 點에서의 壓力
 P_j : 壓力의 column matrix
 r : $= \sqrt{y_0^2 + z_0^2}$
 s : nonplaner surface 의 曲線座標
 t : cylindrical shell 의 두께
 \bar{u} : 흐름의 速度
 u_{ij} : ij 要素의 變位의 x 成分

v_{ij} : ij 要素의 變位의 y 成分
 \bar{v}_j : 變位의 column matrix
 w_{ij} : ij 要素의 變位의 z 成分
 $\left. \begin{matrix} x \\ y \\ z \end{matrix} \right\}$ 直交座標
 x_0 : sending point 와 receiving point 사이의 거리의 x 成分
 y_0 : sending point 와 receiving point 사이의 거리의 y 成分
 α : 無次元係數 $\left(= \frac{a}{l} \right)$
 β : 無次元係數 $\left(= \frac{t}{l} \right)$
 γ_s : 原點과 sending point 를 연결한 直線과 y 軸과의 角
 γ_r : 原點과 receiving point 를 연결한 直線과 y 軸과의 角
 ν : Poisson 比
 δ : 無次元係數 $\left(= \frac{\rho_a}{\rho_m} \right)$
 σ : sending point 의 曲線座標
 ρ_a : 空氣密度
 ρ_m : 材料의 密度
 ω : 振動數
 $\left. \begin{matrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{matrix} \right\}$ 無次元化한 座標系

接受日字 1973年 3月 5日

* 正會員, 서울大學校工科大學

1. 緒 言

Oscillatory flow 內에서 slender body가 받는 空氣力에 관해서는 1950 年에 Miles[1]가 slender body를 剛體로 假定한 경우의 解를 求하였으며, 그 後에 slender body 表面을 vortex sheet로 代置하는 方法을, 定常 空氣流의 경우, Hedman[2]이 適用하면서부터 複雜한 形의 wing-body 結合體에 對한 定常 空氣力의 計算이 可能하게 되었다.

한편 wing에 대한 非定常 空氣力의 計算은 Watkins, Runyan & Woolston[3] 및 Watkins, Woolston & Cunningham[4] 등이 Folkner의 定常 空氣流에서의 空氣力의 計算法을 適用하여 發展시켰다. Slender body 및 wing-body combination의 경우, 非定常 空氣力의 計算은 物體의 表面을 doublet의 分布로 代置하는 方法이 Vivian, Rodmich[5] 및 Landahl[6] 등에 依해서 提起되었으며, 이 doublet sheet를 有限要素로 區分하여 計算하는 Doublet Lattice Method(DLM)의 有用성이 Albano & Rodden[7]에 依하여 提唱되었다.

이와같이 非定常 室氣力에 대한 有限要素에 依한 計算方法의 發展은 複雜한 形態의 飛行體에 있어서의 空氣彈力學의 特性 및 wing-body 結合體의 非定常 空氣力學의 干涉效果 등에 關한 理論的인 推定을 可能케 하였다.

여기서는 Low-aspect ratio의 wing을 갖는 wing-body combination을 cylindrical shell 구조의 slender body로 假定하였고, 이의 flutter 行列式을 구했으며, 이 行列式의 유도를 위해서 cylindrical shell structure에 對한 基本方程式으로서 Donnel 方程式을 使用하여, finite difference method에 의하여 線形代數方程式의 形態로 나타냈고, 非定常 空氣力은 Albano-Rodden의 DLM法으로 表示했다. 이와같은 問題는 潛水船을 하나의 slender body로 假定할 때 水中에서의 flutter 解析에도 適用이 可能할 것으로 생각한다.

wing-body 結合體에 對한 flutter 特性을 求하기 위해서는 body와 wing에 對한 振動方程式과 이 두 部分의 連續部에서의 境界條件을 滿足시키는 flutter matrix를 구하므로써 얻어질 수 있다.

2. Slender Body에 對한 Stiffness Matrix의 誘導

Cylindrical shell로서 구성된 slender body의 飛行體에 對한 stiffness matrix를 구하기 위하여 cylindrical shell에 關한 Donnel Eq.을 使用한다. 즉, 이는

$$[K_{ij}]\{\bar{v}_j\} = \{p_i\} \quad i=1, 2, \dots, n, \quad j=1, 2, \dots, n \quad (1)$$

로 表示된다.

Matrix의 各元素는

$$K_{11} = \frac{1}{l} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{(1-\nu)}{8\pi^2 \alpha a} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}$$

$$K_{12} = \frac{(1+\nu)}{4\pi a} \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \theta}$$

$$K_{13} = \frac{\nu}{a} \frac{\partial}{\partial \xi}$$

$$K_{21} = \frac{1+\nu}{4\pi a} \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \theta}$$

$$K_{22} = \frac{1}{4\pi^2 \alpha a} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{1-\nu}{2l} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2}$$

$$K_{23} = \frac{1}{2\pi \alpha a} \frac{\partial}{\partial \theta}$$

$$K_{31} = \frac{\nu}{a} \frac{\partial}{\partial \xi}$$

$$K_{32} = \frac{1}{2\pi \alpha a} \frac{\partial}{\partial \theta}$$

$$K_{33} = \frac{1}{\alpha a} + \frac{l^2}{12a^4} \nabla^4$$

$$\nabla^4 = \left[\left(\frac{a}{l} \right)^4 \frac{\partial^4}{\partial \xi^4} + \frac{a^2}{2\pi^2 l^2} \frac{\partial^4}{\partial \xi^2 \partial \theta^2} + \frac{1}{16\pi^2} \frac{\partial^4}{\partial \theta^4} \right]$$

(2)

이다.

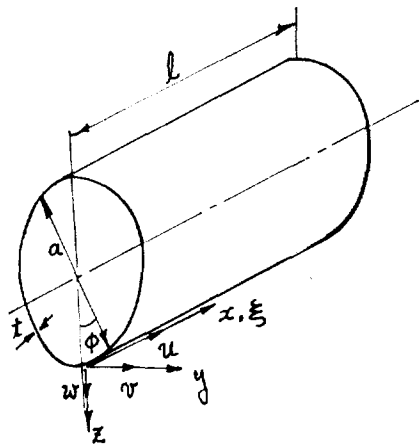


Fig. 1

여기서 $\xi = \frac{x}{l}$, $\theta = \frac{n}{2\pi}$, $\frac{a}{l} = \alpha$ 라고 놓고 變位 \bar{v} 의 成分 u, v, w 는 特性길이 l 에 依하여 無次元된 函數이다. Cylinder shell을 길이方向으로 n 等分하고, 圓周方向으로 m 等分하여 $n \times m$ 個의 finite element로 分割하여 j, k 번째의 要素의 中央點에 對한 變位成分을 各各 u_{jk}, v_{jk}, w_{jk} 라고 하고 이 要素에 作用하는 分布力의 合의 x, y, z 成分을 $F_{xjk}, F_{yjk}, F_{zjk}$ 라고 하고 finite difference method를 適用하면,

$$\frac{c}{lh^2} (u_{j-1,k} - 2u_{j,k} + u_{j+1,k}) + \frac{c(1-\nu)}{8\pi^2\alpha ad^2} (u_{j,k-1} - 2u_{j,k} + u_{j,k+1}) + \frac{c(1+\nu)}{16\pi ah d} (v_{j-1,k-1} - v_{j-1,k+1} - v_{j+1,k-1} + v_{j+1,k+1}) + \frac{c\nu}{2ah} (-w_{j-1,k} + w_{j+1,k}) = -F_{xjk} \dots (3a)$$

$$\frac{c(1+\nu)}{16\pi ah d} (u_{j-1,k-1} - u_{j-1,k+1} - u_{j+1,k-1} + u_{j+1,k+1}) + \frac{c}{4\pi^2\alpha ad^2} (v_{j,k-1} - 2v_{j,k} + v_{j,k+1}) + \frac{c(1-\nu)}{2lh^2} (v_{j-1,k} - 2v_{j,k} + v_{j+1,k}) + \frac{c}{4\pi\alpha ad} (-w_{j,k-1} + w_{j,k+1}) = -F_{yjk} \dots (3b)$$

$$\frac{c\nu}{2ah} (-u_{j-1,k} + u_{j+1,k}) + \frac{c}{4\pi\alpha ad} (-v_{j,k-1} + v_{j,k+1}) + \frac{c}{\alpha a} w_{j,k} + \frac{c t^2}{12\alpha a^3} \left\{ \left(\frac{\alpha}{h} \right)^4 (w_{j-2,k} - 4w_{j-1,k} + 6w_{j,k} - 4w_{j+1,k} + w_{j+2,k}) + \frac{1}{4\pi^2} \left(\frac{\alpha}{hd} \right)^2 (2w_{j-1,k-1} - 4w_{j-1,k} + 2w_{j-1,k+1} - 4w_{j,k-1} + 8w_{j,k} - 4w_{j,k+1} + 2w_{j+1,k-1} - 4w_{j+1,k} + 2w_{j+1,k+1}) + \frac{1}{16\pi^4 d^4} (w_{j,k-2} - 4w_{j,k-1} + 6w_{j,k} - 4w_{j,k+1} + w_{j,k+2}) \right\} = F_{zjk} \dots (3c)$$

이 된다.

Matrix 形으로 表示하면

$$\begin{bmatrix} [K_{uu}] & [K_{uv}] & [K_{uw}] \\ [K_{vu}] & [K_{vv}] & [K_{vw}] \\ [K_{wu}] & [K_{wv}] & [K_{ww}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{u_{ij}\} \\ \{v_{ij}\} \\ \{w_{ij}\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\{F_{xij}\} \\ -\{F_{yij}\} \\ \{F_{zij}\} \end{Bmatrix} \dots (4)$$

但, $[K_{uv}]$ 等은 部分 matrix 를 表示한다.

3. 非定常空氣力

Slender body 에 作用하는 非定常空氣力은 Albano & Rodden의 DLM 法으로서 計算한다. Albano & Rodden에 依하면 non-planer surface에 對한 unsteady downwash \bar{w} 는

$$\bar{w}(x, s) = \frac{ia\bar{z}}{8\pi} \iint K(x, \xi, s, \sigma) p(\xi, \sigma) d\xi d\sigma \dots (5)$$

여기서

$$K = e^{(-i\omega x_s / r)} (K_1 T_1 + K_2 T_2) / r \dots (6)$$

$$T_1 = \cos(\gamma_r - \gamma_s)$$

$$T_2 = \left(\frac{z_0}{r} \cos \gamma_r - \frac{y_0}{r} \sin \gamma_r \right) \times$$

$$\left(\frac{z_0}{r} \cos \gamma_s - \frac{y_0}{r} \sin \gamma_s \right) \dots (8)$$

$$r^2 = y_0^2 + z_0^2 \dots (9)$$

$$K_1 = r \left(\frac{\partial I_0}{\partial r} \right) \dots (10)$$

$$K_2 = r^3 \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial I_0}{\partial r} \right) \right] \dots (11)$$

$$I_0 = \int_{u_1}^{\infty} \frac{\exp(-i\omega r u / \bar{u})}{(1+u^2)^2} du \dots (12)$$

$$u_1 = [M(x_0^2 + (1-M^2)r^2)^{1/2} - x_0] / (1-M^2)r$$

여기서 K_1, K_2 의 展開形은 Landahl에 依하여 주어 지고 있다.

한 振動揚力面要素의 影響을 決定하는 DLM 方法은 壓力이 이 要素 위의 한 直線 위에 集中되어 있다고 생각하며, 이 線이 要素의 $\frac{1}{4}$ -chord 에 位置한다고 假定한다. 또한 揚力線이 定常空氣流에서 horseshoe vortex 에 依하여 表示되며 oscillatory flow 에서는 doublet의 線으로 表示되며, 이 要素面의 境界條件에 依하여 normalwash가 각 box 要素의 中心線 위의 $\frac{3}{4}$ -chord

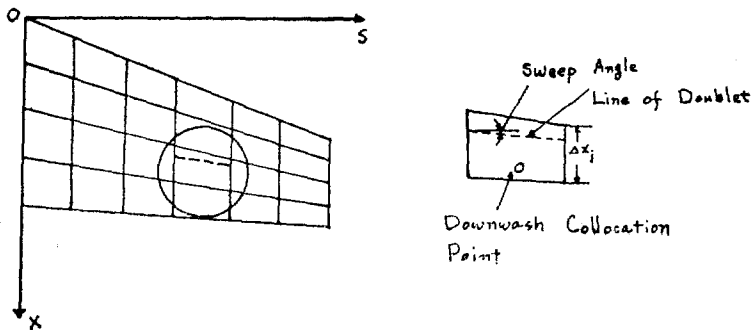


Fig. 2.

點에 있어야 함이 檢證되어 있다.

따라서 (5)式的 積分方程式의 matrix 形은

$$\{\bar{w}_d\} = [D] \{p\} \tag{13}$$

로 表示되며 [D]의 元素는

$$D_{rs} = \frac{1}{8\pi} h\alpha \int_{-\epsilon}^{\epsilon} K d\theta$$

이다.

非定常空氣力學의 理論에 依하면

$$\bar{w}_d = \frac{1}{\bar{u}} \left(i\omega l + \bar{u} \frac{\partial}{\partial \xi} \right) w$$

이므로

$$\{P_i\} = [A_{ij}] \{W_j\} \tag{15}$$

로 表示되며, w_j 의 위치는 $\frac{3}{4}$ -chord 위의 點이므로 finite difference method에 의하여 中心點에 관한 變位 W_{ij} 로 表示하면 다음과 같이 된다.

$$P_{zmn} = \sum_{j=1}^p \sum_{k=1}^q A_{j,k}^{z,m} \left[\frac{\rho_a \bar{u}^2}{8h} \times \right. \\ \left. (-W_{j-1,k} - 2W_{j,k} + 3W_{j+1,k}) \right. \\ \left. + i \frac{\omega l \bar{u} \rho_a}{2} \left(W_{j,k} - \frac{1}{8} W_{j-1,k} \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{1}{8} W_{j+1,k} \right) \right]. \tag{16}$$

Matrix 形으로 表示하면

$$\{P_{z,m}\} = \left[A_{j,k}^{z,m} \right] \{W_{j,k}\} \tag{17}$$

이 된다.

4. 基本方程式의 記述

構造物의 運動方程式은 stiffness matrix 및 inertia matrix 및 外力이 주어지면 求할 수 있다. Cylindrical shell의 finite element에 對한 inertia force는 matrix 形으로 表示하면

$$[\backslash M \backslash] \{\bar{v}\}$$

으로 表示되므로 變位를 各各

$$u_{ij} = \bar{u}_{ij} e^{i\omega t}, \quad v_{ij} = \bar{v}_{ij} e^{i\omega t}, \quad w_{ij} = \bar{w}_{ij} e^{i\omega t}$$

로 놓고 運動方程式을 求하면 다음과 같이 된다.

$$[K_{uu}] \{\bar{u}_{ij}\} + [K_{uv}] \{\bar{v}_{ij}\} + [K_{uw}] \{\bar{w}_{ij}\} + \omega^2 [\backslash M \backslash] \{\bar{u}_{ij}\} = 0 \tag{18}$$

$$[K_{vu}] \{\bar{u}_{ij}\} + [K_{vv}] \{\bar{v}_{ij}\} + [K_{vw}] \{\bar{w}_{ij}\} + \omega^2 [\backslash M \backslash] \{\bar{v}_{ij}\} = 0 \tag{19}$$

$$[K_{wu}] \{\bar{u}_{ij}\} + [K_{wv}] \{\bar{v}_{ij}\} + [K_{ww}] \{\bar{w}_{ij}\} - \omega^2 [\backslash M \backslash] \{\bar{w}_{ij}\} \\ = [A_{ij}] \{\bar{w}_{ij}\} \tag{20}$$

式 (18)과 (19)로부터 $\{\bar{u}_{ij}\}$ 및 $\{\bar{v}_{ij}\}$ 를 구하면

$$\left. \begin{aligned} \{\bar{u}_{ij}\} &= [C_{uu}] \{\bar{w}_{ij}\} \\ \{\bar{v}_{ij}\} &= [C_{vu}] \{\bar{w}_{ij}\} \end{aligned} \right\} \tag{21}$$

但

$$[C_{uw}] = [[K_{uv}]^{-1} \{ [K_{uu}] + \omega^2 [\backslash M \backslash] \} - [K_{vv}] \\ + \omega^2 [M]]^{-1} [K_{vw}]^{-1} \times \\ [K_{vu}]^{-1} [K_{uw}] - \{ [K_{vv}] + \omega^2 [\backslash M \backslash] \}^{-1} [K_{vw}]] \\ [C_{vw}] = \{ [[K_{uv}] + \omega^2 [\backslash M \backslash]]^{-1} [K_{uv}] - [K_{vv}]^{-1} \{ [K_{vv}] \\ + \omega^2 [\backslash M \backslash] \} \}^{-1} \times \\ [[K_{vu}]^{-1} [K_{vw}] - \{ [K_{vv}] + \omega^2 [\backslash M \backslash] \}^{-1} [K_{uw}]]$$

이다. 따라서 基本運動方程式은

$$[[K_{uw}] [C_{uw}] + [K_{vw}] [C_{vw}] \\ + \{ [K_{uw}] - \omega^2 [M] \} - [A]] \{\bar{w}_{ij}\} = 0 \tag{22}$$

으로 表示된다.

Flutter 特性을 求하는데 使用되는 flutter matrix [F]는

$$[F] = [[K_{uw}] [C_{uw}] + [K_{vw}] [C_{vw}] \\ + \{ [K_{uw}] - \omega^2 [M] \} + [A]]$$

으로 表示되며, 이의 行列式을 0으로 하는 ω 및 \bar{u} 가 flutter 狀態로 되는 限界値가 된다.

5. 數值計算

Cylinder shell로 된 slender body의 flutter 特性을 計算하기 위하여 다음과 같이 定義되는 無次元係數의 값을

$$\alpha = \frac{a}{l} = 0.2$$

$$\beta = \frac{t}{l} = 0.01$$

$$\gamma = \frac{El}{M\bar{u}^2} = \frac{3.22 \times 1.06 \times 10^{10}}{1.2 \times \bar{u}^2}$$

$$\delta = \frac{\rho_a}{\rho_m} = 4.425 \times 10^{-4}$$

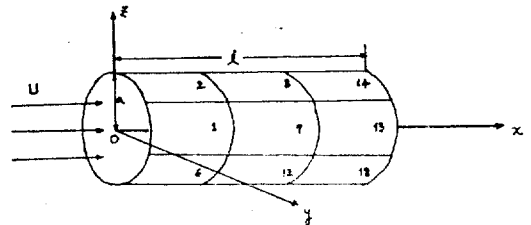


Fig. 3

로 놓고 frequency range를 5~15 사이에서 $1/k$ 을 0.5, 1.0, 2.0의 세 경우에 대하여 計算했다. $l=3$ ft로 假定하고 $k = \frac{\omega l}{\bar{u}}$ 로 부터 주어진 ω 와 $1/k$ 의 값에 대하여 \bar{u} 를 求하고 無次元係數 中 γ 를 決定하였다. 이들 無次元係數를 利用하면 finite difference Eq.의 各係數를 決定할 수 있으므로, flutter matrix의 各 元素는 無次元係數로 表示된다. 實際 計算에서는 Fig. 3과 같

이 18개의 요소로 구분하였고 서울대학교 工科大学이 保有하고 있는 IBM 1130 電子計算組織을 利用하여 計算하였다.

Flutter 行列式 $|F|=0$ 을 求함에 있어서는 $|F|$ 의 各 元素가 複素數이므로 實數部와 虛數部를 各々 計算하고 이 값들이 0이 되는 ω 와 $1/k$ 의 값을 graph를 利用하여 求하고 이 값으로부터 Fig.4과 같은 曲線을 얻었다. Flutter 點은 Fig.4에서 實數曲線(實數値가 0이 되는 曲線)과 虛數曲線(虛數値가 零이 되는 曲線)의 交點이 된다. $\omega=5\sim 15$, $1/k=0.5\sim 2.0$ 사이에서는 $1/k=1.2$, $\omega=7.5$ 에서 flutter가 일어남을 알 수 있다. 이때의 flutter velocity는

$$\bar{u} = \frac{\omega l}{k} = 7.5 \times 3 \times 1.2 = 27 \text{ ft/sec}$$

이며 振動數 $\omega=7.5$ cps이다. 이와 같은 값은 structural damping을 無視한 경우의 값으로서 structural damping을 考慮하면 이 값도 變換 것으로 생각된다. 이 計算에서는 $\omega=5\sim 15$ 사이에서 일어날 수 있는 振動 mode에 局限하여 計算한 것이므로 最低次 mode에 對한 振動數를 구할 경우에는 $\omega=0$ 인 點을 包含하는 領域에서 위의 計算過程을 反復하여 求할 수 있을 것이다. 最小 flutter velocity의 誘導은 위의 計算을 ω 의 여러 領域에서 $\omega \sim \frac{1}{k}$ 의 實數曲線과 虛數曲線의 交點에서의 速度를 比較함으로써 얻어질 수 있을 것이다.

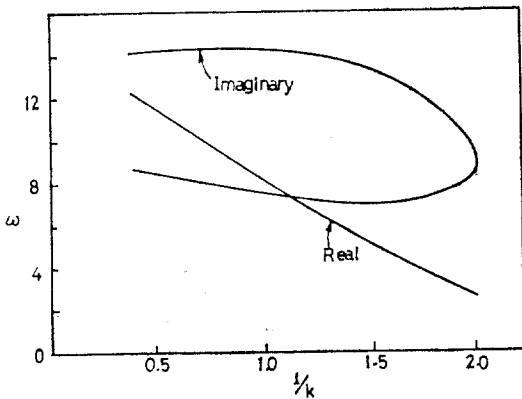


Fig. 4.

6. 結 論

Low-aspect ratio wing과 body 結合으로 된 飛行體의 flutter 特性을 求하기 위하여 wing-body 結合體를 cylindrical shell의 細長體로 假定하고, 非定常空氣力을 DLM 法을 利用하여 求함으로써 運動方程式을 matrix

形式로 表示할 수 있고, 簡單한 數値計算의 結果는 wing 단의 경우와 비슷하게 $\omega \sim \frac{1}{k}$ 曲線으로서 flutter 特性値가 求해질 수 있음을 나타낸다. 따라서 一般的으로 複雜한 形態의 飛行體에 對한 flutter 特性이 이 方法으로 求해질 수 있음을 結論지을 수 있으며, 實際 計算의 所要時間을 短縮하기 위하여 非定常空氣力의 DLM 法的 表示의 簡單化가 要請된다.

끝으로 本 研究은 文敎部 學術研究助成費에 依하여 이루어졌으며, 關係當局에 謝意를 表한다.

參 考 文 獻

- [1]. Miles. J.W.: "On Nonsteady Motion of Slender Body," Aeronautical Quarterly, Vol.2. pp 183-194, Nov. 1950.
- [2]. Hedman. S.G: "Vortex Lattice Method for Calculation of Quasic-steady State Loadings on thin Elastic Wings in Subsonic Flow." Report 105. The Aeronautical Research Inst. of Sweden, Oct. 1965
- [3]. Watkins. C.E., Runyan. H.L., & Woolston. D.C: "On the Kernel Function of the Integral Equation Relating the Lift and Downwash Distributions of Oscillatory Finite Wings in Subsonic Flow." NACA. T.R 1234, 1956.
- [4]. Watkins. C.E, Woolston D.C. & Cunningham. H.J: "A Systematic Kernel Function Procedure for Determining Aerodynamic Forces on Oscillatory or Steady Finite Wings at Subsonic Speeds." NACA R-48, 1959.
- [5]. Vivian, H.T & Andrews, L.V: "Unsteady Aerodynamics for Advanced Configuration," T.D.K. No FDLTDR-64-152 Air Force Flight Dyn. Lab. R & T Div. May 1965.
- [6]. Landahl, M.T.: "Kernel Function for Nonplanar Oscillatory Surfaces in a Subsonic Flow," AIAA J. Vol.5. No.5. May 1967.
- [7]. Albano, E & Rodden, W.P: "A Doublet Lattice Method for Calculating Lift Distribution on Oscillatory Surfaces in Subsonic Flows," AIAA J. Vol.7. No.2. Feb. 1969
- [8]. Rodden, W.P. Giesing, J.P & Kalman, T.P: "Refinement of the Nonplanar Aspects of the Subsonic Doublet-Lattice Lifting Surface Method," J of Aircraft Vol.9. No.1. JAN. 1972.
- [9]. Bisplinghoff, R.L, Ashley, H, & Halfman; "Aeroel-

- asticity," Addison-Wesley Pub. Co. Inc, 1955
- [10]. Bisplinghoff, R.L. & Ashley. H: "Principles of Aeroelasticity," John Wiley & Sons, Inc. 1962
- [11]. Sung Kyoo Kim, "Aerodynamic Oscillatory Force on the Ring Type Wing," Master Thesis, Seoul National University, Nov. 30, 1972.