非線形制御系의 線形化에 의한 近似解의 研究

논 문
22∼1∼3

Approximation Method of Nonlinear Control System by Linearization

양 흥 석*·김 경 기**
(Heung Suk Yang · Kyong Ki Kim)

Abstract

This paper treats with the sub-optimal control problem of noninear systems by approximation method.

This method involves the approximation by linearization which provides the sub-optimal solution of non-linear control problems.

The result of this work shows that, in the problem in which the controlled plant is charaterized by an ordinary differential equation of first order, the solution obtained by this method coincides with the exact solution of problem. In of case of the second or higher order systems, it is proved analy ticallythat this method of linearzation produces the sub-optimal solution of the given problem. It is also shown that the sub-optimality of solution by the method can be evaluated by introducing the upper and lower bounded performance indices. Discussion is made on the procedure with some illustrative examples whose performance indices are given in the quadratic forms.

1. 緖 論

制御對象이 非線形系의 경우 一般的으로 解析的인 理論을 展開하는 것은 매우 힘든 것이며, 問題個個에 對하여 獨立的으로 取扱하여 處理하고 또 一般論의 展開가 可能할경우에도 많은 制限條件이 따른다.

따라서 非線形系의 最適解를 解析的으로 求하고저 試圖하는것보다 近似解를 求하는 것이 오히려 效果的이라고 생각된다.

이러한 接近方式에 立脚하여 Pearson은 實時間의 線形化法을 提示하였다.[1]

이 方法은 近似解를 求하는 方式이며 系의 最適制御量이 旣知인 問題에 限定하여 適用하였고, 이때 求한 近似制御量을 動作시킬때 그 位相面軌跡이 最適軌跡에 近接하는것을 圖示하였다. 그러나 近似解의 位相面軌跡이 最適軌跡에 近接되어있다고 하여 一律的으로 그 制御量이 最適이 되는 것으로 斷定할 수는 없다.[3][4][8][9]

本論文에서는 이線形化法을 擴大適用하여 最適制御量이 未知일경우에도 適用하여 近似解를 求하고 또 이에 對한 必要한 措置로서 評價函數의 값을 求하고 그正確性을 檢討하였다.

2. 本 論

制御對象이 다음의式

$$\left.\begin{array}{l} \dot{X}(\mu)=A[X(\mu)]X(\mu)+B(\mu)U(\mu) \\ X|_{\mu=t}=X(t) \end{array}\right\} \qquad (1)$$

으로 주어지고 評價函數

$$J=\int_t^{\infty}\{X^T(\mu)F[X(\mu)]X(\mu)+U^T(\mu)G[X(\mu)]U(\mu)\}\,d\mu \qquad (2)$$

를 最小化하는 問題를 考察하기로 한다. 但 여기서 $X(\mu)$는 n次元狀態벡터, $A[X(\mu)]$는 $(n\times n)$次元마트릭쓰, $B(\mu)$는 $(n\times r)$次元마트릭쓰, $U(\mu)$는 r次元制御벡터, $F[X(\mu)]$, $G[X(\mu)]$는 各各 $(n\times n)$次元 및 $(r\times r)$次

* 정회원 : 서울대학교 공과대학 교수(공학박사)
** 정회원 : 한양대학교 공과대학 교수

元의 正定値對稱마트릭쓰(positive definite symmetric matrix)이고 $X^T(\mu)$는 $X(\mu)$의 轉置벡터이다. μ와 t는 未來時間과 現在時間을 各各 表示하는 것으로 한다.

이 問題의 解를 求하기 위하여 다이나믹·프로그래밍(D.P.)을 써서 定式化하면 一般으로 最小値函數 V^*에 關한 非線型偏微分方程式이 樹立된다. 이式에서 制御對象이 非線型이고, 또 評價函數는 狀態벡터의 二次形式으로 擇하여 考察한 것이므로 이러한 問題는 解析的으로 一般解를 求하기가 어렵다. 이러한 難點을 克服하기 위하여 Pearson는 現在時間 $\mu=t$에서 制御對象을 線形化하는 方法을 適用하여 近似解를 求하는 法을 提案하였다[1]. 筆者는 評價函數를 二次形式化하는 方法을 試圖하여 解析的인 最適解를 求하는 方法을 究明하여 몇가지 경우에 對하여 考察하였다.

이제 (1)과 (2)式은 現在時間 $\mu=t$에서 다음과 같이 쓸수있다.

$$\left.\begin{array}{l} X(\mu)=A[X(t)]X(\mu)+B(\mu)U(\mu) \\ X|_{\mu=t}=X(t) \end{array}\right\} \qquad (1)'$$

$$J'=\int_t^\infty \{X^T(\mu)F[X(t)]X(\mu)+U^T(\mu)G[X(t)]. U(\mu)\}\,d\mu \qquad (2)'$$

여기서

$$V^*[X(t),X(\mu)]=\min_{U(\mu)} J' \qquad (3)$$

이라고 하면 (1)′과 (2)′式에 關하여 다음과 같은 函數方程式을 얻을수 있다.

$$\min_{U(\mu)}\{X^T(\mu)F[X(t)]X(\mu)+U^T(\mu)G[X(t)] U(\mu)+\left(\frac{\partial V^*}{\partial X(\mu)}\right)^T[A[X(t)]X(\mu) +B(\mu)U(\mu)]\}=0 \qquad (4)$$

그러므로 (4)式에서의 最適制御 $U^*(\mu)$는

$$U^*(\mu)=-\frac{1}{2}G^{-1}[X(t)]B^T(\mu)\frac{\partial V^*}{\partial X(\mu)} \qquad (5)$$

으로 表示되고, 또 (5)式을 (4)式에 代入하면

$$X^T(\mu)F[X(t)]X(\mu)-\frac{1}{4}\left(\frac{\partial V^*}{\partial X(\mu)}\right)^T\cdot B(\mu)\cdot G^{-1}[X(t)]B^T(\mu)\frac{\partial V^*}{\partial X(\mu)}+\left(\frac{\partial V^*}{\partial X(\mu)}\right)^T\cdot A[X(t)]X(\mu)=0 \qquad (6)$$

이 된다. (6)式의 解는 一般的으로

$$V^*[X(t),X(\mu)]=X^T(\mu)P[X(t)]X(\mu) \qquad (7)$$

으로 주어진다[3]. 여기서 $P[X]$는 $(n\times n)$次元正定値對稱마트릭쓰(positive definite symmetric matrix)이며 다음 (8)式을 滿足한다.

$$A^T[X(t)]P[X(t)]+P[X(t)]\cdot A[X(t)] +F[X(t)]-P[X(t)]B(\mu)G^{-1}[X(t)] B^T(\mu)P[X(t)]=0 \qquad (8)$$

따라서 이때의 最適制御量(optimal control) U^*는

$$U^*(\mu)=-G^{-1}[X(t)]B^T(\mu)P[X(t)]\cdot X(\mu) \qquad (9)$$

이 된다. 여기서 U^*는 어떤 時間 μ에서의 最適量으로 생각한것이므로 (9)式에서 $\mu=t$로 代置하면 이線形化法에 依한 制御量 U_t^*는

$$U_t^*=-G^{-1}[X(t)]B^T(t)P[X[t)]X(t) \qquad (10)$$

로 된다. (10)式은 非線形系問題에 對한 解析的인 解가 되는것이며 몇가지 實際問題에 對하여 이方法을 適用하여 그妥當性을 檢討기로 한다.

3. 一次系에 對한 考察

制御對象이 一階微分方程式

$$\dot{x}=f(x)\cdot x+u \qquad (11)$$

으로 주어지고 評價函數

$$J=\int_0^\infty[\lambda(x)x^2+u^2]d\sigma \qquad (12)$$

를 最小化하고져 하는 問題를 考察키로 한다. 但 $\lambda(x)>0$이며 $f(x)$는 偶函數이라고함.

$$V^*(x)=\min_u\int_0^\infty[\lambda(x)\cdot x^2+u^2]d\sigma$$

이라고 定하고 D.P.에 依한 定式化를 하면, $V^*(x)$에 關하여 다음과 같은 方程式을 얻는다.

$$\frac{1}{4}\left(\frac{dV^*}{dx}\right)^2-f(x)\cdot x\cdot\frac{dV^*}{dx}-x^2\lambda(x)=0 \qquad (13)$$

(5)式에 依하여 最適制御量 u^*는

$$u^*=-\frac{1}{2}\left(\frac{dV^*}{dx}\right) \qquad (14)$$

이되고 또 (13)과 (14)式에 依하여 u^*는

$$u^*=-[f(x)\cdot x\pm|x|\sqrt{f^2(x)+\lambda(x)}] \qquad (15)$$

으로 주어진다. 여기서 ±의 符號는 U^*를 (11)式에 最用하였을때 系가 漸近安定(asymptotically stable)이 되도록 選定하여 符號를 定한다. 따라서 Liapunov函數로서 $V=x^2$를 選定하여 計算하면 最適操作量 u^*는

$$u^*=-[f(x)\cdot x+x\sqrt{f^2(x)+\lambda(x)}] \qquad (15)'$$

가 되고 系는 漸近安定이 됨을 알수 있다. 여기서 $\mu=t$에서의 線形化法을 適用하면 (10)式에서

$$u_*'=-u(t)[fx(t)]+\sqrt{f^2[x(t)]+\lambda[x(t)]}] \qquad (16)$$

이 求하여 지며 (15)′式과 (16)式은 同一함을 알수 있다.

따라서 이경우에 있어서는 線形化法에 依한 解가 嚴密解(exact solution)로서 주어짐을 알 수 있다.

4. 二次系에 對한 考察

制御對象이 二階以上의 高次가 되는 경우를 考察하기 위하여 다음과 같은 簡單한 制御對象과 評價函數를 取하기로 한다.

$$\left.\begin{array}{l} \dot{x}_1=f(x_2)\cdot x_2 \\ (f:\text{正値偶函數}:\text{positive even function}) \\ \dot{x}_2=\mu \end{array}\right\} \qquad (17)$$

$$J=\int_0^\infty (x_1^2+ax_2^2+u^2)d\sigma \tag{18}$$

但 a는 正의 定數임.

이제

$$\varphi=\frac{\min}{u}\int_0^\infty (x_1^2+ax_2^2+u^2)d\sigma \tag{19}$$

라 놓고 線形化法을 適用하면 (6)式에서

$$\frac{1}{4}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_2(\mu)}\right)^2-x_2(\mu)f[x_2(t)]\frac{\partial\varphi}{\partial x_1(\mu)}$$
$$-x_1^2(\mu)-ax_2^2(\mu)=0 \tag{20}$$

이 되고 (20)式에서 $\mu=t$에서의 最適制御量(optimal control) u_t^*는

$$u_t^*=-(x_1\pm x_2\sqrt{a+2f(x)}) \tag{21}$$

이 된다. 이때 (17)式은

$$\dot{x}_1=f(x_2)x_2$$
$$\dot{x}_2=-(x_1\pm x_2\sqrt{a+2f(x_2)}) \tag{17'}$$

이 된다. 符號는 系(17)′가 漸近安定(asymptotically stable)이 되도록 選定한다.

이제 Liapunov 函數를

$$V=\frac{1}{2}x_1^2+\int_0^{x_2}xf(x)dx$$

라고 定하면 $f(x)$가 偶函數이므로 $x\neq0$일때 $V>0$이며, $\lim_{\|x\|\to\infty}V\to\infty$가 된다. 이때 +符號를 擇하면

$$\frac{dV}{dt}=x_1\dot{x}_1+x_2f(x_2)\dot{x}_2$$
$$=-x_2^2f(x_2)\sqrt{a+2f(x_2)}\leq0$$

가 된다. 이값은 半負定値(negative semidefinite)이며, x_1軸이 (17)′式의 解軌跡(solution trajectory)이 아니므로 系(17)′은 大域的 漸近安定(globally asymptotically stable)이 된다. (5)

따라서 "+"符號만을 생각하면 된다. 또 (20)式에서

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x_2(\mu)}=2\{x_1(\mu)+x_2(\mu)\sqrt{a+2f[x_2(t)]}\} \tag{22}$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x_1(\mu)}=2\{x_2(\mu)+x_1(\mu)\frac{\sqrt{a+2f[x_2(t)]}}{f[x_2(t)]}\} \tag{23}$$

의 關係式이 成立한다. 이 兩式에서 $\mu=t$라 놓을때의 式은 (20)式에서 $\mu=t$로 놓을때의 關係式을 滿足한다. (20)式에 $\mu=t$로 놓은式은 瞬時의 線形化(linearization at the instant)를 하지않은 制御對象關係式(17)에 對하여 D.P.를 適用하여 定式化할때의 關係式이 되고, 이것을 풀면 最適解가 求해진다. (22)式에 $\mu=t$라 놓을때 얻어지는式은 線形化法에 依한 制御量이지만 (22)式과 (23)式에 $\mu=t$를 代入할때 얻는 聯立偏微分方程式의 解는 存在하지 않는다. 이제 聯立偏微分方程式을

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}=f(x_1,x_2,\varphi)$$
$$\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}=g(x_1,x_2,\varphi)$$

이라하고 f와 g를 各各 (x_1,x_2,φ)空間內의 領域 D에서 變數 x_1, x_2, φ에 關하여 一階連續微分이 可能할때 이方程式이 領域D內의 部分空間 R에서 解를 갖기 위한 必要充分條件은 R內에서

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1\partial x_2}=\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_2\partial x_1}$$

이 成立하여야 한다[7].

이條件을 (22)式과 (23)式에 適用하여 보면

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1\partial x_2}\neq\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_2\partial x_1}$$

이 되므로 (22)와 (23)式을 滿足하는 φ는 存在하지 않는다. 따라서 이경우에 있어 u_t^*는 嚴密解(exact solution)가 아니다.

보다 高次의 系에 對하여도 마찬가지 結論은 쉽게 얻을수 있다.

5. 逆問題에 對한 考察

二次系에서 求하여지는 制御量 u_t^*는 一般的으로 最適制御量이 아니므로 이것과 評價函數式(18)과의 關係를 檢討할 必要가 있다.

이제

$$\frac{\partial\phi}{\partial x_1}=\omega\frac{\partial\varphi}{\partial x_1},\qquad \frac{\partial\phi}{\partial x_2}=\omega\frac{\partial\varphi}{\partial x_2} \tag{24}$$

의 解를 ϕ라고 할때 $\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}$ $(i=1,2)$는 (22)와 (23)式에서 $\mu=t$로 代置할때의 것이며, $\omega(x_1,x_2)$는

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\omega\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}\right)=\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\omega\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\right) \tag{25}$$

가 $x=0$의 近傍에서 $\omega>0$을 滿足하는 解이다. (6)

이제 上式에서 求한 ω를 使用하여 다음 函數를 定義하기로 한다.

$$J'=\int_0^\infty \omega(x_1^2+ax_2^2+u^2)d\sigma \tag{26}$$

但 x_1, x_2, u는 (17)式을 滿足하는 函數임.

이때 (24)式에 依하여 주어지는 ϕ는

$$\phi=\frac{\min}{u}\int_t^\infty \omega(x_1^2+ax_2^2+u^2)d\sigma \tag{27}$$

이 된다.

이제 (24)式의 解 ϕ를 適用한 函數를

$$H=\frac{\min}{u}\left\{\omega(x_1^2+ax_2^2+u^2)+x_2f(x_2)\frac{\partial\phi}{\partial x_1}\right.$$
$$\left.+u\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}\right\} \tag{28}$$

라고 定義하면 (28)式이 最小値가 되게 하는 制御量 u^*는

$$u^*=-\frac{1}{2\omega}\frac{\partial\phi}{\partial x_2} \tag{29}$$

가 된다. 이때 H의 값은

$$H=\omega(x_1^2+ax_2^2)+x_2f(x_2)\frac{\partial\phi}{\partial x_1}$$
$$-\frac{1}{4\omega}\left(\frac{\partial\phi}{\partial x_2}\right)^2 \tag{30}$$

이 된다.

(29)式에 (24)式을 代入하면

$$u^*=-\frac{1}{2\omega}\left(\omega\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}\right)=-\frac{1}{2}\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}=u_t^* \tag{31}$$

의 關係가 成立한다.

마찬가지로 (30)式에 (24)式을 代入하면

$$H=\omega\left\{x_1^2+ax_2^2+x_2f(x_2)\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}-\frac{1}{4}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\right)^2\right\}=0 \tag{32}$$

이 成立한다. 따라서 (28)式을 考慮할때 φ는 偏微分方程式의 하나의 解가 된다. 만일 이 方程式이 一律的인 解를 갖는다고 假定하면는 (φ는↔)式 (27)과 같이 表現할 수 있다. 따라서 u_t^*는 評價函數가 (26)式으로 주어 질때의 最適制御量이 된다.

6. 制御機能의 評價

二次系에서는 制御量 u_t^*가 最適制御量이 아니며, 實際로 이 制御量 u_t^*를 適用하는 경우 그制御機能은 檢討해보아야 할 問題이다. Pearson는 最適制御量이 既知인 경우 瞬時線形化法(Instantaneous linearization method)을 써서 그制御量을 求하여 이때의 位相面軌跡(phase plane trajectory)이 最適軌跡(optimal trajectory)에 近接한다는 것을 圖式으로 提示하여 近似解를 求하였다.[1] 그러나 最適軌跡에 近接한 軌跡이라고 하여 그制御量이 最適에 近接했다고는 一律的으로 斷定못하는 것이므로, 最適解가 未知로 되어 있는 問題를 解決하는데 있어서 이方法은 不充分하다. 더욱이 制御量이 最適인가의 與否를 決定하는것은 評價函數의 値이므로 制御量 u_t^*를 作用시킬때 그制御機能의 評價가 必要한 것이다.

따라서 이를 考察하기 위하여 必要한 몇가지 定理를 檢討하기로 한다.

이제

$$g=X^T\cdot F(X)\cdot X,\quad f=A(X)\cdot X$$

$$V^*=\min_{u(\mu)} J'=\min_{u(\mu)}\int_\mu^\infty[u^2+g(X)]d\sigma \tag{33}$$

이라고할때 D.P.에 依한 定式化를 하면

$$\min_u(u^2+g(X)+\nabla V^{*T}f(X)+\nabla V^{*T}Bu)=0 \tag{33}$$

이 된다. u에 關하여 微分하여 最小値 V^*를 求하면 V^*는 다음의式을 滿足한다.

$$\frac{1}{4}(\nabla V^*B)^2-\nabla V^{*T}f(X)-g(X)=0 \tag{34}$$

이때의 最適制御量 u_x는

$$u^*=-\frac{1}{2}\nabla V^{*T}B \tag{34}$$

이 된다. 그러나 一般으로 (34)式의 解 V^*를 解析的으로 求하는 것은 困難하다. (33)式에서 u에 關한 最小値 V^*를 갖는 制御動作이 아닐때 V^*代身에 任意의 正定値函數(positive definite function) V를 代入하면, u에 關한 二次方程式이 成立된다. 이式의 解를 求하면

$$\left.\begin{aligned}u^-&=u_{max}+\sqrt{H_{max}}\\ u^-&=u_{max}-\sqrt{H_{max}}\end{aligned}\right\} \tag{36}$$

이 된다.

但 $$u_{max}=-\frac{1}{2}\nabla V^TB \tag{37}$$

$$H_{max}=[\frac{1}{2}\nabla V^TB]^2-\nabla V^Tf(X)-g(X) \tag{38}$$

이다.

이때 다음의 定理가 成立한다.

定理 1. [**Rekasius**(8)]

萬一

$g(X)+u^2>0$ 및 制御量

$$u^+=-\frac{1}{2}\nabla V^TB+[\frac{1}{2}\nabla V^TB]^2-\nabla V^Tf(X)-g(X)$$

와 $$u^-=-\frac{1}{2}\nabla V^TB-[\frac{1}{2}\nabla V^TB]^2+\nabla V^Tf(X)+g(X)$$

에 關하여 $V(x)>0$ 이라하면

$$[\frac{1}{2}\nabla V^TB]^2-\nabla V^Tf(X)-g(X)\geq 0$$

일때 $u^-\leq u_1\leq u^+$를 滿足하는 制御量 u_1에 對하여 評價函數 $V_1(x)$는 $V_1\leq V$를 滿足한다.

定理 2. [**Rekasius**(8)]

$$-H(x,u,-\nabla V)=u^2+\nabla V^TBu+\nabla V^Tf(X)+g(X)$$

라 할때, 주어진 制御量 u에 對하여 $H\geq 0$이면 $V_1\leq V$ 이 成立한다.

定理 3. [**Rekasius**(8)]

定理 1 에서

$$[\frac{1}{2}\nabla V^TB]^2+\nabla V^Tf(X)-g(X)\leq 0 \text{이면 } V\leq V^*$$

이다. 이때의 V^*는 (34)式을 滿足하는 最適解이다.

이제

上記한 諸定理를 適用하여 V函數를 構成하고 制御機能의 評價를 檢討하기로 한다. 制御對象은 二次系를 擇하여 考察키로 한다.

$\mu=t$에서의 線形化로 求하여 지는 制御量 u^*_t를 適用할때의 評價函數의 값의 上限(upper bound)을 規定하는 函數를 上界函數(upper bound function)라 하고 그 下限(lower bound)을 定하는 函數을 下界函數(lower bound function)이라고 定義하기로 한다. 우선 上界函數 $\bar{V}$를 求하여 보면 (38)式으로 부터

$$H_{max}=\frac{1}{4}\left(\frac{\partial\bar{V}}{\partial x_2}\right)^2-x_2f(x_2)\frac{\partial\bar{V}}{\partial x_1}-x_1^2-ax_2^2 \tag{39}$$

가 된다. 이때 定理 1 에서 規定한 u_1을 $u_1=u_{max}=u_t^*$로 定하면

$$u_1=u_{max}=-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\bar{V}}{\partial x_2}\right)=-(x_1+x_2\sqrt{a+2f(x)}=u_t^* \tag{40}$$

이 되다. (40)式을 x_2에 關하여 積分하고 이를 x_1에 關하여 微分하면 $\frac{\partial\bar{V}}{\partial x_1}$는 다음과 같이 된다.

$$\frac{\partial \bar{V}}{\partial x_1}=2[x_2+h(x_1)] \quad (41)$$

但 $h(x_1)$는 x_1의 任意函數이다.

이때 H_{max}에 (40), (41)式을 代入하면

$$H_{max}=2[x_1x_2\sqrt{2f(x_2)+a}-x_2f(x_2)h(x_1)] \quad (42)$$

$$\bar{V}=2\{\int_0^{x_1}h(x)dn+\int_0^{x_2}(\sqrt{a+2f(x)}+x_1)d(x)\} \quad (43)$$

(x: dummy variable)

이 된다. 여기서 $f(x_2)$와 $h(x_1)$에 對하여 다음과 같은 假定을 設定키로 한다.

1) $f(x_2)$는 $f(x_2)>0$이며 原點의 近傍에서 連續이다.

2) $h(x_1)$은 $h=Kx_1$인 一次形式이라고 假定한다.

但 K는 正의 定數이라함.

이때 $x_1\cdot x_2<0$에 對하여 $H_{max}\geq 0$가 되도록 하는 K의 값을 定할수있다. (42)式에서

$$H_{max}=2x_1x_2\sqrt{a+2f(x_2)}\left\{1-\frac{f(x_2)\cdot K}{\sqrt{a+2f(x_2)}}\right\}$$

이므로 이제 有限狀態量에 對한 $f(x_2)$의 限界를 求하여 보면

$$\min_f \frac{f(x_2)}{\sqrt{a+2f(x_2)}}=\gamma$$

를 滿足하는 正의 定數가 存在한다. 따라서 $\gamma K\geq 1$ 또는 $K\geq\frac{1}{\gamma}$를 滿足하는 $\bar{V}$의 값을 擇하면 $x_1x_2<0$에 對하여 $H_{max}\geq 0$가 된다.

$$\bar{V}=2\int_0^{x_1}Kxdx+2x_1x_2+2\int_0^{x_2}x\sqrt{a+2f(x)}\,dx$$
$$\geq Kx_1^2+2x_1x_2+\sqrt{a}\,x_2^2$$

이므로 $K\geq 1$, $a\geq 1$의 값을 擇하면

$$V\geq(x_1+x_2)^2\geq 0$$

가 成立한다. $\bar{V}$의 값은 可能한限 最小의 값이 되어야 하므로

$$K=\min(1,\frac{1}{\gamma}) \quad (44)$$

의 값으로 K의 값을 定하면 된다.

따라서 上記한 系의 制御評價를 하기 위하여 整理하면 定理 1에 依하여

$$\int_0^\infty(x_1^2+ax_2^2+u_t^{*2})\,d\sigma\leq 2\{\int_0^{x_1}h(x)dx+\int_0^{x_2}(x_1+\sqrt{a+2f(x)}\,dx\}=\bar{V} \quad (45)$$

의 評價函數가 成立한다.

但 $u_t^*=-(x_1+x_2\sqrt{a+2f(x_2)})$

$h(x_1)=\{\min(1,\frac{1}{\gamma})\}\cdot x_1$

이다.

그러나 여기서 求한 上限函數 $\bar{V}$는 狀態變數 x_1, x_2에 對하여 $x_1x_2<0$의 制約條件(constraint condition)이 滿足되어야만 求하여 지는 것이므로 局所的上界函數(local upper-bound function) $\bar{V}_{loc}$이 된다.

다음으로 下界函數(lower bound function) $\underline{V}$를 求하여 보면 $\underline{V}$로서 우선

$$\underline{V}=b_{11}x_1^2+2b_{12}x_1x_2+b_{22}x_2^2 \quad (46)$$

라고 假定하여 H_{max}를 求하면 다음과 같이 된다.

$$H_{max}=(b_{12}^2-1)x_1^2+2x_1x_2(b_{12}b_{22}-b_{11}f(x_2))+(b_{22}^2-2f(x_2)b_{12}-\alpha)x_2$$
$$=X^T\cdot N\cdot X+X^TM(X)\cdot X \quad (47)$$

但 $X^T\cdot N\cdot X=(b_{12}^2-1+K)x_1^2+2(b_{12}b_{22}-b_{11}\beta)x_1x_2+(b_{22}^2-2\beta b_{12}-\alpha)x_2^2$ (48)

$$X^T\cdot M(X)\cdot X=-\{Kx_1^2+2b_{11}(f(x_2)-\beta)x_1x_2+2b_{12}(f(x_2)-\beta)x_2^2\} \quad (49)$$

또 α와 β는 $\beta x_2\leq x_2f(x_2)\leq\alpha x_2$을 滿足하는 正의 定數이고 系의 初期狀態에 따라 決定되는 定數이다.

이제 (49)式에서 K의 값을

$$K=\frac{b_{11}^2}{2b_{12}}(\alpha-\beta) \quad (50)$$

로 選定하면

$$X^TM(X)X\leq 0$$

이 된다. 따라서 이 K의 값으로서 $X^T\cdot N\cdot X=0$ 가 恒常 成立하도록 定數 b_{11}, b_{12}, b_{22}를 定하면 (47)式으로부터 $H_{max}\leq 0$가 成立한다. 그러므로 定理 3으로 부터

$$\underline{V}\leq V^* \quad (52)$$

의 關係式이 얻어진다. 여기서 $\underline{V}$를 求하는 過程에서 狀態變數의 符號에 關하여 何等의 制約的인 假定을 設定하지 아니하였으므로 $\underline{V}$는 大域的下界函數 $\underline{V}_{gl}$가 된다.

以上의 結果를 要約하면 다음과 같은 評價가 成立한다.

$$\underline{V}_{gl}=b_{11}x_1^2+2b_{12}x_1x_2+b_{22}x_2^2\leq V^*\leq\int_0^\infty(x_1^2+ax_2^2+u^{*2}_t)\leq 2\{\int_0^{x_1}(\min(1,\frac{1}{\gamma}))xdx+\int_0^{x_2}(x_1+x\sqrt{a+2f(x)})dx\}=\bar{V}_{loc} \quad (53)$$

但 定數 b_{11}, b_{12}, b_{22}는

$$\left.\begin{aligned}&b_{12}^2-1+K=0\\&b_{22}b_{12}-b_{11}\beta=0\\&b_{22}^2-2\beta b_{12}-\alpha=0\end{aligned}\right\} \quad (54)$$

에 依하여 定하여 지며, K의 값은 (50)式에 따라 定해진다.

여기서 局所的上界函數(local upper bound function) $\bar{V}_{loc}$가 成立하는 領域은 $x_1x_2<0$인 範圍로 制限된다. 그러므로 部分空間에 制限되지 않고 全體空間에서 定義되는 上界函數 즉 大域的上界函數(global upper bound function) $\bar{V}_{gl}$를 求하여 보면 다음과 같이 된다. 즉 定理 2에서

$$H=-u_1^2-\frac{\partial\bar{V}}{\partial x_1}f(x_2)\cdot x_2-\frac{\partial\bar{V}}{\partial x_2}u_1-x_1^2-ax_2^2 \quad (55)$$

가 되고 制御量 u_1을 $u_1=-(x_1+x_2\sqrt{a+2f(x_2)})=u_t^*$로 하여 適用하여 恒常 $H\geq 0$를 滿足하는 函數

$$V=b_{11}x_1^2+2b_{12}x_1x_2+b_{22}x_2^2 \quad (56)$$

의 係數를 定할수 있다면 $\tilde{V}$는 大域的 上界函數 $\tilde{V}_{gl}$이 된다. $\tilde{V}$의 값은 될수록 작은값이 되고 또 大域的上界函數가 되도록 b_{11}, b_{12}, b_{22}의 값을 定하여야 될것이다.

이제 u_1및 (56)式을 (55)式에 代入하면

$$H=2(\tilde{b}_{12}-1)x_1^2-2\{\sqrt{a+2f(x_2)}-\tilde{b}_{12}-\tilde{b}_{12}\sqrt{a+2f(x_2)}+\tilde{b}_{11}f(x_2)\}x_1x_2+2(\tilde{b}_{22}\sqrt{a+2f(x_2)}-a-f(x_2)-\tilde{b}_2f(x_2)x_2^2 \tag{57}$$

이 된다. 原點을 包含하는 有界領域에서 連續偶函數 $f(x_2)$는 $f(x_2)>0$이고, 또 $0<\beta'<f(x_2)<\alpha'$를 滿足하는 正數 α', β'는 存在한다. 任意의 正數 m, M에 對하여 $m\leq\sqrt{a+2f(x_2)}\leq M$ 이라고 놓을때

$$\frac{H}{2}\geq(\tilde{b}_{12}-1)x_1^2-(\sqrt{a+2(fx_2)}-\tilde{b}_{22}-\tilde{b}_{12}\sqrt{a+2f(x_2)}+\tilde{b}_{11}f(x_2)x_1x_2+(\tilde{b}_{22}m-a-\alpha'-\tilde{b}_{12}\alpha')x_2^2 \tag{58}$$

이 된다. 上式의 右邊이 ≥ 0이면 $H\geq 0$ 이므로 定理 2 의 關係가 成立된다.

그러므로

$$\tilde{b}_{12}-1\geq 0 \tag{59}$$

$$(\tilde{b}_{11}m-a-\alpha'-\tilde{b}_{12}\alpha')\geq 0 \tag{60}$$

$$4(\tilde{b}_{12}-1)(\tilde{b}_{22}m-a-\alpha'-\tilde{b}_{12}\alpha')\geq(\sqrt{a+2f(x_2)}-\tilde{b}_{22}-\tilde{b}_{12}\sqrt{a+2f(x_2)}+\tilde{b}_{11}f(x_2))^2 \tag{61}$$

의 條件式이 滿足되어야

또 $\tilde{V}\geq 0$가 成立되기 위해서는

$$\tilde{b}_{12}\leq\tilde{b}_{22}\tilde{b}_{11} \tag{62}$$

의 關係式이 成立되어야 한다.

이제 (61)式의 左邊을

$$4(\tilde{b}_{12}-1)(\tilde{b}_{22}m-a-\alpha'-\tilde{b}_{12}\alpha')=\max\{(M-\tilde{b}_{22}-m\tilde{b}_{12}+\alpha'\tilde{b}_{11})^2,(\tilde{b}_{22}+M\tilde{b}_{12}-m-\beta'\tilde{b}_{11})^2\} \tag{63}$$

로 놓고 $\tilde{b}_{11}, \tilde{b}_{12}, \tilde{b}_{22}$의 값을 求하면 된다.

(63)式의 右邊에서

i) $\max\{M-\tilde{b}_{22}-m\tilde{b}_{12}+\alpha'\tilde{b}_{11})^2, (\tilde{b}_{22}+M\tilde{b}_{12}-m-\beta'\tilde{b}_{11})^2\}=(M-\tilde{b}_{22}-m\tilde{b}_{12}+\alpha'\tilde{b}_{11})^2$

일때

$$\tilde{b}_{22}^2+(m^2+4\alpha')\tilde{b}_{22}^2-2(M+\alpha'\tilde{b}_{11}-2M-2(mM+\alpha'm\tilde{b}_{11}-2a)\tilde{b}_{12}-2m\tilde{b}_{12}\tilde{b}_{22}+(M+\alpha'\tilde{b}_{11})_2-4(a+\alpha')=0 \tag{64}$$

가 되므로 이제 $\tilde{b}_{11}$의 값을 固定하면

$$\left.\begin{aligned}&\tilde{b}_{22}=\frac{m^2M+(\alpha'm^2+2\alpha'^2)\tilde{b}_{11}-m^3-am+2\alpha'M-4m\alpha'}{2\alpha'}\\&\tilde{b}_{12}=\frac{mM+\alpha'mb_{11}-m^2-a}{2\alpha'}\end{aligned}\right\} \tag{65}$$

이 된다. (64)式은 $b_{12}-b_{22}$平面에서 楕圓을 나타내는 式이다,

이제 $\tilde{b}_{11}$의 값에 對하여

$$\left.\begin{aligned}&\frac{1}{\tilde{b}_{11}}<\frac{a+2\alpha'}{m}<M+\alpha'\tilde{b}_{11}-m\\&\frac{mM+\alpha'm\tilde{b}_{11}-m^2-a}{2\alpha'}<1\end{aligned}\right\} \tag{66}$$

의 關係式을 滿足하면 $H\geq 0$는 成立되고 또 $\tilde{b}_{11}, \tilde{b}_{22}, \tilde{b}_{22}$의 값은 이 楕圓上에 存在한다. (66)式을 滿足하는 $\tilde{b}_{11}$의 값에 對하여 (59), (60)및 (62)을 滿足하는 $\tilde{b}_{12}$, $\tilde{b}_{22}$의 값을 求하고 이러한 計算을 返復하여 $\tilde{V}$의 값이 最小가 되는 $\tilde{V}_{gl}$의 값을 求하고 이에 對한 $\tilde{b}_{11}, \tilde{b}_{12}\tilde{b}_{22}$의 값을 定하면 된다.

ii) $\max\{(M-\tilde{b}_{22}-m\tilde{b}_{12}+\alpha'\tilde{b}_{11})^2, (\tilde{b}_{22}+M\tilde{b}_{12}-m-\beta'\tilde{b}_{11})^2\}=(m-\tilde{b}_{22}-M\tilde{b}_{12}+\beta'\tilde{b}_{11})^2$

일때는

$$\left.\begin{aligned}&\frac{1}{\tilde{b}_{11}}<\frac{a+2\beta'}{m}<m+\beta'\tilde{b}_{11}-M\\&\frac{mM+\beta'M\tilde{b}_{11}-M^2-a}{2\beta'}>1\end{aligned}\right\} \tag{67}$$

의 條件을 滿足하는 $\tilde{b}_{11}$의 값을 固定하고

$$\tilde{b}_{22}=\frac{mM^2+(\beta'+2\beta'^2)\tilde{b}_{11}-M^3-aM+2\beta'm-4M\beta'}{2\beta'} \tag{68}$$

$$\tilde{b}_{12}=\frac{mM+\beta'M\tilde{b}_{11}-M^2-a}{2\beta'} \tag{69}$$

의 關係式이 成立하는 값을 求하고 $\tilde{V}$의 最小値 $\tilde{V}_{gl}$이 되는 $\tilde{b}_{11}, \tilde{b}_{12}, \tilde{b}_{22}$의 값을 定하면 된다.

이제 이線形化法을 適用할때의 制御量 u_t^*와 이때의 評價函數에 對한 上界및 下界函數의 값을 決定하는 問題의 例를 檢討하여 보기로 한다.

例 二次系制御對象 및 評價關數로서

$$\dot{x}_1=x_2(1+x_2^2)$$

$$\dot{x}_2=u$$

$$J=\int_0^\infty(x_1^2+4x_2^2+u^2)d\sigma$$

가 주어졌을때 (17)式, (18)式과 (42)式

$$H_{max}=2x_2\sqrt{a+2f(x_2)}\left\{x_1-\frac{f(x_2)}{\sqrt{a+2f(x_2)}}h(x_1)\right\}$$

에서

$$f(x_2)=1+x_2^2$$

$$a=4$$

이므로

$$H_{max}=2x_2\sqrt{6+2x_2^2}\left\{x_1-\frac{1+x_2^2}{\sqrt{6+2x_2^2}}h(x_1)\right\}$$

이다. 이제

$$F(x_2)=\frac{1+x_2^2}{\sqrt{6+2x^2_2}}$$

라고 놓으면 $x_2\leq 0$에 對하여

$$\frac{d}{dx_2}F(x_2)=\frac{2x_2(5+x_2^2)}{(6+2x_2^2)^{3/2}}\leq 0$$

그러므로

$$\min F(x_2)=F(x_2)\Big|_{x_2=0}=\frac{1}{\sqrt{6}}=\gamma,$$

$\therefore \quad K=\min(1, \sqrt{6})=\sqrt{6}$

$\therefore \quad h(x_1)=\sqrt{6}x_1$

이며

$H_{max}\geq 0$

는 成立된다. 또 (45)式에서

$$u_t^*=-(x_1+x_2\sqrt{a+2f(x_2)})$$
$$=-[(x_1+x_2\sqrt{4+2(1+x_2^2)})]$$

表 1: 評價函數와 上下界函數의 計算値

Table 1. Numerical values of P.I. and the upper and Lower bound fumctions

初 期 値 (x_1, x_2)	上 界 函 數 $\bar{V}_{loc}$	J	J^*	下 界 函 數 $\underline{V}_{el}$
(0.1, −0.1)	2.901×10^{-2}	2.54×10^{-2}	—	2.506×10^{-2}
(0.5, −0.5)	0.7373×10^{-2}	0.63×10^{-2}	—	0.6265×10^{-2}
(1.0, −0.5)	2.074×10^{-2}	1.74×10^{-2}	—	0.9343×10^{-2}
(2.0, −0.5)	8.4229×10^{-2}	6.31×10^{-2}	—	2.1655×10^{-2}
(2.0, −1.0)	8.4415×10^{-2}	5.38×10^{-2}	—	3.7373×10^{-2}

이되므로 評價函數는 (43)式에서

$$\int_0^\infty (u_t^{*2}+x_1^2+4x_2^2)d\sigma \leq \sqrt{6}x_1^2+2x_1x_2 + \frac{1}{3}(2x_2^2+6)^2/_8-2\sqrt{6}=\bar{V}_{loc}$$

이 된다. 또 (46)과 (54)式에서 $\bar{V}_{el}$를 計算하면 表 1 과 같은 값이 求해진다.

表 1 에는 各初期値에 對한 上界와 下界函數의 값과 J의 값을 計算하고 μ=t에서의 線形化에 依한 近似制制量(suboptimal control)에 依한 評價函數의 값을 計算하였으나, 이 값은 嚴密한 解가 아니다. $\underline{V}$와 $\bar{V}$의 差가 적을수록 J의 값은 J^*의 값에 近接하게 된다.

7. 結 論

非線形制御對象의 制御問題에 對하여 이 線形化法을 適用하여 檢討한 結果 다음과 같은 結論을 얻는다.

1) 制御對象이 一階非線形微分方程式으로 表示될때 線形化法에 依하여 求한 解는 嚴密解가 된다.

2) 制御對象이 二次以上의 高次非線形微分方程式으로 表示될때는 嚴密解를 求할수 없고 近似解를 求할수 있다. 이것을 嚴密解로 處理할 수 있는 評價函數는 存在하고 또 이를 求 할수 있다.

3) 이 線形化法에 依하여 求한 解를 制御量으로 適用하는 경우 이것은 近似解이므로 그 制御機能의 評價를 檢討 하여야 되고 上界函數 $\bar{V}$와 下界函數 $\underline{V}$의 값을 求하여 그 差로서 그 正確度와 機能을 確認할 수 있다.

參 考 文 獻

1) J.D. Pearson: Approximiaton Method in Optimal Control, I; Suboptimal Control: J., Electron. Control, Vol 13, No. 4, pp. 453~469, Oct. (1962)
2) G. Hadley: Non-linear and Dynamic Programming: Addison-Wesley, (1964)
3) R.E. Kalman: Contribution to the Theory of Optimal Control; Bol. Soc. Math Mex., pp. 102~119, (1960)
4) R. Bellman & R. Bucy; Asymptotic Control Theory; J. SIAM, Control, Ser, A. Vol. 2, No. 1, (1964)
5) J. Lasalle & S. Lefschetz; Stability by Liapunov's Direct Method with Applications, Academic Press, (1961)
6) Smirov: Course of Higher mathematics
7) 占部：微分方程式，共立出版，1968
8) Z.V. Rekasius: Suboptimal Design of Intentionally Nonlinear Controllers; IEEE, Tranc-Vol. AC-9, No. 4, pp. 380~386, Oct (1964)
9) L. Markus: Global Structurc of Ordinary Differential Equaion in the Plane: Transaction of American Mathematical Society, Vol, 76 (1964)