

# Hermite 展開法에 의한 非線形系の 狀態推定 및 同定에 관한 연구

## State Estimation and Identification of Nonlinear Systems by Hermitian Expansion of Probability Distributions

김 경 기\*  
(Kyong Ki Kim)

### Abstract

An algorithm for the state estimation and identification of multivariable nonlinear systems with noisy nonlinear observation has been investigated on the basis of the multidimensional Hermitian expansion for the a posteriori probability densities of the predicted observation, the predicted state and the observation conditioned by the state.

A new approach for construction of this sequential nonlinear estimator, retaining up to the second order term of the observation error, has been developed, along with the approximation of nonlinear system functions, truncating at the second term.

The estimation of the unknown parameters has been established by extending the state estimation technique, regarding the parameters as another state variables.

The results of investigation indicate the feasibility of the schemes presented in this paper.

### 1. 序 論

線形系の 動特性的 推定에 關하여는 많은 研究結果가 發表되었다. 統計的인 手法에 依한 研究論文으로는 Levin<sup>1)</sup>, Rosenberg-Shen<sup>2)</sup>과 Ho-Lee<sup>3)</sup> 등의 論文이 發表되었다. 最適狀態推定法에 關한 研究로서는 Kalman, Bucy<sup>4)5)</sup> 등의 論文으로서 Kalman filter 法이 確立되었다.

그러나 非線形系の 動特性推定에 關한 研究는 아직 線形系에서와 같이 많은 研究가 進捗되어 있지 않으며,

이 分野에 있어서의 研究結果를 概觀하여 보면, Cox<sup>6)</sup>는 非線形系에 Dynamic Programming 을 適用하여 非線形制御系의 狀態變數와 未知의 parameter 에 對한 推定法을 提案하여 2點 境界值問題를 풀어서 狀態推定式을 確立하였고, 이것으로부터 逐次推定可能한 近似線形化 Filter 의 構成法을 提案하였다.

또 Kushner<sup>7)8)</sup>와 Wonham<sup>9)</sup>은 確率微分方程式을 適用하여 連續系에서의 非線形 Filter 問題에 對한 一般論을 樹立하였고, Schwarz<sup>10)</sup>는 動的系(dynamical system)와 觀測系(observation system)에 對하여 狀態推定值의 近傍에서 Taylor 級數로 展開하여 2次項

\*정회원 : 한양대학교 공과대학 부교수

까지 考慮하여 處理하였다.

Fukao<sup>12)</sup>는 Bayesian learning 方法을 適用하여 非線形의 動特性 推定을 取扱하였고, Kumar<sup>13)</sup>는 quasi-linearization 을 應用하여 非線形系 非定常過程問題의 動特性推定問題를 處理하였다. 이 外에도 Wiener<sup>13)</sup>는 汎函數(functional)의 Volterra 級數에 依한 直交函數展開로서 動特性의 決定方式을 提案하였고, Athans<sup>14)</sup>는 非線形連續系를 非線形 sample 觀測을 하였을때, 그 非線形函數에 對하여 狀態推定值의 近傍에서 Taylor 級數로 展開하여 그 2次項까지만 考慮하여 近似 filter 를 構成하는 理論을 提示하였다.

그러나 Kushner, Schwartz 등이 展開한 理論은 連續系에 關한 것이므로 그 推定值는 聯立微分方程式을 풀어서 그 解를 求하여야 定하여지는 것이며, 그 過程이 매우 複雜하다. Cox 와 Athans 등이 取扱한 Filter 의 構成理論은 觀測值의 集合  $Z_k = \{z_1, z_2, \dots, z_k\}$ 에 依하여 求하는 狀態值  $x_k$ 의 事後確率密度函數(a posteriori probability density function)  $p(x_k | Z_k)$ 를 正規分布(Gaussian distribution)라고 假定하여 展開한 理論이므로 高次의 非線形系에 對하여 適用할 경우 그 非線形特性을 充分히 認知하기 어렵게 되는 缺點이 있다.

또 Srinivasan<sup>15)</sup>은 非線形離散值系에 對하여 Hermite 多項式 展開法을 適用하여 推定하는 方法을 提示하고 그 計算은 Gauss-Hermite 求積法을 適用하였다. 그러나 그의 方法에 있어서는 平均值와 對角分散行列을 갖는 正規函數에 對하여 Hermite 多項式 展開를 適用한 것이므로, 그 quasi-moment 函數의 2次項은 一般의 零이 되지 않으며, 따라서 그 影響을 반드시 考慮하지 않으면 아니된다. 따라서 共分散行列의 非對角要素가 零이 되지 않는 一般正規分布를 級數展開할 경우에 있어서는 無限次項까지 展開하여 考慮하여야 되는 缺點이 있다.

本 論文에서는 非線形制御系에 있어서 高次의 非線形性에 對하여 보다 精密한 推定을 얻기 위한 方法으로서 非正規分布의 事後確率密度函數  $p(x_k | Z_k)$ 을 構成하는 各 密度函數에 對하여 Hermite 多項式 展開法을 適用하여 2次近似化하고, 그 近似確率密度函數와의 誤差를 考慮하여 이에 對하여 特히  $p(x_k | Z_k)$ 의 分母에 正規確率密度函數가 包含되지 않도록 Hermite 展開를 調整하고, 또 觀測誤差에 關한 有理式을 補正要因으로 導入하여 非線形프렌트의 推定機構를 構成함으로써 그 機能의 改善策을 樹立코져 한다.

本 論文에서 展開한 機構構式方法에 있어서는 正規密度函數를 基底로 하여 正規 또는 非正規의 一般 事後確率密度函數를 Hermite 多項式의 級數로 2次項까지 展開하여 그 1次 및 2次의 quasimoment 函數가

零이 되도록 基底正規密度函數를 다시 補正하였으므로 補正된 基底正規密度函數만의 計算으로도 그 自體가 非正規密度函數의 2次近似值이므로, 이 近似法에 따라 高次非線形系의 推定精密도를 改善코져 한다.

한편 基底正規函數에 있어서는 分散行列의 非對角要素가 零이 아니되게 策定하였다. 그러므로 構成成分間에 相關關係가 있는 一般正規分布函數의 展開에 있어서 도 이러한 基底正規函數만으로 表示할 수 있게되어 高次項까지 展開하여 考慮할 必要는 없다.

適用例로서 quasi-moment 函數에 對하여 2次까지 考慮하여 非線形系의 動特性推定機構를 構成하여 例示하였다. 動的系인 프렌트와 觀測系의 非線形函數는 Taylor 級數展開에 依한 2次近似式과 確率의 2次近似式(stochastic quadratic approximation)을 利用하여 近似化하고 Hermite 展開法을 適用하여 推定式을 樹立하였다.

이 狀態推定式과 共分散式은 現在時間에서의 觀測值의 2次項까지 包含하므로 本 論文에서 展開한 同定機構는 觀測值의 2次 非線形으로 表示된다.

## 2. 本 論

### (1) 問題의 記述

다음과 같은 離散值系方程式으로 記述할 수 있는 動的系의 非線形 프렌트와 觀測系에 對하여 檢討하기로 한다.

$$\text{狀態方程式: } x_{k+1} = f(x_k) + v_k \quad (1)$$

$$\text{觀測方程式: } z_k = g(x_k) + w_k \quad (2)$$

但,  $x_k$ : 時間  $k (=t_k)$ 일 때의  $n$ 次元 狀態 vector  
 $f(x_k)$ : 時間  $k (=t_k)$ 일 때의  $n$ 次元 非線形 vector 函數

$v_k$ : 時間  $k (=t_k)$ 일 때의 各段獨立的인  $n$ 次元 白色 正規性雜音 vector

$z_k$ : 時間  $k (=t_k)$ 일 때의  $r$ 次元 觀測 vector  
 $g(x_k)$ : 時間  $k (=t_k)$ 일 때의  $r$ 次元 非線形 vector 函數

$w_k$ : 時間  $k (=t_k)$ 일 때의 各段獨立的인  $r$ 次元 白色 正規性雜音 vector

上式에서 觀測值는 狀態變數의 非線形函數와 白色雜音의 合으로 記述되며, 檢討對象의 系의 構成圖는 그림 1과 같다.

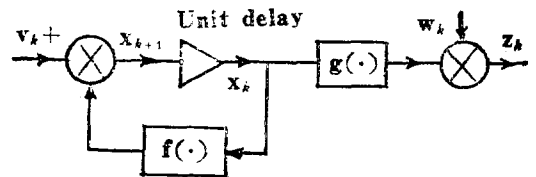


그림 1. 系의 構成圖

Fig. 1. Block diagram of the nonlinear dynamical system

觀測機構는 動特性을 갖지 않은 것으로 假定하나, 萬一 動特性을 가질 때는 새로운 狀態變數를 附加하여 觀測函數를 樹立하고 系全體로서는 같은 形式 (1), (2) 式으로 記述할 수 있다.

觀測值  $Z_k = \{z_1, z_2, \dots, z_k\}$ 에서 時間  $k$ 에서의 狀態 vector  $x(k)$ 의 最適推定值  $\bar{x}(k|k)$ 는

$$E\{\|x_k - \bar{x}_{k|k}\|^2 / Z_k\}$$

(但  $\|\cdot\|$ 는 Euclidean norm)

가 最小로 되어야 하며, 各時間  $k$ 에서의 評價로서  $M$ 회의 sample sequence의 自乘推定誤差平均值

$$J_k = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \{(x_k - \bar{x}_{k|k})^T (x_k - \bar{x}_{k|k})\}_{(i)} : (1 \leq i \leq M) \quad (3)$$

를 選定하고 이 推定機構의  $N$ 段過程에 있어서의 評價基準을

$$J = \sum_{k=1}^N J_k = \sum_{k=1}^N \left[ \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \{(x_k - \bar{x}_{k|k})^T (x_k - \bar{x}_{k|k}) / Z_k\}_{(i)} \right] \quad (4)$$

으로 選定하여 評價하고 其他的 推定機構와 比較하여 그 評價比率를  $\eta$ 로 定義키로한다.  $J = \sum_{k=1}^N J_k$ 가 最小가 되는  $x_k$ 의 推定值는 觀測值  $z_k$ 가 주어졌을 때  $x_k$ 의 期待值이며  $\bar{x}_{k|k} = E\{x_k | Z_k\}$ 이다.

따라서 狀態 vector  $x_k$ 의 推定問題는 事後確率密度函數  $p(x_k | Z_k)$ 의 評價 및 策定問題로 歸着된다. 이것에 對하여 Bayes의 定理과 Hermite 多項式의 展開法을 利用하여 解決코져 한다.

(2) 事後確率密度函數(a posteriori probability density function)의 評價

觀測值의 集合  $Z_k = \{z_1, z_2, \dots, z_k\}$ 를 求하였을때의 狀態值  $x_k$ 의 事後確率密度函數는 Bayes의 定理에 依하여

$$p(x_k | Z_k) = \frac{p(x_k | Z_{k-1}) \cdot p(z_k | x_k)}{p(z_k | Z_{k-1})} \quad (5)$$

으로 記述할 수 있다.

(5)式의 右邊의 各 構成密度函數는 다음과 같이 取扱하기로 한다.

狀態豫測의 密度函數  $p(x_k | Z_{k-1})$ 에 對하여, 平均值  $\bar{x}_{k|k-1}$ 와 共分散(covariance)  $P_{k|k-1}$ 로 構成되는 正規密度函數를 基底(basis)로 하여 Hermite 多項式의 級數展開를 한다. 여기서 quasi-moment 函數의 1次 및 2次가 零이 되도록  $\bar{x}_{k|k-1}$ 와  $P_{k|k-1}$ 의 값을 定함으로써 基底密度函數를 2次近似化에 따른 補正을 한다.

觀測豫測의 密度函數  $p(z_k | Z_{k-1})$ 에 대하여, 平均值  $\bar{z}_{k|k-1}$ 와 共分散(covariance)  $S_{k|k-1}$ 로 構成되는 正規密度函數를 基底로하여 Hermite 多項式의 級數展開를 한다. 이때 quasi-moment 函數의 1次 및 2次項이 零이 되도록  $\bar{z}_{k|k-1}$ 와  $S_{k|k-1}$ 의 값을 定하고, 補正한다.

狀態  $x_k$ 가 주어졌을때 觀測值  $z_k$ 의 條件付確率密度函數  $p(z_k | x_k)$ 는  $x_k$ 에 對하여 非正規分布이고, Hermite

展開時 그 正規密度函數部分이  $p(z_k | Z_{k-1})$ 의 展開式의 正規分布部分과 同一하게 設定하여 Bayes의 分數式의 分子分母式에서 消去되도록 定한다. 따라서 그 quasi-moment 函數의 1次項과 2次項은 이러한 制約에 因에 반드시 零이 될수는 없다.

이와같이 하여 確率密度函數  $p(x_k | Z_k)$ 는 그 展開式의 正規密度函數部分이  $p(x_k | Z_{k-1})$ 의 正規分布部分과 같아지고, 또 그 quasi-moment 函數는 觀測值의 有理式으로 나타나며 本論文에서는 이식에 따라 非線形推定機構를 構成코져 한다.

3. 推定機構의 構成

前述한 바와 같이 狀態值  $x_k$ 의 推定問題에서 事後確率密度函數  $p(x_k | Z_k)$ 의 評價問題를 解決하여야 하고 이를 Bayes의 式에 依하여 狀態豫測과 觀測豫測의 確率密度函數의 分數式으로 表現하여 分子分母式을 各各 Hermite 多項式으로 級數展開하여 이에對한 quasi-moment의 一次 및 二次項이 零이 되도록 定한 條件下에서 期待值와 共分散行列을 確定하여 事後確率密度函數  $p(x_k | Z_k)$ 의 正規分布部分의 樹立을 狀態豫測과 觀測豫測의 期待值와 共分散을 利用하여 確立하고 또 그 quasi-moment 函數도 이것들의 有理式으로 만들어 逐次的인 推定式으로 表現함으로써 推定機構의 構成을 얻고져 한다.

따라서 事後確率密度函數  $p(x_k | Z_k)$ 의 分子分母式의 成分에 對한 評價를 所定條件에 따라 確定하고 檢討키로 한다.

(1) 狀態豫測의 事後確率密度函數  $p(x_k | Z_{k-1})$ 의 評價와 그 展開式의 檢討

平均值  $\bar{x}_{k|k-1}$ 와 共分散  $P_{k|k-1}$ 로 構成되는 基底正規函數形에 따라  $p(x_k | Z_{k-1})$ 를 Hermite 多項式으로 級數展開를 하면

$$p(x_k | Z_{k-1}) = N(x_k; \bar{x}_{k|k-1}, P_{k|k-1}) \cdot \{1 + H_1^T b_1 + \frac{1}{2} b_1^T (H_2 b_2) + \sum_{\substack{m_1 \geq 3 \\ m_2 \geq 3}} \dots \sum_{\substack{m_1 + m_2 + \dots + m_n = M \\ m_1 + m_2 + \dots + m_n = M=3}} \frac{1}{(m_1! \cdot m_2! \cdot \dots \cdot m_n!)} \cdot H(m_1, m_2, \dots, m_n)(x_k - \bar{x}_{k|k-1}) \cdot b(m_1, m_2, \dots, m_n)\} \quad (6)$$

이 된다.

$$\text{但 } H_1 = P^{-1}{}_{k|k-1} (x_k - \bar{x}_{k|k-1}) \quad (7)$$

$$H_2 = -P^{-1}{}_{k|k-1} + P^{-1}{}_{k|k-1} (x_k - \bar{x}_{k|k-1}) \cdot (x_k - \bar{x}_{k|k-1})^T P_{k|k-1} \quad (8)$$

$$b_1 = \int (x_k - \bar{x}_{k|k-1}) P(x_k | Z_{k-1}) dx_k \quad (9)$$

$$b^2 = \int \{-P_{k|k-1} + (x_k - \bar{x}_{k|k-1})(x_k - \bar{x}_{k|k-1})^T\} p(x_k | Z_{k-1}) dx_k \quad (10)$$

一般으로 確率變數  $p(x)$ 는 先驗의이든 事後의인 것이든간에 前記한바와 같이 正規分布의 密度函數를

基底로하여 Hermite 多項式으로 展開할수 있으며, 이로서 非正規分布의 密度函數는 이 多項式의 2次項 까지만 考慮하여 近似化하여 表現하고자 한다.

따라서

$$p(x) \cong N(x; \bar{x}, P) \{1 + H^T_1 b_1 + \frac{1}{2} (H_2 b_2)\}$$

로 近似化하고

$$b_1 = 0$$

$$b_2 = 0$$

의 條件을 充足시키면

非正規密度函數  $p(x)$ 는 基底正規密度函數  $N(x; \bar{x}, P)$ 의 型式으로 記述할 수 있다는 點을 利用하여  $b_1 = b_2 = 0$ 가 되도록하는 期待値와 共分散을 求하고자 한다.

1次 및 2次인 quasi-moment 函數인  $b_1$ 과  $b_2$ 를 모두 零이 되게하는  $\bar{x}_{k|k-1}$ 와  $P_{k|k-1}$ 의 값은 다음과 같은 方法으로 求한다.

$$p(x_k | x_{k-1}) = N(x_k; f(x_{k-1}), C_{V(k-1)}) \tag{11}^*$$

에서 부터

$$p(x_k | Z_{k-1}) = \int p(x_k | x_{k-1}) p(x_{k-1} | Z_{k-1}) dx_{k-1} \\ = \int N(x_k; f(x_{k-1}), C_{V(k-1)}) \cdot p(x_{k-1} | Z_{k-1}) \cdot dx_{k-1} \tag{12}$$

가 되므로 이를 (9)式에 適用한다.

$$b_1 = 0 \tag{13}$$

로 하면

$$\bar{x}_{k|k-1} = \int x_k p(x_k | Z_{k-1}) dx_k \tag{14}$$

이 되므로 (12)式에 이를 代入하면

$$\bar{x}_{k|k-1} = \iint x_k N(x_k; f(x_{k-1}), C_{V(k-1)}) \cdot p(x_{k-1} | Z_{k-1}) \cdot dx_k dx_{k-1} \\ = \int f(x_{k-1}) p(x_{k-1} | Z_{k-1}) dx_{k-1} \tag{15}$$

( $b_1 = 0$ 에 對한 값)

이다.

$$\text{또} \\ b_2 = 0 \tag{16}$$

로 할 때

$$P_{k|k-1} = \int (x_k - \bar{x}_{k|k-1})(x_k - \bar{x}_{k|k-1})^T p(x_k | Z_{k-1}) dx_k \tag{17}$$

$$P_{k|k-1} = \int \{f(x_{k-1}) - \bar{x}_{k|k-1}\} \{f(x_{k-1}) - \bar{x}_{k|k-1}\}^T \\ p(x_{k-1} | Z_{k-1}) dx_{k-1} + C_{V(k-1)} \tag{18}$$

이 된다.

$x_{k|k-1}$ 에 關한 (15)式과  $P_{k|k-1}$ 에 關한 (18)式을 (6)式에 代入하면

$$p(x_k | Z_{k-1}) = N(x_k; \bar{x}_{k|k-1}; P_{k|k-1}) \rho_{xx} \tag{19}$$

이 된다.

但

$$\rho_{xx} = 1 + \sum_{m_1=3}^{\infty} \dots \sum_{m_n=3}^{\infty} \frac{1}{(m_1! \cdot m_2! \cdot \dots \cdot m_n!)} \\ \cdot H_{(m_1, m_2, \dots, m_n)}(x_k - \bar{x}_{k|k-1}) \cdot b_{(m_1, m_2, \dots, m_n)} \tag{20}$$

( $m_1 + m_2 + \dots + m_n = N = \infty$ )

(2) 觀測豫測의 密度函數  $p(z_k | Z_{k-1})$ 에 對한 檢討 平均値  $\bar{z}_{k|k-1}$ 와 共分散  $S_{k|k-1}$ 로 構成되는 正規函數를 基底로 하여  $p(z_k | Z_{k-1})$ 를 Hermite 多項式으로 級數展開를 하면

$$p(z_k | Z_{k-1}) = N(z_k; \bar{z}_{k|k-1}, S_{k|k-1}) \{1 + H_1^T b_1 + \\ \frac{1}{2} tr(H_2 \cdot b_2) + \sum_{m_1=3}^{\infty} \dots \sum_{m_r=3}^{\infty} \frac{1}{(m_1! \cdot m_2! \cdot \dots \cdot m_r!)} \\ \cdot H_{(m_1, \dots, m_r)}(z_k - \bar{z}_{k|k-1}) \cdot b_{(m_1, m_2, \dots, m_r)}\} \tag{21}$$

이며 여기서 但

$$H_1 = S^{-1}_{k|k-1} (z_k - \bar{z}_{k|k-1}) \tag{22}$$

$$H_2 = -S^{-1}_{k|k-1} + S^{-1}_{k|k-1} (z_k - \bar{z}_{k|k-1}) \cdot \\ (z_k - \bar{z}_{k|k-1})^T S^{-1}_{k|k-1} \tag{23}$$

$$b_1 = \int (z_k - \bar{z}_{k|k-1}) p(z_k | Z_{k-1}) dz_k \\ b_2 = \int \{-S_{k|k-1} + (z_k - \bar{z}_{k|k-1})(z_k - \bar{z}_{k|k-1})^T\} \\ p(z_k | Z_{k-1}) dz_k \tag{24}$$

이제 1次 및 2次的 Quasi-moment 函數인  $b_1$ 과  $b_2$ 를 各各 零으로 되게 하는  $\bar{z}_{k|k-1}$ 와  $S_{k|k-1}$ 의 값을 求하면 다음과 같다.

$$\text{즉 } p(z_k | Z_{k-1}) \text{에 關하여 (2)式으로부터} \\ p(z_k | x_k) = N(z_k; g(x_k), C_{W(k)}) \tag{25}^*$$

이므로

$$p(z_k | Z_{k-1}) = \int p(z_k | x_k) p(x_k | Z_{k-1}) dx_k \\ = \int N(z_k; g(x_k), C_{W(k)}) p(x_k | Z_{k-1}) dx_k \tag{26}$$

$$\text{(25)式에서} \\ b_1 = 0 \tag{27}$$

로 하면

$$\bar{z}_{k|k-1} = \int z_k p(z_k | Z_{k-1}) dz_k \tag{28}$$

이므로 (26)式을 上式에 代入하면

$$\bar{z}_{k|k-1} = \int z_k N(z_k; g(x_k), C_{W(k)}) p(x_k | Z_{k-1}) dz_k \cdot dx_k \\ = \int g(x_k) p(x_k | Z_{k-1}) dx_k \tag{29}$$

$$\text{또} \\ b_2 = 0 \tag{30}$$

으로 할 때

$$S_{k|k-1} = \int (z_k - \bar{z}_{k|k-1})(z_k - \bar{z}_{k|k-1})^T \cdot p(z_k | Z_{k-1}) dz_k \tag{31}$$

$$\text{(26)式을 代入하면, 마찬가지로 方法으로} \\ S_{k|k-1} = \int \{g(x_k) - \bar{z}_{k|k-1}\} \{g(x_k) - \bar{z}_{k|k-1}\}^T \\ \cdot p(x_k | Z_{k-1}) dx_k + C_{W(k)} \tag{32}$$

이 된다. 따라서 (29)式과 (32)式으로부터

$$p(z_k | Z_{k-1}) = N(z_k; \bar{z}_{k|k-1}, S_{k|k-1}) \rho_{zz} \tag{33}$$

이 確定된다. 但

$$\rho_{xx} = 1 + \sum_{m_1=3}^{\infty} \dots \sum_{m_r=3}^{\infty} \frac{1}{(m_1! \cdot m_2! \cdot \dots \cdot m_r!)} \cdot H_{(m_1, m_2, \dots, m_r)}(z_k - \bar{z}_{k|k-1}) \cdot b_{(m_1, m_2, \dots, m_r)} \quad (34)$$

(3) 狀態值  $x_k$  인 條件下에 觀測值  $z_k$  의 條件付密度 函數에 對한 檢討

이제 (25)式\*

$$p(z_k | x_k) = N(z_k : g(x_k), C_{W(k)})$$

에서 觀測值  $z_k$  는 確率變數이고 sample 值이므로 正規 分布을 갖는다(附錄 2. 參照). 事後確率密度函數  $p(x_k | Z_k)$  을 求하기 위하여 이 時間  $k$  에서의 確率變數인 狀態 值  $x_k$  를 檢討하면,  $g(x_k)$  는 非線形函數이므로 (25)式 은  $x_k$  에 關하여 非正規分布(Non-Gaussian distribution)의 密度函數가 된다.

(25)式은 Bayes의 定理에 依하여 求한 (5)式의  $p(x_k | Z_k)$  에 對하여 狀態推定の 平均値와 共分散과 같은 高次 moment 를 計算하는데 有用하다. (5)式을 狀態值  $x_k$  에 關하여 基底正規函數形을 갖는 級數 形式으로 記述하기 위하여 (25)式의  $p(z_k | x_k)$  는 다음과 같이 Hermite 多項式의 級數로 展開한다.

(5)式의 Bayes 式의 分子式中(19)式은 狀態值  $x_k$  에 關한 正規函數形式을 基底로 展開된다. 分母式인 (33)式의 正規函數部分과 相互 消去되도록  $\bar{z}_{k|k-1}$  의 (29)式과  $S_{k|k-1}$  의 (32)式으로 構成된 正規函數形式을 基底로 하여  $p(z_k | x_k)$  를 Hermite 多項式으로 級數展開하면

$$p(z_k | x_k) = N(z_k : z_{k|k-1}, S_{k|k-1}) \cdot \rho_{xx} \quad (35)$$

但

$$\rho_{xx} = 1 + H_1^T b_1 + \frac{1}{2} tr(H_2 b_2) + \sum_{m_1=3}^{\infty} \dots \sum_{m_r=3}^{\infty} \frac{1}{(m_1! \cdot m_2! \cdot \dots \cdot m_r!)} \cdot H_{(m_1, m_2, \dots, m_r)}(z_k - \bar{z}_{k|k-1}) \cdot b_{(m_1, m_2, \dots, m_r)} \quad (36)$$

$$H_1 = S^{-1}_{k|k-1}(z_k - \bar{z}_{k|k-1}) \quad (37)$$

$$H_2 = -S^{-1}_{k|k-1} + S^{-1}_{k|k-1}(z_k - \bar{z}_{k|k-1})(z_k - \bar{z}_{k|k-1})^T \cdot S^{-1}_{k|k-1} \quad (38)$$

$$b_1 = f(z_k - \bar{z}_{k|k-1}) p(z_k | x_k) dz_k \quad (39)$$

$$b_2 = f\{-S^{-1}_{k|k-1} + (z_k - \bar{z}_{k|k-1})(z_k - \bar{z}_{k|k-1})^T\} \cdot p(z_k | x_k) dz_k \quad (40)$$

여기서 quasi-moment 函數  $b_1$  및  $b_2$  의 計算을 하기 위하여  $p(z_k | x_k)$  의 (25)式을 代入하면, (39)式의  $b_1$  과 (40)式의  $b_2$  는 다음과 같이 된다.

$$b_1 = f(z_k - \bar{z}_{k|k-1}) p(z_k | x_k) dz_k = f(z_k - \bar{z}_{k|k-1}) N(z_k : g(x_k), C_{W(k)}) dz_k = f(z_k - \bar{z}_{k|k-1}) \cdot 0 \quad (41)$$

$$b_2 = f\{-S_{k|k-1} + (z_k - \bar{z}_{k|k-1})(z_k - \bar{z}_{k|k-1})^T\} p(z | x_k) dz_k = f[-S_{k|k-1} + \{(z_k - g(x_k)) + (g(x_k) - \bar{z}_{k|k-1})\} \cdot \{(z_k - g(x_k)) + (g(x_k) - \bar{z}_{k|k-1})\}^T] \cdot N(z_k : g(x_k), C_{W(k)}) \cdot dz_k = -S_{k|k-1} + C_{W(k)} + \{g(x_k) - \bar{z}_{k|k-1}\} \cdot \{g(x_k) - \bar{z}_{k|k-1}\}^T \approx 0 \quad (42)$$

따라서 (36)式의  $\rho_{xx}$  에 (37), (38), (41)式과 (42)式을 代入하면

$$\rho_{xx} = 1 + \{g(x_k) - \bar{z}_{k|k-1}\}^T S^{-1}_{k|k-1} (z_k - \bar{z}_{k|k-1}) + \frac{1}{2} tr\{-S_{k|k-1} + C_{W(k)} + (g(x_k) - \bar{z}_{k|k-1}) \cdot (g(x_k) - \bar{z}_{k|k-1})^T\} \cdot \{-S^{-1}_{k|k-1} + S^{-1}_{k|k-1} \cdot (z_k - \bar{z}_{k|k-1})(z_k - \bar{z}_{k|k-1})^T S^{-1}_{k|k-1}\}^T + \sum_{m_1=3}^{\infty} \dots \sum_{m_r=3}^{\infty} \frac{1}{(m_1! \cdot m_2! \cdot \dots \cdot m_r!)} H_{(m_1, m_2, \dots, m_r)}(z_k - \bar{z}_{k|k-1}) \cdot b_{(m_1, m_2, \dots, m_r)} \quad (43)$$

이 된다.

(4) Bayes 定理의 適用에 依한 事後確率密度函數  $p(x_k | Z_k)$  의 確定과 推定機構의 構成

$p(x_k | Z_k)$  의 分數式을 前記와 같이 檢討確定한 바를 整理하고서 (5)式의  $p(z_k | x_k)$  에 對하여는 (35)式과 (36)式을,

$$p(x_k | Z_{k-1}) \text{에 對하여는 (19)式과 (20)式을 適用하고, } p(z_k | Z_{k-1}) \text{에 對하여는 (33)式과 (34)式을 代入하면 } p(x_k | Z_k) = N(x_k : \bar{x}_{k|k-1}, P_{k|k-1}) \cdot \frac{\rho_{xx} \cdot \rho_{xx}}{\rho_{xx}} \quad (44)$$

이 된다. 但  $\rho_{xx}$ ,  $\rho_{xx}$  및  $\rho_{xx}$  는 各各 (20), (34)式 (43)式에 記述된 것임.

여기서 Hermite 多項式의 定義(附錄 I. 參照)에 따라  $\rho_{xx}$  과  $\rho_{xx}$  는  $(z_k - \bar{z}_{k|k-1})$  의 power series 로 되므로 各 quasi-moment 函數를 有限次數로 近似化할 경우 (44)式의  $p(x_k | Z_k)$  에서 各次數의 moment 는 觀測值  $z_k$  의 有理式으로 表示된다.

위와같이 評價確定한 非正規密度函數  $p(x_k | Z_k)$  의 近似式과 系函數의 2次近似式에 依據하여 非線形推定機構를 構成코져 한다.

이제 簡單한 경우로서 1次元系에서의 quasi-moment 函數를 3次項까지 考慮한 近似式에 따라 狀態推定式과 分散을 求하면 다음과 같다. 즉 (44)式으로부터

$$p(x_k | Z_k) = N(x_k : \bar{x}_{k|k-1}, P_{k|k-1}) \left\{ 1 + \left\{ \frac{g(x_k) - \bar{z}_{k|k-1}}{S_{k|k-1}} (z_k - \bar{z}_{k|k-1}) \right\} + \left[ \frac{(g(x_k) - \bar{z}_{k|k-1})^2 - (S_{k|k-1} - C_{W(k)})}{2! S^2_{k|k-1}} \{(z_k - \bar{z}_{k|k-1})^2 - S_{k|k-1}\} \right] + \left[ \frac{(g(x_k) - \bar{z}_{k|k-1})^3 - 3(S_{k|k-1} - C_{W(k)})(g(x_k) - \bar{z}_{k|k-1})}{3! S^3_{k|k-1}} \right] \right\}$$

$$\begin{aligned}
 & \cdot \left. \left\{ (z_k - \bar{z}_{k|k-1})^3 - 3(z_k - \bar{z}_{k|k-1})S_{k|k-1} \right\} \right\} \\
 & \cdot \left\{ [1 + \{(x_k - \bar{x}_{k|k-1})^2 - 3(x_k - \bar{x}_{k|k-1})P_{k|k-1}\} \right. \\
 & \cdot E\{ (f(x_{k-1}) - \bar{x}_{k|k-1})^3 | Z_{k-1} \} / (3!P_{k|k-1}^3) / \\
 & \left. \{ 1 + [\{(z_k - \bar{z}_{k|k-1})^2 - 3(z_k - \bar{z}_{k|k-1})S_{k|k-1}\} \right. \\
 & \cdot E\{ (g(x_k) - \bar{z}_{k|k-1})^3 | Z_{k-1} \} / (3!S_{k|k-1}^3) \} \} \\
 = & N(x_k; \bar{x}_{k|k-1}, P_{k|k-1}) \cdot [A_0(x_k) + A_1(x_k) \\
 & \cdot (z_k - \bar{z}_{k|k-1}) + A_2(x_k)(z_k - \bar{z}_{k|k-1})^2 + A_3(x_k) \\
 & \cdot (z_k - \bar{z}_{k|k-1})^3] / \{ B_0 + B_1(z_k - \bar{z}_{k|k-1}) \\
 & + B_3(z_k - \bar{z}_{k|k-1})^3 \} \quad (45)
 \end{aligned}$$

이 된다. 但

$$A_0(x_k) = C(x_k) \{ [1 + \{(g(x_k) - \bar{z}_{k|k-1})^2 - (S_{k|k-1} - C_{W(k)})\} / (2S_{k|k-1})] \} \quad (46)$$

$$\begin{aligned}
 A_1(x_k) = & C(x_k) \{ \{ (g(x_k) - \bar{z}_{k|k-1}) / (S_{k|k-1}) \\
 & - \{ (g(x_k) - \bar{z}_{k|k-1})^3 - 3(S_{k|k-1} - C_{W(k)}) \} (g(x_k) \\
 & - \bar{z}_{k|k-1}) \} / (2!S_{k|k-1}^2) \} \quad (47)
 \end{aligned}$$

$$A_2(x_k) = C(x_k) \{ \{ (g(x_k) - \bar{z}_{k|k-1})^2 - (S_{k|k-1} - C_{W(k)})^3 \} / (2!S_{k|k-1}^2) \} \quad (48)$$

$$A_3(x_k) = C(x_k) \{ \{ (g(x_k) - \bar{z}_{k|k-1})^3 - 3(S_{k|k-1} - C_{W(k)}) (g(x_k) - \bar{z}_{k|k-1}) \} / (3!S_{k|k-1}^3) \} \quad (49)$$

또

$$C(x_k) = [1 + \{ \{ (x_k - \bar{x}_{k|k-1})^3 - (x_k + \bar{x}_{k|k-1})P_{k|k-1} \} \cdot E\{ (f(x_{k-1}) - \bar{x}_{k|k-1})^3 | Z_{k-1} \} / (3!P_{k|k-1}^3) \} \} \quad (50)$$

$$B_0 = 1 \quad (51)$$

$$B_1 = - \frac{E\{ (g(x_k) - \bar{z}_{k|k-1})^3 | Z_{k-1} \}}{3!S_{k|k-1}^3} \quad (52)$$

$$B_3 = \frac{E\{ (g(x_k) - \bar{z}_{k|k-1})^3 | Z_{k-1} \}}{3!S_{k|k-1}^3} \quad (53)$$

이제

$$\bar{A}_i = f(x_k - \bar{x}_{k|k-1}) A_i(x_k) N(x_k; \bar{x}_{k|k-1}, P_{k|k-1}) dx_k \quad (54)$$

$$\bar{A}_i = f(x_k - \bar{x}_{k|k-1})^2 A_i(x_k) \cdot N(x_k; \bar{x}_{k|k-1}, P_{k|k-1}) dx_k \quad (0 \leq i \leq 3) \quad (55)$$

이라고 定義하면

$$\begin{aligned}
 \bar{x}_{k|k} = & \bar{x}_{k|k-1} + \{ \bar{A}_0 + \bar{A}_1(z_k - \bar{z}_{k|k-1}) + \bar{A}_2(z_k - \bar{z}_{k|k-1})^2 \\
 & + \bar{A}_3 \cdot (z_k - \bar{z}_{k|k-1})^3 \} / \{ B_0 + B_1(z_k - \bar{z}_{k|k-1}) \\
 & + B_3(z_k - \bar{z}_{k|k-1})^3 \} \quad (56)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 P_{k|k} = & \{ \bar{A}_0 + \bar{A}_1(z_k - \bar{z}_{k|k-1}) + \bar{A}_2(z_k - \bar{z}_{k|k-1})^2 \\
 & + \bar{A}_3(z_k - \bar{z}_{k|k-1})^3 \} / \{ B_0 + B_1(z_k - \bar{z}_{k|k-1}) \\
 & + B_3(z_k - \bar{z}_{k|k-1})^3 \} - \bar{x}_{k|k}^2 \quad (57)
 \end{aligned}$$

前記한 바와 같이 狀態vector  $x_k$ 의 推定에 對한 1次 및 2次 moment인  $\bar{x}_{k|k}$  및  $P_{k|k}$ 는 觀測值의 有理式으로 表示할 수 있다.

一般으로 quasi-moment 函數를 有限次數로 近似化하면 (44)式中的 各 moment는 觀測值  $z_k$ 의 有理式으로 表示된다.

#### 4. 狀態最適推定과 狀態最適共分散의 計算

前述한 바와 같이 評價確정한 非正規事後密度  $p(x_k | Z_k)$ 를 非線形 系函數의 두가지 2次近似式에 適用하여 最適推定機構를 構成하고자 한다.

Taylor級數展開 2次近似式과 確率의 2次近似化式의 計算法을 檢討하여 本論文中에서 試圖한 方法을 適用하기 위하여 다음과 같은 假定을 設定한다.

假定 1) 動的系(Dynamical System)와 觀測系의 非線形系函數는 Taylor 展開 2次近似式 및 確率의 2次近似式에 依하여 近似化한다.

假定 2) 모든 quasi-moment 函數는 2次項까지만 考慮하여 近似化한다. (3次項 以上은 無視함)

(19)式과 (20)式에 따라

$$p(x_k | Z_{k-1}) = N(x_k; \bar{x}_{k|k-1}, P_{k|k-1}) |_{b_1=b_2=0} \quad (58)$$

또 (33)式과 (34)式으로 부터

$$P(x_k | Z_{k-1}) = N(z_k; \bar{z}_{k|k-1}, S_{k|k-1}) |_{b_1=b_2=0} \quad (59)$$

(35), (36)式 및 (37), (38), (41), (42)式에 따라

$$P(x_k | Z_k) = N(x_k; \bar{x}_{k|k-1}, P_{k|k-1}) \cdot \rho \quad (60)$$

但

$$\begin{aligned}
 \rho = & 1 + (g(x_k) - Z_{k|k-1})^T S_{k|k-1}^{-1} (z_k - \bar{z}_{k|k-1}) \\
 & + \frac{1}{2} tr [ \{ -S_{k|k-1} + C_{W(k)} + (g(x_k) - \bar{z}_{k|k-1}) \\
 & (g(x_k) - \bar{z}_{k|k-1})^T \} Q(z_k) ] \quad (61)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 = & 1 + \frac{1}{2} tr \{ (C_{W(k)} - S_{k|k-1}) Q(z_k) \} + \{ g(x_k) \\
 & - \bar{z}_{k|k-1} \}^T S_{k|k-1}^{-1} (z_k - \bar{z}_{k|k-1}) \\
 & + \frac{1}{2} (g(x_k) - \bar{z}_{k|k-1})^T Q(z_k) (g(x_k) - \bar{z}_{k|k-1}) \quad (62)
 \end{aligned}$$

但  $Q(z_k)$ 는 對稱行列이며

$$\begin{aligned}
 Q(z_k) = & -S_{k|k-1}^{-1} + S_{k|k-1}^{-1} (z_k - \bar{z}_{k|k-1}) \\
 & \cdot (z_k - \bar{z}_{k|k-1})^T S_{k|k-1}^{-1} \quad (63)
 \end{aligned}$$

假定 3) 狀態推定共分散  $P_{k|k}$ 의 計算에 있어서는 狀態豫測 誤差의 4次moment 까지 考慮하여 計算한다.

假定 4) 前記諸假定下에 計算한 狀態推定共分散은 觀測值  $z_k$ 에 關하여 2次까지 考慮하여 計算한다.

(1) 非正規確率密度函數에 適用할 系函數의 2次近似法

여기서 適用할 系函數의 2次近似式에 있어서, 非線形인 (1)式의 系函數  $f(x_k)$  및 (2)式의 觀測系의  $g(x_k)$ 를 各各  $\bar{x}_{k|k}$ 와  $\bar{x}_{k|k-1}$ 의 近傍에서 Taylor 級數로 展開하여 2次項까지만 考慮하면 (1)式 및 (2)式은 다음과 같이 近似化된다.

$$\begin{aligned}
 x_{k+1} = & A_k + B_k(x_k - \bar{x}_{k|k}) + \sum_{i=1}^n \varphi_i(x_k - \bar{x}_{k|k})^T \\
 & C_{ki}(x_k - \bar{x}_{k|k}) + v_k \quad (64)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 z_k = & D_k + G_k(x_k - \bar{x}_{k|k-1}) + \sum_{i=1}^m \varphi_i(x_k - \bar{x}_{k|k-1})^T \\
 & H_{ki}(x_k - \bar{x}_{k|k-1}) + w_k \quad (65)
 \end{aligned}$$

但

$$\left. \begin{aligned} A_k &= f(x_k) | x_k = \bar{x}_{k|k} \\ B_k &= \frac{\partial f(x_k)}{\partial x_k^T} | x_k = \bar{x}_{k|k} \\ C_{ki} &= \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f(x_k)}{\partial x_k \partial x_k^T} | x_k = \bar{x}_{k|k-1} \\ D_k &= g(x_k) | x_k = \bar{x}_{k|k-1} \\ G_k &= \frac{\partial g(x_k)}{\partial x_k^T} | x_k = \bar{x}_{k|k-1} \\ H_{ki} &= \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g(x_k)}{\partial x_k \partial x_k^T} | x_k = \bar{x}_{k|k-1} \end{aligned} \right\} (1 \leq i \leq n) \quad (66)$$

但  $f^i(x_k)$ :  $f(x_k)$ 의  $i$  行要素 (ith row element)  
 $g^i(x_k)$ :  $g(x_k)$ 의  $i$  行要素  
 $\varphi_i$ : unit matrix of  $i$  列成分

이제

$$\begin{aligned} f(x_k) &= A_k + B_k(x_k - \bar{x}_{k|k}) + \sum_{i=1}^n \varphi_i(x_k \\ &\quad - \bar{x}_{k|k})^T C_{ki}(x_k - \bar{x}_{k|k}) + r_1 \\ g(x_k) &= D_k + G_k(x_k - \bar{x}_{k|k-1}) + \sum_{i=1}^n \varphi_i(x_k \\ &\quad - \bar{x}_{k|k-1})^T H_{ki}(x_k - \bar{x}_{k|k-1}) + r_2 \end{aligned}$$

이라고 할 때 이 近似式에 의한 誤差  $r_1, r_2$ 의 共分散

$$E(r_1^T r_1 | Z_k) = \int r_1^T r_1 p(x_k | Z_k) dx_k \quad (67)$$

$$E(r_2^T r_2 | Z_{k-1}) = \int r_2^T r_2 p(x_k | Z_{k-1}) dx_k \quad (68)$$

의 諸式을 最小化하는  $A_k, B_k, C_{ki}, D_k, G_k, H_{ki}$ 을 求하면 系函數의 確率의 2次近似式을 얻게 된다.

$p(x_k | Z_k)$ 는 (60)式에서와 같이 非正規分布(non-Gaussian distribution)이나  $A_k, B_k, C_{ki}$  등의 係數 計算의 便宜上 近似化하여 計算한다.

(58)式의

$$p(x_k | Z_{k-1}) = N(x_k; \bar{x}_{k|k-1}, P_{k|k-1})$$

인 非正規分布의 近似正規化形式을 適用하면

$$\left. \begin{aligned} A_k &= E[f(x_k) | Z_k] - \sum_{i=1}^n \varphi_i \text{tr}(C_{ki} P_{k|k}) \\ B_k &= E[f(x_k) e_{k|k} | Z_k] P_{k|k}^{-1} \\ C_{ki} &= \frac{1}{2} P_{k|k}^{-1} [E(f(x_k) e_{k|k} e_{k|k}^T | Z_k) \\ &\quad - E(f(x_k) | Z_k) P_{k|k}] P_{k|k}^{-1} \\ D_k &= E(g(x_k) | Z_{k-1}) - \sum_{i=1}^n \varphi_i \text{tr}(H_{ki} P_{k|k-1}) \\ G_k &= E(g(x_k) e_{k|k-1}^T | Z_{k-1}) P_{k|k-1}^{-1} \\ H_{ki} &= \frac{1}{2} P_{k|k-1}^{-1} [E(g^i(x_k) e_{k|k-1} e_{k|k-1}^T | Z_{k-1}) \\ &\quad - E(g^i(x_k) | Z_{k-1}) P_{k|k-1}] P_{k|k-1}^{-1} \end{aligned} \right\} (69)$$

但  $e_{k|k} = x_k - \bar{x}_{k|k}$

$$e_{k|k-1} = x_k - \bar{x}_{k|k-1} \quad (71)$$

系의 方程式 (1)과 (2)式에 上記 (69)와 (70)式을 代入하면 (64)式과 (65)式의 形式으로 近似化된다.

### (2) 計算 algorithm

前述한 바 프렌트 및 觀測系의 非線形系函數의 2次近似式에 本論文에서 評價策定한 非正規分布確率密度 函

數의 Hermite 展開 近似法을 適用하여  $p(x_k | Z_k)$ 를 確定하고 이에 따라서 最適推定器構成에 對한 algorithm을 樹立하며, 아울러 推定共分散行列의 逐次計算 algorithm을 導出하고자 한다.

(1) 現在時間을  $k$ 로 할 경우

$(k-1)$  時間까지의 觀測值에 依한 狀態豫測分布  $p(x_k | Z_{k-1})$ 는 (58)式에 따라  $N(x_k; \bar{x}_{k|k-1}, P_{k|k-1})$ 의 形式으로 주어진다.

(2) 狀態豫測의 密度函數  $p(x_k | Z_{k-1})$  近似式計算

$p(x_k | Z_{k-1}) N(x_k; \bar{x}_{k|k-1}, P_{k|k-1}) = N(e_{k|k-1}; 0, P_{k|k-1})$ 을 適用하여 (40)式과 (43)式으로부터  $\bar{x}_{k|k-1}$ 와  $S_{k|k-1}$ 을 算定한다. 이 때

$$\begin{aligned} g(x_k) &= D_k + G_k(x_k - \bar{x}_{k|k-1}) \\ &\quad + \sum_{i=1}^n \varphi_i(x_k - \bar{x}_{k|k-1})^T H_{ki}(x_k - \bar{x}_{k|k-1}) \quad (72) \\ &= D_k + G_k e_{k|k-1} + \sum_{i=1}^n \varphi_i e_{k|k-1}^T H_{ki} e_{k|k-1} \quad (73) \end{aligned}$$

을 (29)式에 代入하면

$$\begin{aligned} \bar{x}_{k|k-1} &= \int g(x_k) p(x_k | Z_{k-1}) dx_k \quad (74) \\ &= E[D_k + G_k e_{k|k-1} + \sum_{i=1}^n \varphi_i e_{k|k-1}^T H_{ki} e_{k|k-1} | Z_{k-1}] \quad (75) \end{aligned}$$

이 된다.

또 誤差  $e_{k|k-1}$ 의 奇數 moment는 모두 零 이므로

$$\bar{x}_{k|k-1} = D_k + \sum_{i=1}^n \varphi_i \text{tr}(H_{ki} P_{k|k-1}) \quad (76)$$

(32)式에 (73) 및 (76)式을 代入하면

$$\begin{aligned} S_{k|k-1} &= \int (g(x_k) - \bar{x}_{k|k-1})(g(x_k) - \bar{x}_{k|k-1})^T \\ &\quad \cdot p(x_k | Z_{k-1}) dx_k + C_w(k) \quad (77) \\ &= E\{[G_k e_{k|k-1} + \sum_{i=1}^n \varphi_i (e_{k|k-1}^T H_{ki} e_{k|k-1} \\ &\quad - \text{tr}(H_{ki} P_{k|k-1}))] [G_k e_{k|k-1} \\ &\quad + \sum_{i=1}^n \varphi_i (e_{k|k-1}^T H_{ki} e_{k|k-1} \\ &\quad - \text{tr}(H_{ki} P_{k|k-1}))]^T | Z_{k-1}\} + C_w(k) \\ &= G_k P_{k|k-1} G_k^T + 2 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \varphi_i \varphi_j \text{tr}(H_{ki} P_{k|k-1} H_{kj} \\ &\quad \cdot P_{k|k-1}) + C_w(k) \quad (78) \end{aligned}$$

上記 諸式으로 부터 (59)式의 分布

$$p(x_k | Z_{k-1}) = N(x_k; \bar{x}_{k|k-1}, S_{k|k-1}) \quad (79)$$

을 決定한다.

(3) 狀態最適推定器와 狀態最適共分散의 決定

i) 狀態推定의 確率密度函數  $p(x_k | Z_k)$ 의 決定 (61)式의  $g(x_k)$ 에 (73)式을 代入하고  $\bar{x}_{k|k-1}$ 에 (76)式을 代入하면,

$$\begin{aligned} p(x_k | Z_k) &= N(x_k; \bar{x}_{k|k-1}, P_{k|k-1}) \cdot \rho \\ &= N(e_{k|k-1}; 0, P_{k|k-1}) [1 + \frac{1}{2} \text{tr}\{(C_w(k)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & -S_{k|k-1})Q(z_k) + \{G_k e_{k|k-1} + \sum_{i=1}^r \varphi_i \{e_{k|k-1}^T \\
 & H_{ki} e_{k|k-1} - tr(H_{ki} P_{k|k-1})\}^T S^{-1}_{k|k-1} (z_k - \bar{z}_{k|k-1}) \\
 & + \frac{1}{2} \{e_{k|k-1}^T G^T_k Q(z_k) G_k e_{k|k-1} + e_{k|k-1}^T G^T_k Q(z_k) \\
 & \cdot \sum_{i=1}^r \varphi_i \{e_{k|k-1}^T H_{ki} e_{k|k-1} - tr(H_{ki} P_{k|k-1})\} \\
 & + \sum_{i=1}^r \varphi_i \{e_{k|k-1}^T H_{ki} e_{k|k-1} - tr(H_{ki} P_{k|k-1})\} Q(z_k) \\
 & \cdot G_k e_{k|k-1} + \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \varphi_i^T Q(z_k) \varphi_j \{e_{k|k-1}^T H_{ki} e_{k|k-1} \\
 & - tr(H_{ki} P_{k|k-1})\} \{e_{k|k-1}^T H_{kj} e_{k|k-1} - tr(H_{kj} P_{k|k-1})\} \} \} \quad (80)
 \end{aligned}$$

但  $Q(z_k)$ 는 (63)式으로 주어지는 對稱行列이다.

ii) 最適推定器(optimal estimator)의 策定

最適推定器

$$\bar{x}_{k|k} = \int x_k p(x_k | Z_k) dx_k \quad (81)$$

를 求하고자 (80)式의 事後密度函數에 따라

$$e_{k|k-1} = x_k - \bar{x}_{k|k-1} \quad (82)$$

의 平均  $\bar{e}_{k|k-1}$ 을 求하면 다음과 같다.

$$\bar{e}_{k|k-1} \triangleq \int (x_k - \bar{x}_{k|k-1}) p(x_k | Z_k) dx_k \quad (83)$$

$$\begin{aligned}
 & = \int e_{k|k-1} \{e_{k|k-1}^T G^T_k S^{-1}_{k|k-1} (z_k - \bar{z}_{k|k-1}) + e_{k|k-1}^T G^T_k \\
 & Q(z_k) \sum_{i=1}^r \varphi_i \{e_{k|k-1}^T H_{ki} e_{k|k-1} - tr(H_{ki} P_{k|k-1})\} \} \\
 & \cdot N(e_{k|k-1}; 0, P_{k|k-1}) de_{k|k-1} \quad (84)
 \end{aligned}$$

上式에서

$\{e_{k|k-1}^T H_{ki} e_{k|k-1} - tr(H_{ki} P_{k|k-1})\}$ 는 scalar 量이다.

$$\begin{aligned}
 \therefore \bar{e}_{k|k-1} & = P_{k|k-1} G^T_k S^{-1}_{k|k-1} (z_k - \bar{z}_{k|k-1}) \\
 & + 2 \sum_{i=1}^r P_{k|k-1} H_{ki} P_{k|k-1} G^T_k Q(z_k) \varphi_i \quad (85)
 \end{aligned}$$

따라서 最適推定器 (81)式은 (82)式과 (85)式에 依하여

$$\bar{x}_{k|k} = \bar{x}_{k|k-1} + \bar{e}_{k|k-1} \quad (86)$$

$$\begin{aligned}
 \bar{x}_{k|k} & = \bar{x}_{k|k-1} + P_{k|k-1} G_k S_{k|k-1} (z_k - \bar{z}_{k|k-1}) \\
 & + 2 \sum_{i=1}^r P_{k|k-1} H_{ki} G_k Q(z_k) \varphi_i \quad (87)
 \end{aligned}$$

iii) 推定共分散(Estimation Covariance)  $P_{k|k}$ 의 計算

$$P_{k|k} = \int (x_k - \bar{x}_{k|k})(x_k - \bar{x}_{k|k})^T p(x_k | Z_k) dx_k \quad (88)$$

을 求하기 위하여 (88)式에 (86)式을 代入하면

$$\begin{aligned}
 P_{k|k} & = \int (x_k - \bar{x}_{k|k-1} - \bar{e}_{k|k-1})(x_k - \bar{x}_{k|k-1} - \bar{e}_{k|k-1})^T \\
 & \cdot p(x_k | Z_k) dx_k \\
 & = \int (x_k - \bar{x}_{k|k-1})(x_k - \bar{x}_{k|k-1})^T p(x_k | Z_k) dx_k \\
 & - \bar{e}_{k|k-1} \bar{e}_{k|k-1}^T \\
 & = \int e_{k|k-1} e_{k|k-1}^T [1 + \frac{1}{2} tr\{(C_{W(k)} - S_{k|k-1})Q(z_k)\} \\
 & \cdot \sum_{i=1}^r \varphi_i \{e_{k|k-1}^T H_{ki} e_{k|k-1} - tr(H_{ki} P_{k|k-1})\} \\
 & \cdot S_{k|k-1} (z_k - \bar{z}_{k|k-1}) + \frac{1}{2} e_{k|k-1}^T \\
 & \cdot G^T_k Q(z_k) G_k e_{k|k-1}] \cdot N(e_{k|k-1}; 0, P_{k|k-1}) \\
 & \cdot de_{k|k-1} - \bar{e}_{k|k-1} \bar{e}_{k|k-1}^T \quad (89)
 \end{aligned}$$

$\bar{e}_{k|k-1} \bar{e}_{k|k-1}^T$ 의 (85)式을 (89)式에 代入하고 假定

(4)를 適用하면

$$\begin{aligned}
 P_{k|k} & = P_{k|k-1} [1 + \frac{1}{2} tr\{(-S_{k|k-1} + C_{W(k)})Q(z_k)\} \\
 & + 2 \sum_{i=1}^r P_{k|k-1} H_{ki} P_{k|k-1} \varphi_i^T S^{-1}_{k|k-1} (z_k - \bar{z}_{k|k-1}) \\
 & + \frac{1}{2} tr\{G^T_k Q(z_k) G_k P_{k|k-1}\} P_{k|k-1} \\
 & + P_{k|k-1} G^T_k Q(z_k) G_k P_{k|k-1} \\
 & - \{P_{k|k-1} G^T_k S^{-1}_{k|k-1} (z_k - \bar{z}_{k|k-1})\} \\
 & \cdot \{P_{k|k-1} G^T_k S^{-1}_{k|k-1} (z_k - \bar{z}_{k|k-1})\}^T] \quad (90)
 \end{aligned}$$

또  $Q(z_k)$ 는 (63)式에서 觀測值  $z_k$ 의 2次項을 包含하므로 (87)式의 最適狀態推定值  $\bar{x}_{k|k}$  및 (90)式의 推定共分散  $P_{k|k}$ 는 觀測值  $z_k$ 에 關한 2次項을 包含한다.

(4) 狀態豫測의 計算

狀態推定の 逐次推定計算을 하기 위하여 다음 時間  $(k+1)$ 의 狀態豫測의 平均値  $\bar{x}_{k+1|k}$  및 共分散  $P_{k+1|k}$ 를 求하여야 한다.

$p(x_k | Z_k)$ 의 (80)式을 適用하고 (87)式의 平均値와 (90)式의 共分散을 갖는 基底正規密度函數  $N(x_k; \bar{x}_{k|k}, P_{k|k})$ 로서 近似化하면 近似密度函數는

$$\begin{aligned}
 N(x_k; \bar{x}_{k|k}, P_{k|k}) & = N(e_{k|k}; 0, P_{k|k}) \\
 & \quad (\text{但 } e_{k|k} = x_k - \bar{x}_{k|k}) \quad (91)
 \end{aligned}$$

이 된다.

이를 適用하여  $\bar{x}_{k+1|k}$ 과  $P_{k+1|k}$ 를 다음과 같이 計算할 수 있다.

$$\begin{aligned}
 \text{이 때 } f(x_k) & \text{는 (64)式의 近似式中} \\
 f(x_k) & = A_k + B_k (x_k - \bar{x}_{k|k}) \\
 & \quad + \sum_{i=1}^n \varphi_i (x_k - \bar{x}_{k|k})^T C_{ki} (x_k - \bar{x}_{k|k}) \quad (92)
 \end{aligned}$$

$$= A_k + B_k e_{k|k} + \sum_{i=1}^n \varphi_i e_{k|k}^T C_{ki} e_{k|k} \quad (93)$$

을 代入하여,  $\bar{x}_{k+1|k}$  및  $P_{k+1|k}$ 를 各各  $\bar{z}_{k|k-1}$ 와  $S_{k|k-1}$ 의 計算과 同一한 方法에 따라서 計算하면

$$x_{k+1|k} = \int f(x_k) p(x_k | Z_k) dx_k \quad (94)$$

$$= A_k + \sum_{i=1}^n \varphi_i tr(C_{ki} P_{k|k}) \quad (95)$$

$$\begin{aligned}
 P_{k+1|k} & = \int (f(x_k) - \bar{x}_{k+1|k})(f(x_k) - \bar{x}_{k+1|k})^T \\
 & \cdot p(x_k | Z_k) dx_k + C_{V(k)} \quad (96)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & = B_k P_{k|k} B_k^T + 2 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \varphi_i \varphi_j tr(C_{ki} P_{k|k} C_{kj} P_{k|k}) \\
 & \quad + C_{V(k)} \quad (97)
 \end{aligned}$$

이다. 上式을 (58)式에 適用하면

$$P(x_{k+1} | Z_k) = N(x_{k+1}; \bar{x}_{k+1|k}, P_{k+1|k}) \quad (98)$$

이다.



(5) 先驗值  $N(x_1; \bar{x}_{1,0}, P_{1,0})$ 가 주어졌을 때의 近似觀測系의 係數 計算

i) Taylor 級數展開 2次近似式에 對한 計算은 (66) 式을 適用한다. 이때  $\bar{x}_{1,0}$  만이 必要하다.

ii) 確率의 2次近似式에 對한 計算은 (69) 및 (70) 式에 依하여 計算한다.  $z_{1,0}$  는 (76) 式에 依하여 計算하고  $S_{1,0}$  는 (78) 式에 依하여 計算한다. 또 確率密度 函數  $N(z_1; z_{1,0}, S_{1,0})$  는 (60) 式에 따라 計算한다.

觀測情報  $z_1$  의 값을 (87) 式과 (90) 式에 代入하면 最適推定 平均值  $\bar{x}_{1,1}$  및 共分散  $P_{1,1}$  의 값이 各各 計算된다.

다음 時間의 狀態推定에는 系가 (91) 式의 近似確率 密度函數  $N(x_1; \bar{x}_{1,1}, P_{1,1})$  을 갖는다고 假定한다.

여기서 近似化한 動的系(approximated dynamical system)의 係數計算은 다음과 같이 한다.

iii) Taylor 級數展開 2次近似式에 對한 係數計算에 (66) 式을 適用한다. 여기서는  $\bar{x}_{1,1}$  만이 必要하다.

iv) 確率의 2次近似式에 對한 計算은 (69) 및 (70) 式에 依하여 決定한다. (87) 式에 따라  $\bar{x}_{2,1}$  을 決定하고, (90) 式에 依하여  $P_{2,1}$  를 計算한다. (98) 式에 依하여 確率密度函數  $N(x_2; \bar{x}_{2,1}, P_{2,1})$  를 計算한다.

v) 先驗分布密度函數의 값으로  $N(x_1; \bar{x}_{1,0}, P_{1,0})$  의 代身에  $N(x_2; \bar{x}_{2,1}, P_{2,1})$  를 取하면 反復하여 逐次推定 計算을 할 수 있다.

### 5. 例 題

非線形 2次元系의 例를 考察하기로 한다.

여기서 各 時間 즉 各段에서의 評價로서 30回의 sample sequence 의 平均值

$$J_k = \frac{1}{30} \sum_{i=1}^{30} [x(k) - \bar{x}(k|k)]^T [x(k) - \bar{x}(k|k)]_{(i)}$$

를 選定하기로 한다. 但,

$$[x(k) - \bar{x}(k|k)]^T [x(k) - \bar{x}(k|k)]_{(i)}$$

는  $1 \leq i \leq 30$  인  $i$  번째의 sample sequence 에 있어서  $k$  時間의 自乘推定誤差이다. 이 推定機構의 機能을 比較하기 위하여 10段過程에 있어서의 評價基準을

$$J = \sum_{k=1}^{10} J_k = \sum_{k=1}^{10} \left[ \frac{1}{30} \sum_{i=1}^{30} [x(k) - \bar{x}(k|k)]^T [x(k) - \bar{x}(k|k)]_{(i)} \right]$$

로하고, 그 評價改善率  $\eta$  를 다음과 같이 比較自乘誤差 減少率로서 規定하기로 한다.

$$\text{(Athans의 } 2\text{次近似推定機構의 } J = \sum_{k=1}^{10} J_k)$$

$$- \text{(比較對象機構의 } J = \sum_{k=1}^{10} J_k)$$

$$\eta = \frac{\text{---}}{\text{(Athans의 } 2\text{次近似推定機構의 } J = \sum_{k=1}^{10} J_k)} \times 100\%$$

프랜트의 狀態方程式이

$$x_1(k+1) = 0.5x_1(k) + x_1^2(k) + x_1^3(k) + x_1^4(k) + 0.5x_2(k)$$

$$x_2(k+1) = x_2(k)$$

觀測系의 方程式이

$$z_1(k) = x_1(k) + x_1^2(k) + x_1^3(k) + x_1^4(k) + x_2(k) + w_1(k)$$

$$z_2(k) = x_2(k) + w_2(k)$$

인 非線形系의 初期值  $x_1(1) = x_2(1)$  를 變化시킬 때의 評價改善率을 檢討코자 한다.

但, 雜音의 平均值는 零이며, 共分散은

$$C_w(k) = \left[ \frac{x_1^2(1)}{100} \right] \cdot I \quad (I: \text{unitary matrix})$$

으로 한다. 先驗值(a priori value)로서

$$\text{平均值 } \bar{x}(1|0) = 0$$

으로 하고 先驗共分散(a priori covariance)는

$$P_{1,0} = \left[ \frac{1}{2} [x_1(1) + 2x_1^2(1)] - \frac{1}{6} \sqrt{9(x_1(1) + 2x_1^2(1))^2 - 12(x_1^3(1) + x_1^4(1))} \right] \cdot I$$

로 選定한 경우를 考察하기로 한다.

이제 非線形系函數의 2次近似化로 因한 誤差를  $r$  라 하면 (60) 式에 따라

$$g(x_1) = D_1 + G_1(x_1 - \bar{x}_{1,0}) + \sum_{i=1}^2 \varphi_i(x_1 - \bar{x}_{1,0})^T \cdot H_{1i}(x_1 - \bar{x}_{1,0}) + r$$

確率의 2次近似式에 있어서 (70) 式으로부터

$$D_1 = \begin{bmatrix} -3P_{1,0}(1,1) \\ 0 \end{bmatrix} \quad G_1 = \begin{bmatrix} 1 + 3P_{1,0}(1,1) & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$H_1 = \begin{bmatrix} 1 + 6P_{1,0}(1,1) & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad H_2 = 0$$

이고, 函數近似化誤差  $r$  는

$$r_s = [x_1^3(1) + x_1^4(1) + 3P_{1,0}(1,1) - 3P_{1,0}(1,1) x_1(1) - 6P_{1,0}(1,1)x_1^2(1)0]^T$$

이다.

Taylor 展開 2次近似式에 있어서 (66) 式에 따라

$$D_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad G_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad H_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad H_2 = 0$$

이고, 그 函數近似化誤差  $r_s$  는

$$r_s = [x_1^3(1) + x_1^4(1)0]^T$$

여기서  $r_s$  는 初期共分散(initial covariance)의 函數가 됨을 알 수 있다. 函數近似化誤差의 比較指標

$$\text{로서 } \frac{\|r_s\|^2}{\|r_s\|^2} \text{를 擇하면}$$

$$\frac{\|r_s\|^2}{\|r_t\|^2} = \left[ 1 - 3 \left( \frac{p_{110}(1,1)x_1(1) + p_{110}(1,1)(2x_1^2(1) - p_{110}(1,1))}{x_1^3(1) + x_1^4(1)} \right)^2 \right]$$

이 되고, 이 比較指標의 最小點의 하나는

$$P_{110}(1,1) = \frac{1}{2} [x_1(1) + 2x_1^2(1)] - \frac{1}{6} [9(x_1(1) + 2x_1^2(1))^2 - 12(x_1^3(1) + x_1^4(1))] \frac{1}{2}$$

이 된다.

이제 Taylor 展開 2次近似式과 確率의 2次近似式에 Hermite 級數展開에 依한 事後確率函數近似法을 適用하여 構成한 推定機構 및 確率의 線形化法(stochastic linearization)의 推定機構를 Athans의 推定機構와 比較한 評價改善率  $\eta$ 를 計算한 結果는 表 1과 같다.

初期值  $x_1(1) = x_2(1)$ 의 값이 極히 작은 範圍에서는 Hermite 展開法은 系函數非線形項에 거의 效果를 미치지 않으며, 線形系와 別差異가 없고 評價改善은 매우 적다.

그러나, 初期值가 增加함에 따라 評價(自乘誤差)改善率은 向上되고, 一定한 範圍에서 最大로 되며, 初期值가 이보다 커지면 오히려 減少한다. 即 初期值가 一定한 範圍內에서 漸次 커짐에 따라 非線形項의 效果가 顯著히 나타나며, 非線形推定機構의 特性이 뚜렷이 나타나서 評價는 改善되거나 初期值가 이 範圍를 지나서 더욱 커지면 非線形項의 效果가 過度로 나타나서 前記한 諸假定條件을 滿足하지 못하므로 評價改善率은 오히려 低下되어 간다.

表 1. Hermite 展開近似 推定機構와 Athans 推定機構의 比較한 評價(自乘誤差)改善率

Table 1. The improvement rate of the estimator performance as compared with Athans estimator vs. the initial value

初期值 $x_1(1) = x_2(1)$	推定機構誤差改善率 $\eta$ (%)		
	Hermite-Taylor 展開 2次近似法 (%)	Hermite 展開-確率 2次近似法 (%)	確率線形化法 (%)
$3.0 \times 10^{-4}$	0.17	0.17	0
$3.5 \times 10^{-4}$	0.18	0.18	0
$5.0 \times 10^{-4}$	0.42	0.42	0
$1.0 \times 10^{-3}$	0.81	0.81	0
$2.0 \times 10^{-3}$	1.30	1.30	0
$3.0 \times 10^{-3}$	2.20	2.20	0
$6.0 \times 10^{-3}$	3.40	3.40	0
$1.0 \times 10^{-2}$	4.80	4.80	0
$1.5 \times 10^{-2}$	5.20	5.20	0
$2.0 \times 10^{-2}$	4.10	4.10	0
$2.2 \times 10^{-2}$	3.10	3.10	0
$2.5 \times 10^{-2}$	1.10	1.10	-0.05
$2.7 \times 10^{-2}$	0	0	-0.07
$3.0 \times 10^{-2}$	-1.25	-1.25	-0.11

初期值가 더욱 더 커지면, 推定共分散의 效果가 커지므로 評價는 오히려 惡化되어 간다.

그러므로 一定한 範圍內에서는 Hermite 展開法에 依한 두가지 推定機構는 其他의 推定機構에 比較하여 確實히 보다 效果의 임이 이 例題로서 例示되었다.

### 6. 未知 Parameter 의 近似推定法

이제 動的系와 觀測機構를

$$x_{k+1} = f(x_k, \theta_k) + v_k \tag{99}$$

$$z_k = g(x_k) + w_k \tag{100}$$

로 記述하기로 한다.

但  $\theta_k$ :  $m$ 次元 未知 parameter

이제 未知 parameter를 다른 狀態 vector로 取扱하여 새로운 狀態 vector  $y_k$ 를 다음과 같이 定義하기로 한다.

$$y_k^T = (x_k, \theta_k)^T \tag{101}$$

$f(x_k, \theta_k)$ 에 對하여 새로운 系函數를 다음과 같이 定義하기로 한다.

$$f(y_k) = \begin{pmatrix} f(x_k, \theta_k) \\ \theta_k \end{pmatrix} \tag{102}$$

따라서 狀態方程式과 觀測方程式은 다음과 같이 된다.

$$y_{k+1} = f(y_k) + v_k \tag{103}$$

$$z_k = g(y_k) + w_k \tag{104}$$

이것은 새로운 狀態 vector  $y_k$ 와 觀測值  $z_k$ 에 관한 方程式이므로 前述한바와 마찬가지로 方法으로 解決할 수 있다.

(1) 事後確率密度的 決定

前記한 方法을 마찬가지로 適用하여

$$p(y_k | Z_k) = N(y_k; \hat{y}_{k|k-1}, R_{k|k-1}) \cdot \rho$$

$$= N(e_{k|k-1}; 0, R_{k|k-1}) [1 + \frac{1}{2} tr \{ (C_{W(k)} - S_{k|k-1}) Q(z_k) \} + [G_k e_{k|k-1} + \sum_{i=1}^r \varphi_i (e^{T_{k|k-1}} \cdot H_{ki} e_{k|k-1} - tr(H_{ki} R_{k|k-1}))^T] S^{-1}_{k|k-1} (z_k - \bar{z}_{k|k-1}) + \frac{1}{2} [e^{T_{k|k-1}} G^T_k Q(z_k) G_k e_{k|k-1} + e^{T_{k|k-1}} G^T_k Q(z_k) \sum_{i=1}^r \varphi_i (e^{T_{k|k-1}} H_{ki} e_{k|k-1} - tr(H_{ki} R_{k|k-1}))]] + \sum_{i=1}^r \varphi_i (e^{T_{k|k-1}} H_{ki} e_{k|k-1} - tr(H_{ki} R_{k|k-1})) Q(z_k) \cdot G_k e_{k|k-1} + \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \varphi_i^T Q(z_k) \varphi_j (e^{T_{k|k-1}} H_{ki} e_{k|k-1} - tr(H_{ki} R_{k|k-1})) (e^{T_{k|k-1}} H_{kj} e_{k|k-1} - tr(H_{kj} R_{k|k-1}))]] \tag{105}$$

但  $Q(z_k)$ 는 (76)式으로 주어지는 對稱行列.

$R_{k|k-1}$ 는  $z_k$ 觀測下의  $y_k$ 의 推定共分散行列임.

2) 最適推定器의 構成도 마찬가지로

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_{k|k} &= \mathbf{y}_{k|k-1} + \mathbf{R}_{k|k-1} \mathbf{G}_k^T \mathbf{S}^{-1} \mathbf{z}_k - \bar{\mathbf{z}}_{k|k-1} \\ &+ 2 \sum_{i=1}^r \mathbf{R}_{k|k-1} \mathbf{H}_{ki} \mathbf{G}_k^T \mathbf{Q}(\mathbf{z}_k) \varphi_i \end{aligned} \quad (106)$$

이 된다.

3) 推定共分散의 計算도 마찬가지로 다음과 같이 된다

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{k|k} &= \mathbf{R}_{k|k-1} [1 + \frac{1}{2} \text{tr} \{ (-\mathbf{S}_{k|k-1} + \mathbf{C}_{W(k)}) \mathbf{Q}(\mathbf{z}_k) \} \\ &+ 2 \sum_{i=1}^r \mathbf{R}_{k|k-1} \mathbf{H}_{ki} \mathbf{R}_{k|k-1} \varphi_i^T \mathbf{S}^{-1} \mathbf{z}_k - \bar{\mathbf{z}}_{k|k-1} \\ &+ \frac{1}{2} \text{tr} (\mathbf{G}_k^T \mathbf{Q}(\mathbf{z}_k) \mathbf{G}_k \mathbf{R}_{k|k-1}) \mathbf{R}_{k|k-1} \\ &+ \mathbf{R}_{k|k-1} \mathbf{G}_k^T \mathbf{Q}(\mathbf{z}_k) \mathbf{G}_k \mathbf{R}_{k|k-1} \\ &- \{ \mathbf{R}_{k|k-1} \mathbf{G}_k^T \mathbf{S}^{-1} \mathbf{z}_k - \bar{\mathbf{z}}_{k|k-1} \} \\ &\cdot \{ \mathbf{R}_{k|k-1} \mathbf{G}_k^T \mathbf{S}^{-1} \mathbf{z}_k - \bar{\mathbf{z}}_{k|k-1} \}^T] \end{aligned} \quad (107)$$

또  $\mathbf{Q}(\mathbf{z}_k)$ 는 (63)式에서 觀測值  $\mathbf{z}_k$ 의 2次項을 포함하므로 (87)式 및 (90)式의 最適狀態推定值  $\mathbf{y}_{k|k}$  및 推定共分散  $\mathbf{R}_{k|k}$ 는 觀測值  $\mathbf{z}_k$ 에 關한 2次項을 包含한다.

4) 狀態 및 parameter의 豫測計算도 같은 方法으로 다음과 같이 된다.

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_{k+1|k} &= \left. \begin{matrix} \mathbf{x}_{k+1} \\ \theta_{k+1} \end{matrix} \right|_{\mathbf{Z}_k} = \int \mathbf{f}(\mathbf{y}_k) p(\mathbf{y}_k | \mathbf{Z}_k) d\mathbf{y}_k \\ &= \mathbf{A}_k + \sum_{i=1}^n \varphi_i \text{tr} (\mathbf{C}_{ki} \mathbf{R}_{k|k}) \end{aligned} \quad (108)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{k+1|k} &= \int (\mathbf{f}(\mathbf{y}_k) - \mathbf{y}_{k+1|k}) (\mathbf{f}(\mathbf{y}_k) - \mathbf{y}_{k+1|k})^T \\ &\cdot p(\mathbf{y}_k | \mathbf{Z}_k) d\mathbf{y}_k + \mathbf{C}_{V(k)} \\ &= \mathbf{B}_k \mathbf{R}_{k|k} \mathbf{B}_k^T + 2 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \varphi_i \varphi_j \text{tr} (\mathbf{C}_{ki} \mathbf{R}_{k|k} \mathbf{C}_{kj} \mathbf{R}_{k|k}) \\ &+ \mathbf{C}_{V(k)} \end{aligned} \quad (109)$$

5) 따라서 마찬가지로 方法으로  $\mathbf{y}_{k+1}$ 에 關한 事後確率密度  $p(\mathbf{y}_{k+1} | \mathbf{y}_k)$ 의 近似式은

$$p(\mathbf{y}_{k+1} | \mathbf{Z}_k) \cong N(\mathbf{y}_{k+1}; \mathbf{y}_{k+1|k}, \mathbf{R}_{k+1|k}) \quad (110)$$

으로 決定된다.

### 7. 例 題

系의 動特性과 觀測系가 scalar 量으로 다음과 같이 記述되는 경우를 考察하기로 한다.

$$\begin{aligned} x_1(k+1) &= \theta_0 x_1(k) + \xi x_1^3(k) + v_1(k) \\ z(k) &= x_1(k) + w(k) \end{aligned}$$

但  $\theta_0$ 는  $p(\theta) \cong N(\theta; \bar{\theta}, \mathbf{R}_\theta)$ 의 先驗確率密度를 갖는 未知 parameter이고  $\xi$ 는 既知의 定數임.

이제 새로운 狀態vector  $\mathbf{y}(k)$ 를 다음과 같이 定義키로 한다.

$$\begin{aligned} \mathbf{y}(k) &= \begin{bmatrix} y_1(k) \\ y_2(k) \end{bmatrix} \\ y_2(k) &= \theta_0 \end{aligned}$$

이제 系의 方程式은

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_{k+1} &= \mathbf{f}(\mathbf{y}_k) + \mathbf{v}_k \\ z_k &= \mathbf{y}_k + w_k \end{aligned}$$

$$\text{但 } \mathbf{f}(\mathbf{y}_k) = \begin{bmatrix} y_1(k) y_2(k) + \xi y_1^3(k) \\ y_2(k) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{v}(k) = \begin{bmatrix} v_1(k) \\ 0 \end{bmatrix}$$

마찬가지 方法에 따라

$\mathbf{Z}_k \triangleq \{z_1(0), z_1(1), \dots, z_1(k)\}$ 를 觀測하였을 때의 未知 parameter  $\theta_0$ 의 事後確率密度函數는

$$\begin{aligned} p(\theta_0 | \mathbf{Z}_k) &= C_\theta \exp \left\{ -\frac{1}{2} \mathbf{C}^{-1} v_{(k-1)} \sum_{i=1}^k [x_1(i) - \theta_0 x_1(i-1) \right. \\ &\quad \left. - \xi x_1^3(i-1)]^2 - \theta_0^2 \cdot \mathbf{R}^{-1} \mathbf{z}_{k-1} \right\} \end{aligned}$$

로 求하여진다. (但  $C_\theta$ : 定數). 前項과 同一方法으로 parameter의 逐差 推定式은

$$\begin{aligned} \bar{\theta}_{k|k} &= E(\theta_0 | \mathbf{Z}_k) \\ &= \{ \mathbf{C}^{-1} v_{(k-1)} \sum_{i=1}^k x_1(i-1) [x_1(i) - \xi x_1^3(i-1)] \} \\ &\quad \cdot \{ \mathbf{C}^{-1} v_{(k-1)} \sum_{i=1}^k x_1^2(i-1) + \mathbf{R}^{-1} \mathbf{z}_{k-1} \}^{-1} \end{aligned}$$

또 共分散은

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{k|k} &= E\{(\theta_0 - \bar{\theta}_{k|k})^2 | \mathbf{Z}_k\} \\ &= \{ \mathbf{C}^{-1} v_{(k-1)} \sum_{i=1}^k x_1^2(i-1) + \mathbf{R}^{-1} \mathbf{z}_{k-1} \}^{-1} \end{aligned}$$

으로 求하여진다.

### 8. 結 論

系雜音 및 觀測雜音이 正規性白色過程이고 系의 非線形特性이 그다지 크지 않을 경우 非線形離散系의 狀態推定에 있어 事後確率密度函數  $p(\mathbf{x}_k | \mathbf{Z}_k)$ 가 正規分布라고 假定 할 수 있으나, 系의 非線形函數가 高次非線形일 때는 이 假定은 一般的으로 成立치 아니한다. 本論文에서는 事後確率密度函數가 狀態變數의 正規分布이라고 假定하여 取扱하던 近似範圍을 擴大하여 非正規分布 範圍에서 取扱하고 그 確率密度函數를 Hermite 多項式의 級數로 展開하여 非線形의 狀態推定機構를 構成하는 方法을 樹立하였다.

狀態值와 推定值의 quasi-moment 函數를 2次項까지만 考慮하고 또 프랜트와 觀測系의 非線形系 函數를 Taylor 級數展開 2次近似式과 確率의 2次近似式에 依하여 近似化하여 非線形推定機構를 構成하기 위하여 必要한 具體的인 計算algorithm을 樹立하였다. 이러한 推定機構는 Athans의 2次近似法 推定機構보다 一定한 範圍에서 非線形評價機能(推定誤差減少率)이 優秀하다는 것을 例示하였다.

이 非線形推定機構의 特徵은 狀態推定式이 現在時間의 觀測值에 對하여 線形이 아니고 非線形인 點이며, 또 狀態推定共分散과 같은 高次 moment 式이 現在時間의 觀測值에 對하여 特別히 非線形의 關係가 있는 點이다.

Parameter 推定問題는 雜音下에서의 推定問題를 考察하고 未知의 parameter를 하나의 새로운 狀態變數로 생각하여, 이 狀態變數推定法을 擴大하여 未知

parameter 의 推定에 對한 近似法으로 適用하였다.

狀態推定과 parameter 推定은 最適制御의 手段으로 생각할 수 있으므로 最適制御方策에 包含하여 評價되 어야 할 것이며, 이것은 今後의 研究課題로 생각된다.

끝으로 本論文作成을 指導하여 주신 梁興錫教授님과 始終一貫 激勵과 支援을 하여 주신 電氣工學科 諸教授 님께 深甚한 感謝를 드립니다.

### 參 考 文 獻

- (1) M.J. Lavin: Optimum Estimation of Impulse Response in the Presence of Noise; IRE National Conv. Record, Pt. 4, pp. 174~182 (1959).
- (2) A.E. Rosenberg & D.W.C. Shen: Regression Analysis and its Application to the System Identification Problem: Reprints of 1963 JACC, pp.446~451.
- (3) Y.C. Ho & R.C.C.K. Lee: Identification of Linear Dynamic Systems; Inform. and Control Vol. 8, No.1, pp.93~110, Feb.(1965).
- (4) R.E. Kalman: A New Approach to Linear Filtering and Prediction Problems: ASME, Trans, Vol. 82, pp.3~45, March, (1960).
- (5) R.E. Kalman & R.S. Bucy: New Results in Linear Filtering and Prediction Theory; ASME, Trans, Vol. 83, pp. 95~108, March (1961).
- (6) H.Cox: On the Estimation of State Variables and Parameters for Noisy Dynamic Systems; IEEE, Trans, Vol. AC-9, No. 1, pp. 5~12, Jan. (1964).
- (7) H.J. Kushner: Dynamical Equations for Optimal Non-linear Filtering; J. Differential Equations, Vol.3, pp.179~190 (1967).
- (8) H.J. Kushner: On the Diffential Equations. Satisfied by Conditional Probability Densities of Markov Process with Applications; J. SIAM, Control, Vol. 2, No. 1, pp. 106~119 (1964).
- (9) W.M. Wonham: Some Applications of Stochastic Diffrential Equations to Optimal Non-linear Filtering; J. SIAM Control, Ser. A, Vol. 2, No. pp.347~369 (1964).
- (10) R.W. Bass, V.D. Norum & L. Schwartz: Optlimal Multichannel Non-linear Filtering; J. Math. Analysis Appl., Vol. 16, pp.152~164 (1966).
- (11) T. Fukao: System Identification by Bayesian Learning Process; Proc. of IFAC Tokyo Symp., pp.137~146, Aug. (1965).
- (12) K.S.P. Kumar: Identification of Non-linear, Non-stationary Process; Proc. of IFAC, Tokyo Symp., pp.237~243, Aug. (1965).
- (13) N. Wiener: Non-linear Problems in Random Theory; MIT Press (1958).
- (14) M. Athans, R.P. Wishner & A. Bertolini: Sub-optimal State Estimation for Continuous-Time Non-linear Systems from Discrete Noisy Measurements; JACC, pp. 364~381 (1968).
- (15) K. Srinivasan: State Estimation by Orthogonal Expansion of Probability Distribution; IEEE Trans. A.C., Vol. AC-15, pp. 3~10 (1970).
- (16) R.C. Lee: Optimal Estimation, Identification and Control; MIT Press, pp.68~69(1964).
- (17) T. Kailath: An Innovation Approach to Least Square Estimation; IEEE Trans., Vol., AC-13, pp.646~655 (1968).
- (18) Y. Sunahara: An Approximate Method of Optimal Control for Non-linear Dynamical Systems under Noisy Observation; 2nd Joint Seminar, Washington (1968).

### 附 錄 I (記號說明)

- $x_k$ : 時間  $k (=t_k)$  일 때의  $n$  次元 狀態 vector
- $f(x_k)$ :  $n$  次元 非線形 vector 函數
- $v_k$ : 時間  $k (=t_k)$  일 때의 各段獨立的인  $n$  次元 白色 正規性雜音 vector
- $z_k$ : 時間  $k (=t_k)$  일 때의  $r$  次元 觀測 vector
- $g(v_k)$ :  $r$  次元 非線型 vector 函數
- $w_k$ : 時間  $k (=t_k)$  일 때의 各段獨立的인  $r$  次元 白色 正規性雜音 vector
- $N[w_k; E_w, C_w]$ : 確率變數(白色雜音)  $w_k$ 의 平均值  $E_w$ 와 分散  $C_w$ 인 正規分布의 密度函數

$Z_k = \{z_1, z_2, \dots, z_k\}$  : 時間  $l (=t_1)$ 에서 時間  $k (=t_k)$ 까지의 觀測值의 集合

$p(x_k | Z_k)$  : 事後確率密度函數: 觀測值  $Z_k$ 가 觀測되었을 때의 狀態值  $x_k$ 의 條件付確率密度函數

$p(z_k | Z_{k-1})$  :  $Z_{k-1}$ 을 觀測 하였을 때 觀測豫測  $z_k$ 의 條件付確率密度函數

$E\{x(k) | Z_k\}$  :  $Z_k$ 를 觀測하였을 때의 狀態 vector  $x(k)$ 의 條件付期待值(conditional expectation)

$x_{k|k-1}$  :  $Z_{k-1}$ 를 觀測하였을 때의 狀態 vector  $x_k$ 의 期待值  $\bar{x}_{k|k-1} = \int x_k p(x_k | Z_{k-1}) dx_k$

$P_{k|k-1}$  : 共分散  $P_{k|k-1} = \int (x_k - \bar{x}_{k|k-1})(x_k - \bar{x}_{k|k-1})^T p(x_k | Z_{k-1}) dx_k$

$N(x_k; \bar{x}_{k|k-1}, P_{k|k-1})$  : 平均值  $\bar{x}_{k|k-1}$ , 共分散  $P_{k|k-1}$ 인  $x_k$ 의 基底正規密度函數

$S_{k|k-1}$  : 共分散  $S_{k|k-1} = \int (z_k - \bar{z}_{k|k-1})(z_k - \bar{z}_{k|k-1})^T p(z_k | Z_{k-1}) dz_k$

$\bar{z}_{k|k-1}$  : 平均值  $\bar{z}_{k|k-1} = \int z_k p(z_k | Z_{k-1}) dz_k$

$N(z_k; \bar{z}_{k|k-1}, S_{k|k-1})$  : 觀測豫測의 基底正規確率密度函數

$b_1 = \int (x_k - \bar{x}_{k|k-1}) p(x_k | Z_{k-1}) dx_k$  : 1次 quasi-moment 函數

$b_2 = \int \{-P_{k|k-1} + (x_k - \bar{x}_{k|k-1})(x_k - \bar{x}_{k|k-1})^T\} p(x_k | Z_{k-1}) dx_k$  : 2次 quasi-moment 函數

$b(m_1, m_2, \dots, m_n)$  :  $m = m_1 + m_2 + \dots + m_n$ 인  $m$ 次 quasi-moment

$$= \int G_{(m_1, \dots, m_n)}(x - \bar{x}) \cdot p(x) dx$$

$$b_1 = \int (z_k - \bar{z}_{k|k-1}) p(z_k | x_k) dz_k$$

$$b_2 = \int \{-S_{k|k-1} + (z_k - \bar{z}_{k|k-1})(z_k - \bar{z}_{k|k-1})^T\} p(z_k | x_k) dz_k$$

$$H_{(m_1, m_2, \dots, m_n)}(x - \bar{x}) : \text{多次元 Hermite 多項式} : H_{(m_1, m_2, \dots, m_n)}(x - \bar{x}) = (-1)^{m_1 + m_2 + \dots + m_n} \exp\left[-\frac{1}{2} \{(x - \bar{x})^T P^{-1} (x - \bar{x})\}\right] \cdot \frac{\partial^{m_1 + m_2 + \dots + m_n}}{\partial x_1^{m_1} \partial x_2^{m_2} \dots \partial x_n^{m_n}} \exp\left[-\frac{1}{2} \{(x - \bar{x})^T P^{-1} (x - \bar{x})\}\right]$$

附 錄 II (數式的 誘導 및 證明)

1) (25)式的 證明 : [(11)式的 證明도 이에 準함]

$$P(z_k | x_k) = N\{z_k; g(x_k), C_w(k)\} \\ = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} (C_w(k))^{-1} \exp\left[-\frac{1}{2} \{(z_k - g(x_k)) - C_w^{-1}(z_k - g(x_k))\} \dots \dots \dots (25)\right]$$

證明 :  $z_k = g(x_k) + w_k$  이므로

$$E(z_k | x_k) = \int z_k p(z_k | x_k) dz_k \\ = E\{g(x_k) + w_k | x_k\} = E\{g(x_k) | x_k\} + E\{w_k | x_k\} \\ = \int g(x_k) p(x_k | x_k) dx_k + \int w_k p(w_k | x_k) dw_k \\ = g(x_k) \int p(x_k | x_k) dx_k = g(x_k) \\ \therefore E(z_k | x_k) = g(x_k) \\ \therefore \int w_k p(w_k | x_k) dw_k = E(w_k) = 0$$

$$\text{cov}(\overline{(z_k - \overline{z_k | x_k})}) = \text{cov}\{z_k - f(x_k)\} = \text{cov}(w_k) = C_w(k)$$

$$\text{또 } b_1 = \int (z_k - \overline{(z_k | x_k)}) p(z_k | x_k) dx \\ = E(z_k | x_k) - \overline{(z_k | x_k)} = 0 \\ b_2 = \int [-\text{cov}(z_k | x_k) + (z_k - \overline{(z_k | x_k)}) \\ \cdot (z_k - \overline{(z_k | x_k)})^T] \cdot p(z_k | x_k) dz_k \\ = E\{-\text{cov}(z_k | x_k)\} + E\{\text{cov}(z_k | x_k)\} = 0$$

마찬가지로  $b_j = 0$  ( $j=3, 4, 5, \dots, n, \dots$ )

$$\therefore p(z_k | x_k) = N\{z_k; \overline{(z_k | x_k)}, \text{cov}(z_k | x_k)\} \\ \cdot [1 + H_1^T b_1 + \frac{1}{2} t_r(H_2 b_2) + \dots] \\ = N\{z_k; g(x_k), \text{cov}(w_k)\} \quad \text{O.E.D.}$$

2) 事後確率密度近似式的 證明

i)  $p(x_k | Z_{k-1}) = N(x_k; \bar{x}_{k|k-1}, P_{k|k-1})$

證明 : 이 密度函數의 無限級數展開는 2次項까지로 近似化하였다.

$$p(x_k | Z_{k-1}) \cong N\{x_k; E(x_k | Z_{k-1}), \text{cov}(x_k | Z_{k-1})\} \\ \cdot [1 + H_1^T b_1 + \frac{1}{2} t_r(H_2 b_2)] \\ = N\{x_k; \bar{x}_{k|k-1}, P_{k|k-1}\} \\ [1 + H_1^T b_1 + \frac{1}{2} t_r(H_2 b_2)] \\ \text{條件으로 } b_1 = b_2 = 0 \text{로 하였으므로} \\ p(x_k | Z_{k-1}) = N\{x_k; \bar{x}_{k|k-1}, P_{k|k-1}\} \\ \text{但 } \bar{x}_{k|k-1} \triangleq E\{x_k | Z_{k-1}\} \\ P_{k|k-1} \triangleq \text{cov}(x_k | Z_{k-1}) \quad \text{O.E.D.}$$

ii)  $P(z_k | Z_{k-1}) = N(z_k; \bar{z}_{k|k-1}, S_{k|k-1})$

證明 : 마찬가지로 2次項까지만 近似化하였으므로

$$p(z_k | Z_{k-1}) \cong N\{z_k; E(z_k | Z_{k-1}), \text{cov}(z_k | Z_{k-1})\} \\ [1 + H_1^T b_1 + \frac{1}{2} t_r(H_2 b_2)] \\ = N\{z_k; \bar{z}_{k|k-1}, S_{k|k-1}\} \\ [1 + H_1^T b_1 + \frac{1}{2} t_r(H_2 b_2)]$$

또  $b_1 = b_2 = 0$ 로 하였으므로

$$p(z_k | Z_{k-1}) = N\{z_k; \bar{z}_{k|k-1}, S_{k|k-1}\} \\ \text{但 } \bar{z}_{k|k-1} \triangleq E\{z_k | Z_{k-1}\} \\ S_{k|k-1} \triangleq \text{cov}\{z_k | Z_{k-1}\} \quad \text{Q.E.D.}$$

iii)  $p(x_k | Z_k) = N(x_k; \bar{x}_{k|k-1}, P_{k|k-1}) \rho_{zx}$   
但  $\rho_{zx} = \rho$

證明 : Bayes의 定理에 依하여

$$p(x_k | Z_k) = \frac{p(x_k | Z_{k-1}) p(z_k | x_k)}{p(z_k | Z_{k-1})}$$

證明:  $p(z_k | x_k) = N\{z_k, \overline{(z_k | x_k)}, \text{cov}(z_k | x_k)\}$   
 $= N\{z_k; g(x_k), C_{w(k)}\}$

$p(z_k | Z_{k-1}) \cong N\{z_k; \bar{z}_{k|k-1}, S_{k|k-1}\}$

과 同一한 正規分布의 確率密度函數를 基底로 하여 Hermite 多項式으로 級數展開하면

$p(z_k | x_k) = N\{z_k; z_{k|k-1}, S_{k|k-1}\}$   
 $[1 + H_1^T b_1 + \frac{1}{2} tr(H_2 b_2) + \dots]$

$b_1 = E[(z_k - \bar{z}_{k|k-1}) | x_k] = E(z_k | x_k) - \bar{z}_{k|k-1}$   
 $= E(z_k | x_k) - E(z_k | Z_{k-1}) \neq 0$

$b_2 = \{-\text{cov}(z_k | x_k) + (z_k - \bar{z}_{k|k-1}) \cdot (z_k - \bar{z}_{k|k-1})^T | x_k\}$   
 $= -C_{w(k)} + \text{cov}(z_k - z_k | Z_{k-1}) \neq 0$

마찬가지로

$b_j \neq 0. \quad (j=3, 4, 5, \dots, n, \dots)$

$\therefore p(z_k | x_k) = N\{z_k; z_{k|k-1}, S_{k|k-1}\} \cdot \rho$

但  $\rho = [1 + H_1^T b_1 + \frac{1}{2} (H_2 b_2) tr + \dots]$

$p(x_k | Z_k) = \frac{p(x_k | Z_{k-1}) p(z_k | x_k)}{p(z_k | Z_{k-1})}$   
 $= \frac{N\{x_k; \bar{x}_{k|k-1}, P_{k|k-1}\} \cdot N\{z_k; \bar{z}_{k|k-1}, S_{k|k-1}\} \cdot \rho}{N\{z_k; \bar{z}_{k|k-1}, S_{k|k-1}\}}$   
 $= N\{x_k; x_{k|k-1}, P_{k|k-1}\} \cdot \rho$

3) 系函數  $f(x_k), g(x_k)$ 의 2次近似式의 係數  $A_k, B_k, C_{ki}, D_k$  等의 計算: [(69), (70)式의 誘導]

a)  $f(x_k)$ 를  $\bar{x}_{k|k}$  周圍로 Taylor 級數로 展開하여 2次項 까지만 求하여 近似式을 만들면

$x_{k+1} = f(x_k) + v_k$   
 $\cong f(x_k) | x_k = \bar{x}_{k|k} + \frac{\partial f}{\partial x_k} (x_k - \bar{x}_{k|k})$   
 $+ \sum_{i=1}^n (x_k - \bar{x}_{k|k})_k^T \frac{1}{2} \frac{\partial^2 x_k}{\partial x_k \partial x_k^T} (x_k - \bar{x}_{k|k}) + v_k$

$= A_k + B_k(x_k - \bar{x}_{k|k}) + \sum_{i=1}^n \varphi_i(x_k - \bar{x}_{k|k})^T C_{ki}$   
 $\cdot (x_k - \bar{x}_{k|k}) + v_k$

또  $g(x_k)$ 를  $x_{k|k-1}$  周圍에서 Taylor 級數로 展開 略 하면

$z_k = g(x_k) + w_k$   
 $\cong g(x_k) | x_k = \bar{x}_{k|k-1} + \frac{\partial g(x_k)}{\partial x_k} (x_k - \bar{x}_{k|k-1})$   
 $+ \sum_{i=1}^r \varphi_i(x_k - \bar{x}_{k|k-1})^T \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g(x_k)}{\partial x_k \partial x_k^T} (x_k - \bar{x}_{k|k-1})$   
 $= D_k + G_k(x_k - \bar{x}_{k|k-1}) + \sum_{i=1}^r \varphi_i(x_k - \bar{x}_{k|k-1})^T H_{ki}$   
 $\cdot (x_k - \bar{x}_{k|k-1})$

b)  $x_{k+1} = f(x_k) + v_k = A_k + B_k(x_k - \bar{x}_{k|k})$   
 $+ \sum_{i=1}^n \varphi_i(x_k - \bar{x}_{k|k})^T C_{ki}(x_k - \bar{x}_{k|k})$

$E(x_{k+1} | Z_k)$ 를 取하면

$E\{f(x_k) + v_k | Z_k\} = E\{f(x_k) | Z_k\}$   
 $= E\{A_k | Z_k\} + E\{B_k(x_k - \bar{x}_{k|k}) | Z_k\}$   
 $+ \sum \varphi_i E\{(x_k - \bar{x}_{k|k})^T C_{ki}(x_k - \bar{x}_{k|k})\}$   
 $= A_k$

$\therefore A_k = E\{f(x_k) | Z_k\}$

$f(x_k) + w_k = A_k + B_k(x_k - x_{k|k}) + \sum_{i=1}^n \varphi_i(x_k - \bar{x}_{k|k})^T$   
 $\cdot C_{ki}(x_k - \bar{x}_{k|k})$

에  $(x_k - \bar{x}_{k|k})^T$ 을 곱하여  $E(x_k | Z_k)$ 를 取하면

$E\{[(f(x_k)(x_k - \bar{x}_{k|k})^T) + v_k(x_k - \bar{x}_{k|k})^T] | Z_k\}$   
 $= E\{A_k(x_k - \bar{x}_{k|k})^T | Z_k\}$   
 $+ E\{[B_k(x_k - \bar{x}_{k|k})(x_k - \bar{x}_{k|k})^T] | Z_k\}$   
 $+ \sum_{i=1}^n \varphi_i E\{(x_k - \bar{x}_{k|k})^T C_{ki} e_{ki} e_{ki}^T | Z_k\}$   
 $= E\{f(x_k) e_{k|k}^T | Z_k\}$   
 $= B_k P_{k|k}$

$\therefore B_k = E\{f(x_k) e_{k|k}^T | Z_k\} P^{-1}_{k|k}$

마찬가지로

$f(x_k) + v_k = A_k + B_k(x_k - \bar{x}_{k|k})$   
 $+ \sum \varphi_i(x_k - \bar{x}_{k|k})^T C_{ki}(x_k - \bar{x}_{k|k})$

$E\{[f(x_k) + v_k](x_k - \bar{x}_{k|k})(x_k - \bar{x}_{k|k})^T | Z_k\}^i$   
 $= E\{A_k(x_k - \bar{x}_{k|k})(x_k - \bar{x}_{k|k})^T | Z_k\} + \dots$   
 $= E\{[f(x_k) + v_k] e_{k|k} \cdot e_{k|k}^T | Z_k\}$   
 $= E\{[f(x_k) e_{k|k} e_{k|k}^T | Z_k]\}$

$= E\{[A_k e_{k|k} e_{k|k}^T + B_k e_{k|k} e_{k|k} e_{k|k}^T + \sum \varphi_i e_{k|k}^T C_{ki} e_{k|k} e_{k|k} e_{k|k}^T | Z_k]\}$   
 $= (A_k P_{k|k} + 0 + \sum \varphi_i P_{k|k} C_{ki} P_{k|k})^i$

또  $E\{f(x_k) P_{k|k} | Z_k\}^i = E\{[A_k P_{k|k} + B_k e_{k|k} P_{k|k} + \sum \varphi_i e_{k|k}^T C_{ki} e_{k|k} P_{k|k}] | Z_k\}^i$   
 $= (A_k P_{k|k} - \sum \varphi_i P_{k|k} C_{ki} P_{k|k})^i$   
 $\therefore E\{f^i(x_k) e_{k|k} \cdot e_{k|k}^T | Z_k\} = E\{f^i(x_k) P_{k|k} | Z_k\}$   
 $= 2P_{k|k} C_{ki} P_{k|k}$   
 $\therefore C_{ki} = \frac{1}{2} P^{-1}_{k|k} [E\{f^i(x_k) e_{k|k} e_{k|k}^T | Z_k\}]$   
 $- E\{f^i(x_k) P_{k|k} | Z_k\}] P^{-1}_{k|k}$

$z_k = g(x_k) + w_k$   
 $= D_k + G_k(x_k - \bar{x}_{k|k-1})$   
 $+ \sum_{i=1}^r \varphi_i(x_k - \bar{x}_{k|k-1})^T H_{ki}(x_k - \bar{x}_{k|k-1}) + w_k$

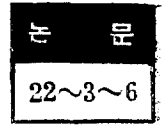
$E\{(g(x_k) + w_k) | Z_{k-1}\} - E\{g(x_k) | Z_{k-1}\}$   
 $= E\{D_k | Z_{k-1} + G_k(x_k - \bar{x}_{k|k-1}) | Z_{k-1}\}$   
 $+ E\{[\sum \varphi_i(x_k - \bar{x}_{k|k-1})^T H_{ki}(x_k - \bar{x}_{k|k-1}) + w_k] | Z_k\}$   
 $= D_k + \sum \varphi_i E\{(x_k - \bar{x}_{k|k-1})^T H_{ki}(x_k - \bar{x}_{k|k-1})\}$

$= D_k + \sum_{i=1}^r \varphi_i P_{k|k-1}$

$\therefore D_k = E\{g(x_k) | Z_{k-1}\} - \sum_{i=1}^r \varphi_i P_{k|k-1}$

# Electro-hydrodynamic Air Mover에

## 관한 연구



### Study on an EHD Air Mover

이 정 오\*, 양 배 덕\*\*  
(Chung Oh Lee, Bae Deuk Yang)

#### Abstract

When ions move in the air under an electric field, momentum is transferred from ions to neighboring particles. The wind is raised therefore, if the ion-flow is dominant in one direction. Using this mechanism, authors developed a fan which has no moving parts, and named it EHD AIR MOVER.

This paper describes its theory with experimental results. Air velocity of 450 ft/min is obtained by the ion current of  $5 \times 10^{-6} \text{ A/cm}^2$ . Comparison of the theoretical calculation with the experimental data shows satisfactory agreement.

#### 1. 서 론

EHD Air Mover(주: 이 연구에서 명명한 것으로 Electro-hydrodynamic Air Mover의 약칭임)는 강한 전계(electric field)내에 생성된 이온 또는 하전입자(charged particle)의 운동으로 중성분자에 운동량이 전달되고 결과적으로 공기의 유동(flow)을 일으키는 일종의 송풍장치(fan device)이다.

강한 전계에 노출된 유체 내에 생성된 이온이 한 방향으로 흐르게 되면 이온의 유동은 매질에 운동량을 전달하고 이온의 유동방향으로 압력의 구배가 발생한다는 사실이 옛부터 알려져 있다<sup>1)2)</sup>. 보고된 실험결과에 의하면<sup>3)4)</sup> 이 압력상승은 대기압하에서 수 10mmH<sub>2</sub>O에 달한다.

이 연구에서는 이와 같은 기초현상에 착안하여 강한 전계가 형성된 공기중에서 다량의 전하(charge)를 발생시키고 한 방향으로 운동하게 함으로써 종래의 임펠러(impeller)에 의한 장치와는 전혀 다른, 새로운 송풍장치를 개발하고자 시도되었다.

대기압하에서 많은 이온을 발생시키고 효과적인 unipolar ion conduction이 일어나도록 하기 위해서는 특정방향으로 강한 전계의 구배가 형성되어야 한다.

이러한 조건을 만족시키기 위해서 전극의 기하학적

배열이 문제가 된다. 본 연구에서는 한쪽 전극을 직경 2mil 세선(thin wire)을 적절한 간격으로 배열하고 반대편 전극은 두께 1mm의 동판을 배열한 전극구성을 사용하였다(그림(1)). 이렇게 하여 두 전극간에 적절한전압차를 걸어줌으로써 세선(thin wire)전극에서 이온을 발생시키고 동판전극에서 이온을 흡수하도록 하여, 목적하는 효과적인 공기유동을 얻을 수 있었다.

본 내용은 이러한 Air Mover에 대한 이론을 전개하여 풍속과 이온전류와의 관계식을 유도하고 이론적인 결과를 기반으로 실제 Air Mover를 설계 실험하였다.

실험실에서 제작한 단일기구로써는 이온전류가  $5 \times 10^{-6} \text{ Amp/cm}^2$ 일때 450 ft/min의 풍속을 얻을 수 있었으며 복합기구로써 단일기구를 직렬로 cascading한 경우에는 유동속도가 더욱 커진다. 이론적으로 기술한 공기의 유동속도 및 Air Mover의 효율은 실험결과와 일치하였다.

#### 2. 장치의 구조와 공기 유동 기구 (Air Flow Mechanism)

##### (1) 구조

Air Mover device 자체는 대단히 간단하여 이온을 발생시키는 ion emitter와 이온을 수집하는 ion collector로 구성된다.

Emitter와 collector의 배열은 그림(1)과 같으며 주

\* 정회원 : 한국과학원 부교수(공학박사)

\*\* 정회원 : 한국과학기술연구원 전기기기연구실(공학석사)

어진 인가전압에서 전극간의 거리를 적절히 유지하고 emitter와 collector의 수를 증감함으로써 유량의 조절이 가능하다. 부수되는 장치로서 직류 고전압 발생 장치 및 두전극간의 전류가 일정치 이상으로 흐르지 않도록 하는 한류장치가 있다.

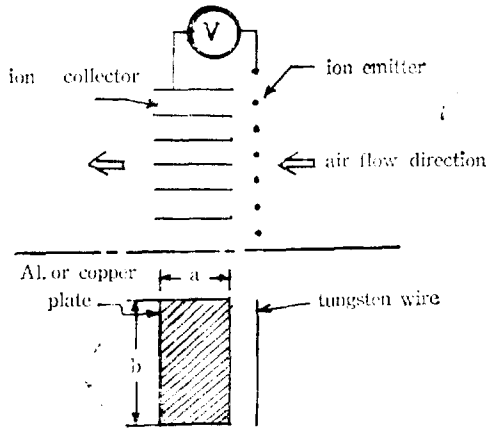


그림 1. 이론적인 model  
Fig. 1. Theoretical model

(2) 공기 유동 기구(Air Flow Mechanism)

ion emitter에 직류 고전압을 인가하면 emitter주위에 강한 전계가 형성되고 이 전계에 의하여 많은 이온이 발생하게 된다<sup>5)</sup>.

n개의 (+)(-)이온이 발생하였다면 이들 이온은 독립된 전하(charge)로써 운동한다. 즉, ion emitter와 같은 극성(polarity)인 이온은 collector쪽으로 유동하게 되고 이 유동은 많은 공기 분자에 운동량을 전달한다. 따라서 emitter 쪽에서 collector쪽으로 공기의 유동이 일어난다. 이때 이온의 유동속도 v는 아래와 같이 표시된다.

$$v = K \cdot E \propto \frac{E}{P} \text{ (m/sec)} \quad (1)$$

K: ion mobility [m<sup>2</sup>/volt·sec]  
E: electric field strength [volt/m]

3. EHD Air Mover의 이론적 고찰

Air Mover의 물리적 기구는 전술한 바와 같이 대기중에 생성된 하전입자(이온 또는 전자)의 운동량 전달이다. 실제로 공기중에는 방사선, 우주선 등에 의하여 생성된 약간의 이온 또는 대전입자가 언제나 존재한다.

대기중에서의 이온의 발생기구를 요약하면 아래와 같다.<sup>6)</sup>

(1) 이온화(ionization)

- 가. 전자의 충돌에 의한 이온화 및 여기(excitation)
- 나. 전자가 분자에 부착하는 경우
- 다. Penning effect<sup>5)</sup>에 의한 이온화
- 라. 열에 의한 이온화 및 여기(excitation)
- 마. 충격파(shock wave)에 의한 이온화<sup>6)</sup>
- 바. 이차전자 방출에 의한 이온화

이와 같이 이온화기구(mechanism)는 주로 6가지가 있으나 Air Mover에 있어서 주된 이온 발생은 강한 전계에 의해서 전자가 가속 충돌하여 이온화 된다고 보는 것이 타당하다. 따라서, "가"항과 "나"항이 주된 작용이다. 실제 Air Mover에서 이온이 발생되는 부분은 세선(직경 2mils)의 바로 부근으로 peek<sup>7)</sup>의 실험에 의하면 다음과 같은 조건에서 이온이 발생된다.

$$E > 31.3\delta \left(1 + \frac{0.301}{\sqrt{\delta r}}\right) \text{ [KV/cm]} \quad (2)$$

단, δ: 상대 공기 밀도  
r: wire의 반경 (cm)

이는 공기에서 코로나(corona)가 시작되는 전계의 세기에 해당된다.

(2) 이온화의 안정성

전계가 강하여져서 이온이 발생하면 corona가 나타나고 이 corona에 의해서 전계의 변화가 일어난다. 즉, corona에 의해서 전계가 강화되는 경우와 약화되는 경우가 생길 수 있다. corona에 의하여 전계가 강화되는 경우는 곧, 전로파괴(flash over)로 이행하여 corona가 지속될 수 없다. 반면에 전계가 약화되는 경우는 corona가 지속되므로 계속적인 이온의 공급이 가능하다. 따라서 Air Mover의 경우는 계속적인 이온의 공급이 요구되므로 후자에 속하는 특성을 지녀야한다. 즉, corona발생에 의하여 전계는

$$\frac{\partial E}{\partial r} < 0 \quad (3)$$

되는 조건을 가져야 한다. 평등 전계에서는 이와 같은 조건이 만족되지 않으며 원통전극에 있어서는 아래와 같은 조건이 성립될 때 corona가 발생하고 적절한 두께 δ를 유지할 수 있다.<sup>8)</sup>

$$\frac{b}{a} > e \quad (4)$$

여기서 a는 내부원통의 반경, b는 외부원통의 반경이다.

(3) 이론적인 모형과 해석

그림 2-1에 표시한 Air Mover의 electrode system 이나 또는 이와 유사한 건극(예: duct precipitator)의 배열에서 이온전류(ion current)를 고려하는 경우에 대한 완벽한 이론적 해석은 매우 어렵다. 엄밀한 이론적 시도는 오히려 실제 현상에 대한 물리적인 이해를 흐리게 할 만큼 복잡하다. 이러한 사실은 과거에



유사한 전극의 배열을 취급한 정전 집진기(electrostatic precipitator)의 연구에서 여러번 지적되었다<sup>9,10,11</sup>). 이 연구에서 우리는 정전 집진기의 연구에 쓰인 전통적인 한 방법을 따라<sup>9</sup>) wire-in-cylinder system에 대한 전계를 매질의 유동을 고려하여 해석하고, 그 결과를 실제의 electrode system에 확장함으로써 유동속도와 Air Mover의 효율을 계산하고 실험결과와 비교한 것이다. 이론적인 취급을 위한 기본 가정은 다음과 같다.

1) 공기의 이온화는 wire의 바로 부근에서만 일어나고, 전계내에서의 이온밀도는 매우 커서 공간전하가 전계의 분포와 이온전류의 크기를 결정하며 절연체의 표면에 축적될 수 있는 표면 전하의 효과는 무시한다.

2) 이온화 영역을 제외한 공간에는 단일 이온만이 존재한다.

가. Wire-in-Cylinder의 전계

이 경우에 전류밀도( $i$ )와 전계의 세기( $E$ ) 및 매질의 동속유도( $v$ )는 다음의 식으로 표현된다<sup>12</sup>).

$$i = 2\pi r \rho (kE + v) \quad [A/m] \quad (5)$$

여기서  $\rho$ 는 공간 전하의 밀도이고  $k$ 는 ion mobility이다.

첫항은 전계에 의한 공간 전하의 전도, 둘째항은 매질의 유동에 의한 전류에의 기여를 나타낸다. 위의 식에서 매질의 유동속도  $v$ 는 일반적으로 거리( $r$ )의 함수이므로 주어진 전압에서 일정상수가 되는 유량  $Q$ : Volume discharge rate per unit depth의 항으로 이 식을 다시 쓰기로 한다.

$$\text{즉, } i = \rho(2\pi k r E + Q) \quad (6)$$

M.K.S단위를 쓰면 Poisson방정식은 다음과 같다.

$$\frac{dE}{dr} + \frac{E}{r} - \frac{\rho}{\epsilon} = 0 \quad (7)$$

여기서  $\epsilon$ 는 매질의 유전율(permittivity)이다. 만일 공간전하가 없다면 방정식(7)의 해는 즉시 얻어진다.

$$\text{즉, } E_0 = \frac{V_0}{r l_n \left( \frac{R_2}{R_1} \right)} \quad (8)$$

여기서  $E_0$ ,  $V_0$ 는 공간전하가 없는 경우의 전계와 전위차를 나타낸다. 방정식(6)을 (7)에 대입하면,

$$\frac{dE}{dr} + \frac{E}{r} - \frac{i}{(2\pi k r E + Q)\epsilon} = 0 \quad (9)$$

이 식을 정리하면 다음과 같이 적분이 가능한 형이 된다.

$$\frac{d}{dr} \left\{ \frac{1}{2} (Er)^2 + \frac{Q}{2\pi k} (Er) \right\} = \frac{i}{2\pi k \epsilon} r$$

적분결과, 적분상수를  $c'$ 이라고 하면

$$\frac{1}{2} (Er)^2 + \frac{Q}{2\pi k} (Er) = \frac{i}{4\pi k \epsilon} r^2 + c'$$

$$\text{또는 } E = \left[ \left( \frac{i}{2\pi k \epsilon} \right) + \left\{ \left( \frac{Q}{2\pi k} \right)^2 + c' \right\} \frac{1}{r^2} \right]^{1/2} - \frac{Q}{2\pi k r} \quad (10)$$

이 식에 포함된 상수  $c$ 는 wire표면의 경계조건으로

부터 다음과 같이 결정될 수 있다.

$$c = R_1 E, \quad (11)$$

여기서  $E$ 는 wire표면에서의 전계를 표시한다.

나. Air Mover의 전계

방정식(10)에서 wire로부터 충분히 먼 거리에서는 전계가 균일하다는 것을 알 수 있다. 즉,  $i$ 가 일정한 크기를 갖고  $r$ 가 충분히 큰 경우에는

$$E \approx \sqrt{\frac{i}{2\pi k \epsilon}} \quad (12)$$

이 식은 매질의 유동을 고려하지 않은 정전집진기의 wire-in-cylinder system에 대한 전계의 표현과 일치한다.<sup>11</sup>) 방정식(11)에 실험적인 상관관계를 적용하여 duct precipitator에 대한 전계를 구한 Troost<sup>9</sup>)의 방법을 써서 그림 2-1에 표시한 Air Mover의 electrode system에서의 근사적인 전계의 표현을 얻을 수 있다. (그림 2-2참조) Troost에 의하면 duct내의 전력선은 그림 2-3과 같은 반경방향의 분포를 하고 따라서 전

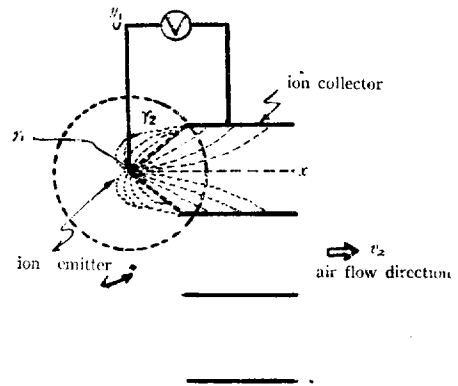


그림 2-1. EHD air mover에 있어서 실제의 분포  
Fig. 2-1. Real electric field distribution of EHD Air Mover.

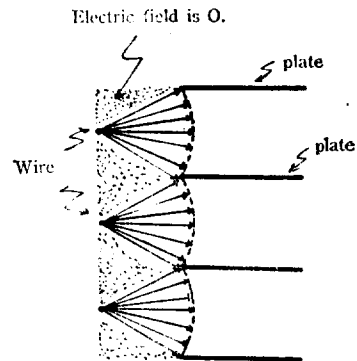


그림 2-2. 계산을 위한 전계분포  
Fig. 2-2. Modified electric field distribution for calculation

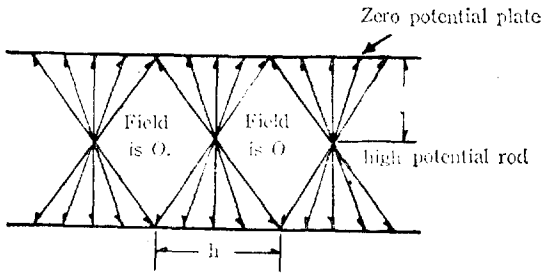


그림 2-3. Duct precipitator의 전계분포  
Fig. 2-3. Electric field distribution of duct precipitator

그림 2. EHD air mover에서의 전계 및 duct precipitator에서의 전계  
Fig. 2. Electric field distribution in EHD Air Mover and duct precipitator.

계의 세기가 0이 되는 영역이 존재하는 것으로 가정하였다. 만일 wire-in-cylinder system에 형성된 전계의 세기와 duct system에서의 전계의 세기가 같은 경우를 생각하면 duct system에서의 전류의 흐름은 wire-in-cylinder에서의 전류보다 작을 것이다. 왜냐하면 duct system에서는 전계가 없는 영역이 존재하기 때문이다. 이 경우, 전류의 크기의 비는 그림 2-3에 표시한 전계면적에 대한 전계가 없는 영역의 면적의 비에 비례할 것이다. 만일  $h=2d$ 이고 전체의 이온전류가 같다고 보면 그림 2-3에서 용이하게 알 수 있는 바와같이 전류의 비는 1/2이 된다. Troost는 duct precipitator의 전계를 구하기 위하여 식(12)에 주어진 원통형 전극에 대한 전계의 표현식에 실험을 근거로  $i$  대신  $\frac{4di}{k}$ 를 대입할 것을 제안하였다.

$$\text{즉, } E_{\text{duct precipitator}} = \sqrt{\frac{2di}{\pi k \epsilon h}} \quad (13)$$

이 식에서  $h=2d$ 인 경우에는  $E = \sqrt{\frac{i}{\pi k \epsilon}}$ 이다. 그림 1에서 보인 Air Mover의 경우는 집진된 동판의 길이  $a$ 가 공기의 유동속도에 영향을 주지 않는다는 실험 결과와 전력선의 분포를 고려하면(그림 2-2참조) 그림 2-3에 나타난 duct precipitator의 상반부 영역(region)에 근사할 것으로 가정될 수 있다. 따라서 duct precipitator에 비하여 전계가 없는 영역의 면적이 2배가 되므로 방정식(13)을 고려하면 전계의 표현을 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$E_{\text{air mover}} = \sqrt{\frac{4di}{\pi k \epsilon h}} \quad (14)$$

그러므로 방정식(14)와 (10)으로부터 Air Mover의 전극 배열에 대한 전계는 일반적으로 다음과 같이 표현될 수 있다.

$$E = \left[ \left( \frac{4di}{2\pi \epsilon h} \right) + \left\{ \left( \frac{Q}{2\pi k} \right)^2 + c^2 \right\} \frac{1}{r^2} \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$- \frac{Q}{2\pi k r} \quad (15)$$

따라서,

$$\rho = \frac{i}{2\pi k r \left[ \left( \frac{4di}{\pi k \epsilon h} \right) + \left\{ \left( \frac{Q}{2\pi k} \right)^2 + c^2 \right\} \frac{1}{r^2} \right]^{\frac{1}{2}}} \quad (16)$$

$$V = \int_{R_1}^{R_2} \left[ \sqrt{\frac{4di}{\pi k \epsilon h} + \left\{ \left( \frac{Q}{2\pi k} \right)^2 + c^2 \right\} \frac{1}{r^2}} \right] dr - \int_{R_1}^{R_2} \frac{Q}{2\pi k r} dr$$

$$= B \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \sqrt{1 + (1/\alpha^2)} d\alpha - \frac{Q}{2\pi k} \ln \left( \frac{R_2}{R_1} \right) \quad (17)$$

여기서  $\alpha$ 와  $B$ 는 다음과 같이 정의된다.

$$\alpha = \left( \frac{4di}{\pi k \epsilon h} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{r}{B} \quad (18)$$

$$B = \sqrt{c^2 + \left( \frac{Q}{2\pi k} \right)^2} \quad (19)$$

방정식(17)을 적분한 결과는 다음과 같다.

$$V = B \left\{ \sqrt{1 + \alpha_2^2} - \sqrt{1 + \alpha_1^2} - \ln \left[ \frac{\alpha_1}{\alpha_2} \frac{1 + \sqrt{1 + \alpha_2^2}}{1 + \sqrt{1 + \alpha_1^2}} \right] \right\} - \frac{Q}{2\pi k} \ln \left( \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \right) \quad (20)$$

식(18)로부터  $\alpha_1, \alpha_2$ 의 표현은 다음과 같다.

$$\alpha_1 = \left( \frac{4di}{\pi k \epsilon h} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{R_1}{B} \quad (21)$$

$$\alpha_2 = \left( \frac{4di}{\pi k \epsilon h} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{R_2}{B} \quad (22)$$

방정식(20)에서 매질의 유동이 없고( $Q=0$ ),  $\alpha_1 \ll \alpha_2 < 1$ 인 경우(전류  $i$ 가 대단히 작고  $r_1 \ll r_2$ 인 경우)를 생각하면 다음과 같이 간단한 전압-전류의 관계식을 얻을 수 있다.

이때는,

$$V \approx \frac{\alpha_2^2}{2} - \ln \left( \frac{\alpha_1}{\alpha_2} \right) \quad (23)$$

식(19)에서  $Q=0$ ,  $c=R_1 E$ , 이므로  $V^*$ 를 이온화가 시작되는 starting voltage라고 하면 식(8)로부터

$$B \approx R_1 E = V^* / \ln \left( \frac{R_2}{R_1} \right) \quad (24)$$

방정식(24)를 (23)에 대입하고 정리하면

$$i = (V - V^*) V^* \cdot \pi k \epsilon h / \left[ 2R_2^2 \ln \left( \frac{R_2}{R_1} \right) \right] \quad (25)$$

이 식은 이온화기체의 연구에서 잘 알려진 전류-전압의 관계식과 같은 형이다<sup>3)</sup>.

#### (4) 유동속도

Ion drag pressure ( $p$ )의 구배(gradient)는 전기력  $\rho E$ 와 평형되어야 하므로<sup>13)</sup>  $\frac{dp}{dr} = \rho E$  (26)

식(15)와 (16)을 위의 식에 대입하면

$$\frac{dp}{dr} = \frac{i}{2\pi k} \left\{ \frac{1}{r} - \frac{Q}{2\pi k r^2} \left[ \frac{4di}{\pi k \epsilon h} + \left\{ \left( \frac{Q}{2\pi k} \right)^2 + c^2 \right\} \frac{1}{r^2} \right] \right\}$$

이 식을 적분함으로써 ion drag에 의한 압력상승 ( $\Delta P$ )는 다음과 같이 발견된다.

$$\Delta P = \frac{i}{2\pi k} \left[ \left\{ \frac{R_2}{R_1} \frac{dr}{r} - \frac{Q}{2\pi k B} \right\} \frac{R_2}{R_1} \right. \\ \left. \frac{dr}{\left[ \frac{4di}{\pi k \epsilon h} + \left\{ \frac{Q}{2\pi k} \right\}^2 + c^2 \right]^{1/2}} \right] \\ = \frac{i}{2\pi k} \left[ \left\{ \frac{R_2}{R_1} \frac{dr}{r} - \frac{Q}{2\pi k B} \right\} \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \frac{d\alpha}{\alpha^2 (1 + 1/\alpha^2)} \right]$$

그러므로

$$\Delta p = \frac{i}{2\pi k} \left[ l_n \frac{\alpha_2}{\alpha_1} + \frac{Q}{2\pi k B} l_n \left\{ \frac{\alpha_1}{\alpha_2} \cdot \frac{1 + \sqrt{1 + \alpha_2^2}}{1 + \sqrt{1 + \alpha_1^2}} \right\} \right] \quad (27)$$

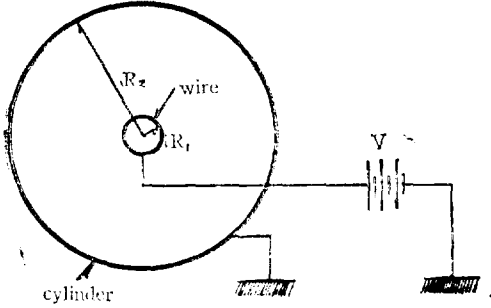


그림 3. Wire-in-cylinder system  
Fig. 3. Wire-in-cylinder system

여기서  $\alpha_1 B_1 \alpha_1$  및  $\alpha_2$ 는 식(18)(19)(21) 및 (22)에 각각 정의되어 있다. 방정식(27)에서 단일  $\alpha_1 < \alpha_2 < 1$ 인 경우를 생각하면  $\Delta p$ 의 표현은 다음과 같이 간단하게 된다.

$$\Delta p \approx \frac{i}{2\pi k} \left( l_n \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \right) \left( 1 - \frac{Q}{2\pi k B} \right) \quad (28)$$

즉, 일정한 전류에 대해서 Q의 증가는  $\Delta p$ 를 감소시킨다는 것을 나타낸다. 마찰 손실을 무시하면 압력 상승  $\Delta p$ 와 속도의 관계는 다음의 식으로 주어진다<sup>14)</sup>.

$$v_r = \sqrt{\frac{2\Delta p}{\rho_m}} \quad (29)$$

여기서  $\rho_m$ 은 공기의 밀도, 하첨자 r은 반경방향을 표시한다. 따라서 식(27)을 대입하면,

$$v_r = \left[ \frac{i}{\pi k \rho_m} \left\{ l_n \frac{\alpha_2}{\alpha_1} + \frac{Q}{2\pi k B} \right. \right. \\ \left. \left. l_n \left( \frac{\alpha_1}{\alpha_2} \cdot \frac{1 + \sqrt{1 + \alpha_2^2}}{1 + \sqrt{1 + \alpha_1^2}} \right) \right\} \right]^{1/2} \quad (30)$$

그림 4를 참조하고 속도  $v_r$ 의 x성분의 평균을 구하면

$$\langle v_x \rangle = \langle v_r \cos \theta \rangle = \frac{\int_{-\phi/2}^{\phi/2} v_r \cos \theta d\theta}{\int_{-\phi/2}^{\phi/2} d\theta} \\ = v_r \frac{2 \sin \frac{\phi}{2}}{\phi} \quad (31)$$

그러므로 식(30)을 고려하면,

$$\langle v_x \rangle = \left[ \frac{i}{\pi k \rho_m} \left\{ l_n \frac{\alpha_2}{\alpha_1} + \frac{Q}{2\pi k B} \right. \right. \\ \left. \left. l_n \left( \frac{\alpha_1}{\alpha_2} \cdot \frac{1 + \sqrt{1 + \alpha_2^2}}{1 + \sqrt{1 + \alpha_1^2}} \right) \right\} \right]^{1/2} \frac{2 \sin \phi/2}{\phi} \quad (32)$$

방정식(32)가 구하고자 하는 공기의 유동속도이다.

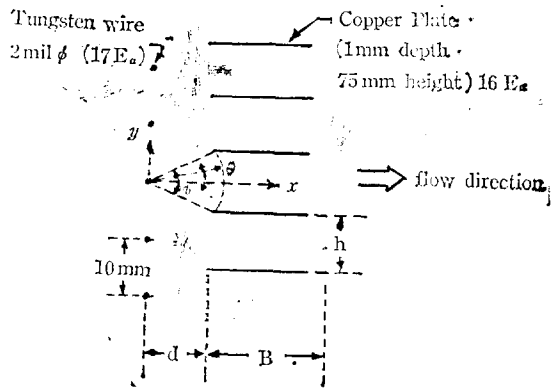


그림 4. Air Mover의 기하학적구조  
Fig. 4. Dimension of EHD Air Mover

$$\left( \phi = 2 \tan^{-1} \frac{h}{2d} \right)$$

4. 실험회로 및 장치의 개요

그림 5-1은 실험회로 및 사용기기를 표시한다. 고전압을 얻기 위해서는 500VA의 P.T(110/22000)를 직접 사용하고 rectifier는 EDH4고전압용 diode 4개를 full wave rectifier로 결선하여 z축에서 직류고전압을 사용토록 하였다.

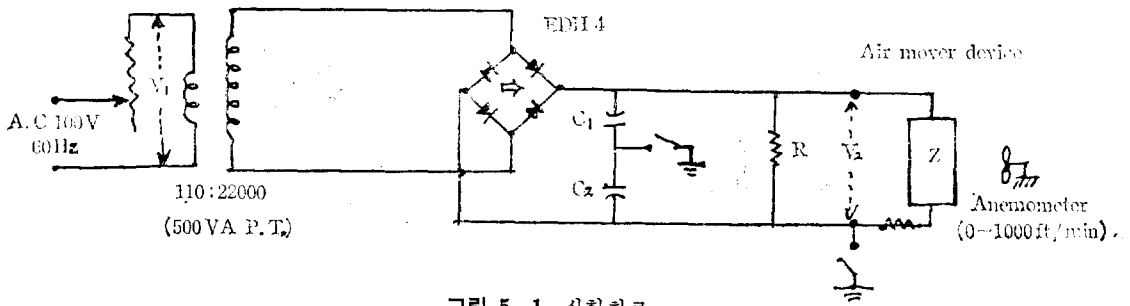


그림 5-1. 실험회로  
Fig. 5-1. Test circuit

고전압측은 한단자를 접지시키고 접지측에 Oscilloscope나 Milliampere meter를 직접연결함으로서 전류파형 및 corona전류를 측정할 수 있도록 되어 있다. 유속은 Air Mover로부터 2cm되는 곳에서 anemometer로 측정하도록 고정하고 이때의 전류는 Electrometer로 측정하였다.

Air Mover의 ion emitter는 2milφ의 텅스텐선을 쓰고 ion collector로서는 1mm 두께의 동판을 사용하였다. Air flow의 유효단면적은 75mm×170mm로 고정하였으며 emitter와 collector사이의 거리는 임의로 조절 할 수 있다.

Air Mover의 기하학적 dimension은 그림 4와 같다.

5. 실험결과 및 검토

(1) 실험결과

그림 5는 단일장치일때 이온전류에 대한 공기의 유동속도이며 그림 6은 같은장치(device)를 1개, 2개 적절로 cascading하였을 경우 이온전류에 대한 공기의 유동속도이다.

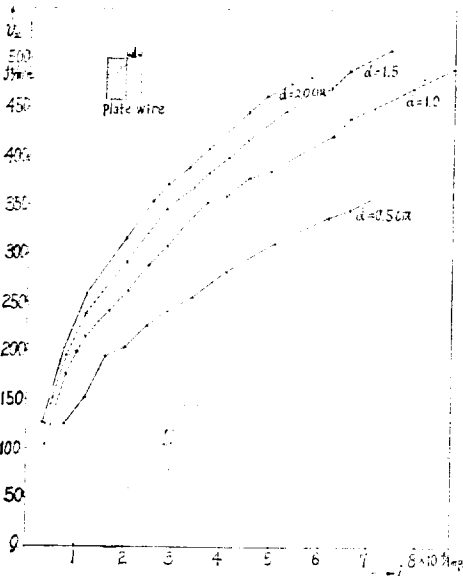


그림 5. 실험결과 (공기 유동속도-이온전류관계)  
Fig. 5. Experimental values of the EHD air mover ( $v_x$  vs  $i$ )

(2) 이론식에 대한 검토

유체의 속도를 나타내는 식 (32)을 검토해 보면 다음과 같은 사실을 지적할 수 있다.

(1) 주어진 전류에 대해서 φ가 작을수록 큰 속도를 얻을 수 있다. φ를 작게 하는 방법은 동판과 wire 사

이의 거리(d)를 wire의 간격(h)보다 더 크게 하거나, d를 일정하게 유지하고 h를 작게하는 방법이 있다. 전자의 경우에는 d가 h보다 커지면 주어진 전류를 유지하기 위해서 전위차를 증가시켜야 한다. 후자의 경우에는 wire 사이의 간격(=동판의 간격)이 어느 정도 좁아지면 wire부근에 형성되는 전계가 비교적 균일하게 되므로 충분히 높은 전압을 걸어주지 않는한, 기체의 ion화가 현저히 감소되어 전류가 작아진다.

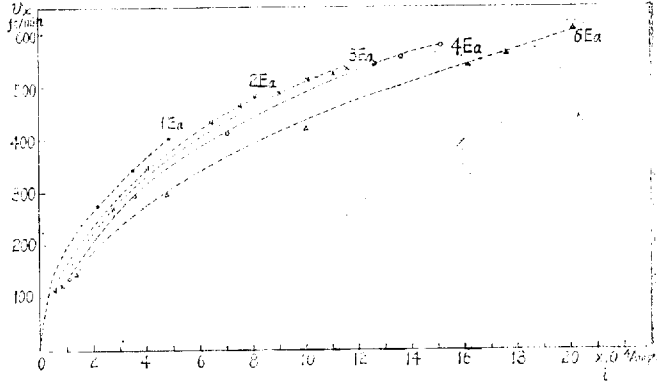


그림 6. Cascading실험결과(공기 유동속도-이온전류)  
Fig. 6. Experimental values of cascading ( $v_x$  vs  $i$ )

(2) φ→2π인 경우에는 전류의 크기에 관계없이 속도는 0이다. 이것은 실험적으로 확인되었다.

(3) 아래와 같이 대표적인 실험값을 대입하여 <math>\langle v\_x \rangle</math>를 계산해 보면 일반적으로 방정식 (32)의 제2항의 크기는 제1항의 크기에 비하여 대단히 작다는 것을 알수 있다.

\*보 기

대표적인 실험값 :

$$d=h \approx 10^{-2} \text{m}, i=10^{-5} \text{Amp/m}, k \approx 1.4 \times 10^{-4} \text{ (m/sec)/(volt/m)}$$

$$\langle v_x \rangle \approx 1 \text{m/sec}, R_1=2.54 \times 10^{-5} \text{m}, R_2=1.12 \times 10^{-2} \text{m}$$

$$E=8,854 \times 10^{-12} \text{farad/m}, E \approx 3 \times 10^6 \text{ volt/m}$$

계산 :

$$Q=h\langle v_x \rangle \approx 10^{-2} \text{ m}^3/\text{m-sec}, C=R_1 E \approx 76.2 \text{ volt}$$

$$B \approx \sqrt{\left(\frac{Q}{2\pi k}\right)^2 + C^2} \approx 77, \frac{Q}{2\pi k B} \approx 0.148, \alpha_2/\alpha_1$$

$$= \left(\frac{4di}{\pi kch}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{R_2}{B} \left/\left(\frac{4di}{\pi kch}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{R_1}{B}\right. \approx 150/0.34$$

$$\approx 440, l_n \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \approx 6.1$$

$$\left| \frac{Q}{2\pi k B} l_n \left( \frac{\alpha_1}{\alpha_2} \cdot \frac{1 + \sqrt{1 + \alpha_2^2}}{1 + \sqrt{1 + \alpha_1^2}} \right) \right| \approx 0.266$$

따라서,  $l_n \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \gg \frac{Q}{2\pi k B} l_n \left( \frac{\alpha_1}{\alpha_2} \cdot \frac{1 + \sqrt{1 + \alpha_2^2}}{1 + \sqrt{1 + \alpha_1^2}} \right)$  (33)

그러므로, 앞으로의 이론적인 계산의 편의를 위해서 식 (32)의 제2항을 무시하기로 한다. 이 근사는 위에서 보인 바와 같이 10%이내의 오차를 준다. 즉,

$$\langle v_x \rangle \approx \left[ \frac{i}{\pi k \rho_m} \left( l_n \frac{R_2}{R_1} \right) \right]^{\frac{1}{2}} \cdot 2 \frac{\sin \frac{\phi}{2}}{\frac{\phi}{2}} \quad (34)$$

3. 효율에 대한 검토

효율의 계산을 간단히 하기 위하여 Air Mover 내부의 유체역학적인 내부저항(internal hydrodynamic resistance)을 무시하기로 하자. 그러면 효율( $\eta$ )은 다음과 같이 정의될 수 있다.

$$\eta = \frac{\text{power output}}{\text{power input}} = \frac{\Delta P \cdot Q}{V_i} = \frac{\Delta P \cdot h \langle Vx \rangle}{V_i} \quad (35)$$

여기서 이미 정의한 바와 같이  $h$ 는 wire의 간격(동판의 간격과 같음),  $Q$  및  $i$ 는 각각 단위 길이당의 유량(Volume discharge rate per unit depth), 및 전류이다. 방정식 (20) (27) 및 (34)를 (35)에 대입하면 효율의 표현식은 다음과 같다.

$$\eta = \left( \frac{h}{2\pi k} \cdot \frac{\sin \phi}{\phi} \right) \cdot \left[ \frac{i}{\pi k \rho_m} l_n \frac{R_2}{R_1} \right]^{\frac{1}{2}} \cdot \left( \frac{l_n \frac{P_2}{R_1} + \frac{Q}{2\pi k B} l_n \left( \frac{R_1}{R_2} \cdot \frac{1 + \sqrt{1 + \alpha_2^2}}{1 + \sqrt{1 + \alpha_1^2}} \right)}{B \left\{ \sqrt{1 + \alpha_2^2} - \sqrt{1 + \alpha_1^2} + l_n \left( \frac{R_2}{R_1} \cdot \frac{1 + \sqrt{1 + \alpha_1^2}}{1 + \sqrt{1 + \alpha_2^2}} \right) \right\}} - \frac{Q}{2\pi k} l_n \frac{R_2}{R_1} \right) \quad (36)$$

이 식으로부터 우리는 다음과 같은 결론을 얻는다.

1) 전류의 값이 대단히 큰 경우에는,  $i \rightarrow \infty$ 를 대입하여 다음과 같은 상수를 얻는다.

$$\eta = \frac{\left( \frac{h}{2\pi k} \cdot \frac{\sin \phi}{\phi} \right) \left[ \frac{1}{\pi k \rho_m} l_n \frac{R_2}{R_1} \right]^{\frac{1}{2}} \left( l_n \frac{R_2}{R_1} \right)}{(Ad/\pi k e h)^{\frac{1}{2}} R_2} \quad (37)$$

방정식 (37)을 유도할 때 식 (36)의 분모에 있는  $B \sqrt{1 + \alpha_2^2}$ 의 항의 크기는 분모의 어떤 다른 항보다도 훨씬 크다는 사실을 이용하였다(위의 \*보기에서 대표적인 실험값을 써서 계산한 결과를 참조)

(4) 이론과 실험의 비교

그림 7, 8, 9는 wire-plate의 거리를 변화시킬 때의 실험값과 방정식 (35)로부터 계산한 이론결과를 비교한 것이다. 이들 그림에서 보는 바와 같이 약 10% 이내의 오차범위에서 이론과 실험은 일치한다. 일정한 전류에 대해서, 유속(flow velocity)은  $d/h$ 가 클수록 더 커진다는 것을 나타내고 있다. 전반적으로 이론치가 실험값보다 약간 낮은 경향을 보이는 가장 큰 이유는 이론의 계산에서  $R_2$ 의 값을 wire로부터 plate의 선단(front edge)까지의 거리로 취한데 있는듯 하다. 유동속도는 plate의 넓이  $a$ 에 별로 영향을 받지 않는다는 실험적인 사실을 근거로 우리는 plate사이에서의 ion drag의 효과를 무시하고 이론을 전개하였다. 생각한 이론적 모형에서 이러한 효과를 고려하는 경우의  $R_2$ 의

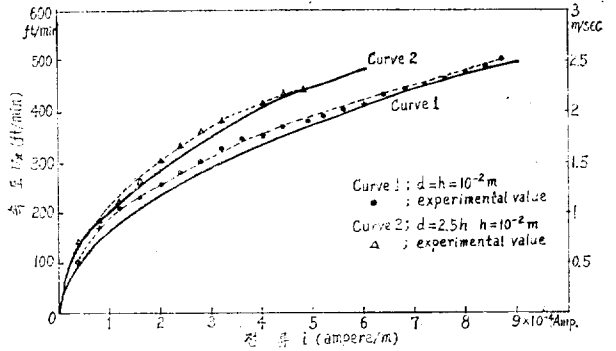


그림 7. 유동속도  $v_x$ 에 전류  $i$ 에 대한 이론과 실험의 비교

Fig. 7. Experimental values and calculated values of the flow velocity  $v_x$  vs the ion current  $i$ .

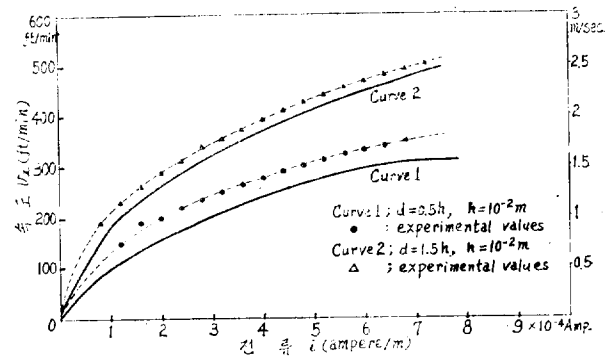


그림 8. 유동속도  $v_x$ 에 전류  $i$ 에 관한 이론과 실험의 비교

Fig. 8. Experimental values and calculated values of the flow velocity  $v_x$  vs the ion current  $i$ .

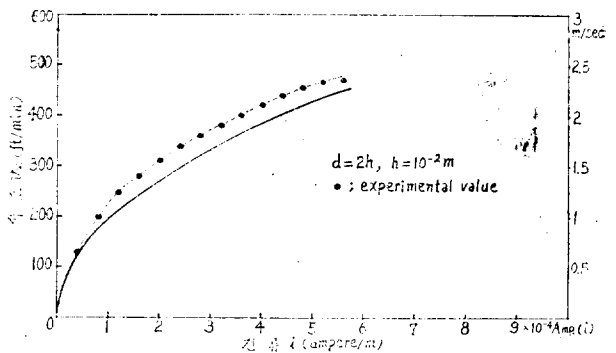


그림 9. 유동속도  $v_x$ 에 전류  $i$ 에 관한 이론과 실험의 비교

Fig. 9. Experimental values and calculated values of the flow velocity  $v_x$  vs the ion current  $i$ .

값은 plate선단으로 부터 wire까지의 거리 보다는 커야 할 것이고 결과적으로 방정식 (34)에서 보는 바와같이 이론적인 속도가 증가할 것이다. 그림 10은 방정식 (36)로 부터 계산한,  $d=h=1\text{cm}$ 인 경우의 전류에 대한 효율곡선이다. 효율( $\eta$ )은 전류가 증가함에 따라서 커지고 최대치인 1.8% (식 (37)에서 계산됨)에 접근한다. 실험범위인  $10^{-8}\sim 10^{-4}$  ampere에서의 효율은 약

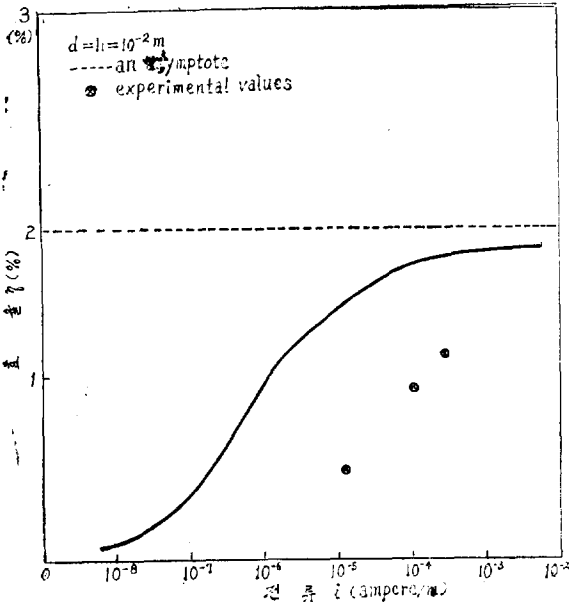


그림 10. 이론적인 효율곡선  $i>$ 에서  $\eta=1.8\%$ 에 수렴한다.

Fig. 10. Theoretical efficiency  $\eta$  vs  $i$ .

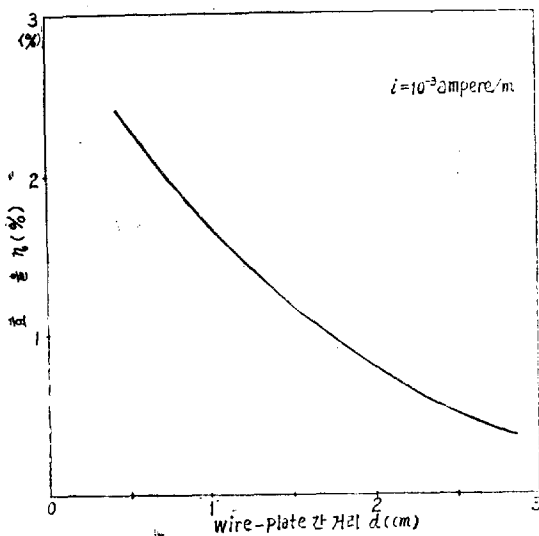


그림 11. wire-plate간 거리( $d$ )에 대한 이론적인 효율  
Fig. 11. Theoretical efficiency referred to wire-plate distance at  $i=10^{-3}$  ampere/m.

1.7%이고 실험적으로 측정된 효율 1.0%와 매우 가깝다. 방정식 (36)으로 부터 효율을 계산할 때 wire의 표면전계(electric field)  $E$ ,의 크기는 반경  $10^{-3}\text{cm}$ 의 wire에서 corona가 시작될 때의 표면전계의 값인  $3 \times 10^6$  volt/m를 취하였다. 그림 11,은 주어진 전류의 크기( $10^{-3}$  ampere)에 대하여 wire-plate의 거리( $d$ )를 변화시킬때의 효율의 변화이다. 거리 $d$ 가 커짐에 따라 효율이 감소한다는 것을 보인다. 이 이유는, wire-plate의 거리가 커짐에 따라서 일정전류를 유지하기 위해서는 더 큰 포텐셜 차를(potential difference) 유지해야 하기 때문이다. 이 때 포텐셜 차의 증가에 따르는 power input는 속도의 증가( $d$ 가 커지면 속도가 증가한다. 그림 7 참조)에 따르는 power gain에 비하여 커진다는 것을 보이고 있다.

## 6. 결 론

EHD Air Mover에 관한 결론을 종합하여 보면 아래와 같다.

(1)한 방향으로 이온의 흐름이 일어나면 많은 이온들이 공기분자에 운동량을 전달하여 공기를 유동시킨다. 이 유동방향은 언제나 이온이 발생하는 주위에서, 이온이 흡수되는 방향이다.

(2) 공기의 유동속도는 이온전류에 비례하며, 그 관계식은 아래와 같다.

$$\langle v_x \rangle \approx \left[ \frac{i}{\pi k \rho_m} I_n \left( \frac{R_2}{R_1} \right) \right]^{\frac{1}{2}} \frac{2 \sin \frac{\phi}{2}}{\phi} \quad [\text{m/sec}]$$

단,  $\langle v_x \rangle$ : X방향으로의 공기 평균속도

$i$ : ion current [A]

$k$ : ion movility [volt/m/m/sec]

$\rho_m$ : medium density [kg/m<sup>3</sup>]

$\phi$ : collector-emitter-collector가 이루는 사이 각도(radian)

$R_1$ : emitter의 반경 (m)

$R_2$ : collector-emitter간의 거리 (m)

(3) Air Mover를 직렬로 여러개를 결합하면 공기의 유동속도를 증가시킬 수 있으나 효율은 떨어진다. 이 때의 속도는 아래와 같이 표시된다.

$$v = \left( \sum_{i=1}^n v_i^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (\text{m/sec})$$

단,  $v$ : 종합속도 (m/sec)

$v_i$ : 단일 device에 의한 속도 (m/sec)

(4) Energy conversion efficiency는 이온전류의 증가와 함께 커지나 아래와 같은 상수에 접근한다.

$$\eta_{\max} = \frac{\left(\frac{h}{2\pi k} \cdot \frac{2\sin\frac{\phi}{2}}{\phi}\right) \left(\frac{1}{\pi k \rho_m} I_n \frac{R_2}{R_1}\right)^{\frac{1}{2}}}{(4d/\pi k \epsilon h)^{\frac{1}{2}} \cdot R_2}$$

따라서 최대 효율은 전극간에 전로파괴가 일어나기 직전의 전압에서 가장 좋으나 실험결과에 의하면 이 효율은 1% 내외이다.

(5) 따라서 EHD Air Mover는 일반 fan용으로 움직이는 부품이 전혀 없다는 특수성은 있지만 1%내외의 효율 및 ion에 의한 ozon의 발생과 emitter의 진동에 의한 소음 때문에, 일반 실용화를 위해서는 이 문제의 해결이 필요하다.

謝辭: 本 研究遂行에 있어서 始終 指導를 하여주신 李景瑞博士님께 深深한 感謝를 드립니다.

참 고 문 헌

- 1) Chattock, A.P.: Phil. Mag. 48, p. 410 (1899)
- 2) Harney, D.J.: "An Aerodynamic Study of the Corona Wind" thesis caltech (1957)
- 3) Leob. Leonard B.: Electrical Coronas (Their Basic Physical Mechanisms) University of California Press pp.402-407 (1965)
- 4) Stuetzer Otmar M.: Journal of Applied Physis, Vol. 30, No.7, pp. 984~995 (July 1957)
- 5) Francis Gordon: Ionization Phenomena in Gases pp.52~53 Butterworths Publications Ltd., London, (1960)
- 6) Petschek H. and Byron S.: Ann. Physics 1, p. 270 (1957)
- 7) 정성계 : 고전압공학, p.19 문운당(1970)
- 8) Leob. Leonard B.: Electrical Coronas pp. 4, University of California Press (1965)
- 9) Troost N.: Proc of IEE, Vol. 101, No.2, pp. 369~389 (1954)
- 10) Rose, H.E.: An Introduction to Electrostatic Precipitation in Theory and Practice.
- 11) white, H.J.: Industrial Electrostatic Precipitation. Addisonwesley Pub. Co. (9163)
- 12) Engel, V.: Ionized Gases Oxford Press (1965)
- 13) Stratton: Electromagenatic Theory p.46 Mc Graw-Hill Co. (1950)
- 14) Prandtl, L.: Essentials of Fluid Dynamics p.121 Hafner Pub. Co. (1952)