A Note on the Homomorphisms Between Modules

Doo Ho Kim

1. Introduction

This paper is a rather brief account for the set Hom(M, N) of all homomorphisms from M into N. Throughout this paper, let R denote an arbitrarily given ring and the sets M and N be left R-modules. The other terminologies and notations are based on Sze-Tsen Hu [2].

2. Preliminary concepts

If M and N are left R-modules, then the set Hom (M, N) of all homomorphisms from M into N forms an additive abelian group with the usual definition of addition. If C(R) is the center of the ring R, that is, $C(R)=\{a\in R: aa'=a'a \text{ for every } a'\in R\}$, then Hom(M, N) forms a module over the ring C(R) with the usual definition of scalar multiplication: $(af)(x)=af(x)$ for every $x\in M$, $a\in C(R)$, and $f\in \mathrm{Hom}(M, N)$.

In particular if R is a commutative ring, then Hom(M, N) is a R-module. If P is a R-module, then with every $f\in\mathrm{Hom}(M, N)$, we associate

f' : Hom(P, M) $\rightarrow$ Hom(P, N), defined by

$f'(g)=fg$, for all $g\in\mathrm{Hom}(P, M)$.

The mapping f' is a homomorphism of the additive group Hom(P, M) to Hom(P, N). It is enough to note that $f'(g_1+g_2)=f'(g_1)+f'(g_2)$. If R is commutative ring f' is a R-module homomorphism:

$f'(ag)=f\cdot(ag)=a(f\cdot g)=af'(g)$.

If $f: L\rightarrow M$ and $g: M\rightarrow N$ are homomorphism, then $(g\cdot f)'=g'\cdot f'$

3. The theorems

Theorem 1.

Let $O\longrightarrow L\xrightarrow{f} M\xrightarrow{g} N$ be an exact, sequence of R-module, and let P be any R-module then

$$O\longrightarrow \mathrm{Hom}(P, L)\xrightarrow[f']{} (P, M)\xrightarrow[g']{} \mathrm{Hom}(P, N)$$

is an exact sequence of abelian groups.

(proof) We have to establish several facts successively.

(1) $\mathrm{Ker}(f')=0$, for if $f'(p)=f\cdot p=0$, then $p=0$ since f is a monomorphism.

(2) $\mathrm{Im}(f')\subseteq\mathrm{Ker}(g')$, for $g'[f'(p)]=g'\cdot f'(p)=(g\cdot f)'(p)=g\cdot f\cdot p=0$ since $g\cdot f=0$

(3) $\mathrm{Ker}(g')\subseteq\mathrm{Im}(f')$: let q be in $\mathrm{Ker}(g')$, that is, $g\cdot q=0$. Thus $\mathrm{Im}(q)\subseteq\mathrm{Ker}(g)=\mathrm{Im}(f)$; hence for every $x\in p$ there exists an element $y\in L$ such that $q(x)=f(y)$. Since f is a monomorphism, this element y is unique. We have define the mapping $p: P\longrightarrow L$ by $p(x)=y$. It is easy to check that p is a homomorphism and $f'(p)=f\cdot p=q$, so $q\in\mathrm{Im}(f')$.

Theorem 2.

Let $L\xrightarrow{f} M\xrightarrow{g} N\longrightarrow O$ be an exact sequence of R-modules, and let P be any R-module. Then

$$O\longrightarrow \mathrm{Hom}(N, P)\xrightarrow[g']{} \mathrm{Hom}(M, P)\xrightarrow[f']{} \mathrm{Hom}(L, P)$$

is an exact sequence of abelian groups.

(proof) (1) $\mathrm{Ker}(g')=0$, for if $g'(p)=p\cdot g=0$, then $p=0$ since g is epic.

(2) $\mathrm{Im}(g')\subseteq\mathrm{Ker}(f')$, for $f'[g'(p)]=f'\cdot g'(p)=(g\cdot f)'(p)=0$, since $g\cdot f=0$

(3) $\mathrm{Ker}(f')\subseteq\mathrm{Im}(g')$: let q be in $\mathrm{Ker}(f')$, then $f'(q)=q\cdot f=0$.

We define the mapping

$p: \mathrm{N} \to \mathrm{P}$ by $p[g(x)] = q(x)$.

This defines $p(y)$ for all $y \in \mathrm{N}$ since g is epic.

To show that p is well defined we have to establish that if $g(x_1) = g(x_2)$ then $q(x_1) = q(x_2)$, or, in other words, that

$\mathrm{Ker}(g) \subseteq \mathrm{Ker}(q)$ But $\mathrm{Ker}(g) = \mathrm{Im}(f)$.

Thus, if $g(x) = 0$, there exists $z \in \mathrm{L}$ such that $x = f(z)$; hence $q(x) = p[g(x)] = p[g \cdot f(x)] = 0$.

Clearly p is a homomorphism and

$g'(p) = p \cdot g = q$, so $q \in \mathrm{Im}(g')$.

References

[1] Sze-Tsen Hu; Elements of Modern Algebra; Holden-Day, SanFrancisco, 1965.

[2] Sze-Tsen Hu; Introduction to Homological Algebra; Holden-Day, SanFrancisco, 1968.

[3] Birkhoff and Maclane; Algebra; Macmillan, New York, 1968.

요 약

제목 : A note on the homomorphisms between modules

이 논문은 modules 사이의 homomorphism 의 exact sequence 에서 다음과 같은 것을 밝힌 것임.

1. $\mathrm{O} \longrightarrow \mathrm{L} \xrightarrow{f} \mathrm{M} \xrightarrow{g} \mathrm{N}$ 이 하나의 exact sequence 이고 P 가 임의의 R-module 일 때

$\mathrm{O} \longrightarrow \mathrm{Hom}(\mathrm{P}, \mathrm{L}) \xrightarrow[f']{} \mathrm{Hom}(\mathrm{P}, \mathrm{M}) \xrightarrow[g']{} \mathrm{Hom}(\mathrm{P}, \mathrm{N})$

은 abelian group 의 하나의 exact sequence 라는 것.

2. $\mathrm{L} \xrightarrow{f} \mathrm{M} \xrightarrow{g} \mathrm{N} \longrightarrow \mathrm{O}$ 이 exact sequence 이고 P 가 임의의 R-modele 이면

$\mathrm{O} \longrightarrow \mathrm{Hom}(\mathrm{N}, \mathrm{P}) \xrightarrow[g']{} \mathrm{Hom}(\mathrm{M}, \mathrm{P}) \xrightarrow[f']{} \mathrm{Hom}(\mathrm{L}, \mathrm{P})$

는 abelian group 의 하나의 exact sequence 라는 것.

3 page에서 계속

標本標準偏差 $s=\sqrt{\frac{(x-\bar{x})^2}{n}}$로 代用하는 경우의 平均値의 標本誤差이기 때문이다.

다음 t表의 t의 값은 自由度 $n-1$이 크게 됨에 따라서 正規分布變數의 標準測定値 $\frac{x-m}{\sigma}$의 값에 가까워가고 $p=0.025$에 對한 t의 값은 $n-1=30$에서 $t=2.04$이며 $n-1=60$에서 $t=2.00$이며 $n \to \infty$가 되면 $t=1.96$이 된다.

그러므로 $n=50$ 以上이면 t分布를 正規分布로 定해도 誤差計算에는 差가 大端히 작다. 이 때문에 t分布의 理論을 小標本理論이라 한다.

6. 結 言

以上에서 標本誤差에 關한 基礎的인 理論과 方法을 살펴 보았다.

統計量은 標本에 대한 集團特性値이므로 標本에 包含된 單位에 依해서 計算된다. 따라서 標本의 單位가 變化하면 統計量도 變化한다. 그러므로 統計量은 標本의 單位의 函數로 定義된다. 이와 같이 統計量은 관찰된 標本의 函數이므로 一般으로 計算이 可能하다. 그러나 母集團의 特性値인 母數는 一般으로 未知數이기 때문에 經驗的으로는 計算이 不可能하다. 따라서 標本誤差를 작게 하려면 즉, 母數를 더욱 正確하게 推定하려면 標本을 어떤 方法으로 만들어야 하며 그 크기는 얼마로 하는 것이 적당한가 하는 問題가 나오게 된다.

參 考 文 獻

1) 初等統計解析 宋基善譯 1959년

2) 現代統計學 金俊輔 1965.

3) 現代統計學 河田龍夫 1956.

4) Sum Theory of Sampling W.E. Deming 1950.

5) Sampling Methods for Census and Surveys 1949.

(昌德女高 敎師)