Polytope 와 graph 에 관하여

(On polytopes and graphs)

김 연 식

〈목 차〉

1. 서 언

convex polytope 에 대한 이론은 최근 수년동안에 많은 발전을 했다. 여기에서는 3-polytope 와 graph 에 관계한 몇가지 성질을 찾아보고 증명을 한다.

k-degenerate graph 의 모든 모임을 Π_k 로 나타내면 Π_0, Π_1 은 각각 모든 totally disconnected graph, forest 들의 집합이 된다. 또 Π_2, Π_5 는 각각 모든 outerplanar graph, planar graph 들의 집합을 진부분 집합으로 갖는다. 이러한 방향에서 찾아낸 성질은 chromatic number 나 point arboricity 따위에 관한 지금까지 알려진 성질을 확장하는데 큰 역활을 한다.

k-degenerate 의 개념은 graph G 의 vertex 의 최소 degree $\delta(G)$와 관계하므로 개념 자체가 간단하고 다른 성질에 적용하기가 쉽다. 특히 maximal 1-degenerate 인 graph 는 결과적으로 tree 가 되어 connected 임을 알려준다. 이러한 성질을 maximal k-degenerate graph 까지 확장하여 k-connected 가 됨을 밝혀낼 수 있다. 여기에서는 이것을 사용하여 maximal 3-degenerate planar graph 는 어떤 3-polytope 에 대한 1-skeleton 임을 밝히려 한다.

2. 정 의

K 를 R^d 의 convex subset 라고 하자. 점 $x\in K$ 가 y, $z\in K$, $0<\lambda<1$ 이고 $x=\lambda y+(1-\lambda)z$ 이면, $x=y=z$ 일 때 점 $x\in K$ 를 K 의 extreme point 라고 한다. 이러한 K 의 extreme point 전체의 집합을 ext K 로 나타낸다. K 가 R^d 의 compact convex subset 이고 ext K 가 유한집합일 때 K 를 polytope 라고 한다. 특히 dimension d 인 경우의 polytope 를 d-polytope 라고 한다. polytope P 의 모든 face 로 만들어진 complex 를 C(P)라고 표시하고 dimension 이 기껏해서 1 인 e 의 모든 원소로 된 complex 를 skel C(P) 또는 간단히 skel P 로 나타낸다. P 가 polytope 들의 어떤 집합이고 G 가 graph 일 때 적당한 polytope $P\in \mathcal{P}$ 에 대하여 G 가 skel P 와 isomorphic 일 때 G 를 (P)-realizable 라고 한다.

여기에서 생각하는 graph 는 ordinary graph 이다. 곧 loop 도 mutiple line 도 없는 graph 를 뜻한다. graph G 의 vertex 의 집합을 V(G), edge 의 집합을 E(G)로 나타낸다. G 의 vertex (혹은 point) v 의 degree $d(v)$는 v 에 접한 edge (line) 의 갯수를 말하며, G 의 vertex 중에 최소 degree 를 G 의 minimum degree 라고 하고 δ(G) 로 나타낸다. 비슷하게 G 의 maximum degree 를 Δ(G) 로 나타낸다.

H 가 G 의 subgraph 일 때 $H\leqq G$ 로 나타낸다. $U\subset V(G)$일 때 U 의 모든 point 와 두 point 를 잇는 G 의 모든 line 으로 이루워진 graph 를 U 에서 유도된 graph 라고 말하며 〈U〉로 나타낸다. 두 subgraph 가 disjoint 라고 하는 것은 공통점을 갖지 않을 때이다.

graph G 의 point set V(G)가 V_1, V_2, $\cdots$, V_n 으로 분할되고 모든 i 에 대하여 $|V_i|=p_i$ 이고 u, $v\in V(G)$가 adjacent 일 때 그때에 한하여 $u\in V_j$, $v\in V_h$(단, $j\neq h$)가 된다면 G 를 complete n-partite graph 라고 하여 G 을 $K(p_1, p_2, \cdots, p_n)$로 표시한다. 특히 $p_i=1$, $i=1, \cdots, n$일 때 K를 complete graph 라고 하며 K_n으로 나타낸다. graph G가 어떤 음 아닌 정수 k에 대하여 모든 subgraph H에서 $\delta(H)\leqq k$이면 graph G를 k-degenerate graph 라고 한다.

graph G가 line을 갖지 않을 때 G를 totally disconnected graph 라고 한다. graph 가 totally disconnected 이면 그때에 한하여 그 graph는 0-degenerate 이다. cycle 를 갖지 않은 graph 를 forest 라고 말한다. 이러한 graph는 꼭 1-degenerate graph 이다. graph G는 평면에 imbedding 할 수 있고 V(G)가 모든 exterior region의 boundary 위에 놓여 있을 때 graph G를 outerplanar graph 라고 부른다. 모든 outerplanar graph는 $d(v)\leqq 2$인 vertex v를 가지며 outerplanar graph의 subgraph 는 다시 outerplanar 이므로 모든 outerplanar graph 는 2-degenerate 이다. 그러나 2-degenerate graph 이지만 outerplanar 가 아닌 경우가 있으며 모든 outerplanar graph 의 전체 집합은 II_2의 진부분 집합이다. planar graph 라는 것은 평면에 imbedding 할 수 있는 graph을 말한다. 모든 planar graph 는 $d(v)\leqq 5$인 vertex v를 갖는다. 또 planar graph 의 subgraph는 다시 planar 이므로 planar graph 는 5-degenerate graph 가 된다. 그러나 complete graph K_5는 5-degenerate graph 지만 planar graph 는 아니다. 그러므로 모든 planar graph의 집합은 II_5의 진부분 집합이다.

complete graph K_{p+2}는 $(p+1)$-degenerate 이나 p-degenerate 는 아니다. 그러므로 II_k는 II_{k+1}의 진부분 집합임을 알 수 있다.

3. 보조정리와 주정리

lemma 1.

(i) G가 II_k의 graph 이면 G는 II_n의 graph 이다. 단 $n\geqq k$

(ii) 모든 graph G에 대하여 G가 II_k의 graph 가 되도록 음이 아닌 정수 k가 존재한다. 이때의 k는 $k\leqq\Delta(G)$를 만족한다.

(iii) G가 II_k의 graph 이면 그때에 한하여 G의 모든 compoment C는 II_k의 graph 가 된다.

(iv) G가 II_k의 graph 이면 $H\leqq G$도 II_k의 graph 이다.

이러한 성질은 곧 설명된다.

lemma 2.

G가 II_k에 속하는 graph 라고 하자.
$|G|=p\geqq k$이면 $|E(G)|\leqq kp-\binom{k+1}{2}$이다.

이 증명은 G의 order에 관한 induction에 따라 쉽게 증명된다.

$\overline{G}$를 G의 complement 라고 하자. graph G가 II_k의 graph 이고 모든 $e\in E(\overline{G})$에 대하여 $G+e$가 II_k의 graph 가 아닐 때 G를 maximal k-degenerate graph 라고 한다. $K_p(p\geqq k+1)$는 maximal k-degenerate 임으로 주의하자.

lemma 3.

G가 maximal k-degenerate graph 이고
$|G|=p\geqq k+1$ 라면 $\delta(G)=k$이다.

증명. $|G|=p=k+1$인 경우를 생각하자
$G=K_{k+1}$이므로 $\delta(G)=k$가 된다.

$|G|=p=k+2$인 경우를 생각하자.
$\exists e\in E(K_{k+2}) : G=K_{k+2}-e$
$\therefore \delta(G)=k$

$|G|=p>k+2$인 경우를 보자
먼저 $\exists v\in V(G) : d(v)<k$라고 가정하자.
G 안에서 v와 adjacent 가 아닌 임의의 $u\in V(G-v)$를 택한 임의의 $H\leqq G+uv$를 생각한다. 이때 $v\notin V(H)$라면 $H\leqq G$이므로 $\delta(H)\leqq k$ $v\in V(H)$라면 G 안에서 $d(v)<k$이므로 $\delta(H)<k$ 결국 어느 경우이건 임의의 $H\leqq G+uv$에 대하여 $\delta(H)<k$ 그러므로 $G+uv$는 II_k의 graph 이다. 이것은 G가 maximal k-degenerate 이므로 모순이다. 따라서 $\delta(G)=k$

lemma 4.

G가 maximal k-degenerate graph 이고
$|G|=p\geqq k+1$ 라고 하자. $d(v)=k$인 $v\in V(G)$에 대하여 $G-v$는 maximal k-degenerate graph 이다.

1. F. Harary, Graph theory
2. M. Behzad and G. Chartrand, An introduction to the theory of graphs.

증명. 적당한 $v\in V(G)$에 대하여 $d(v)=k$이고 $G-v$가 maximal k-degenerate graph가 아니다고 가정하자. 그러면

$\exists e\in E(\overline{G-v}) : G-v+e$는 k-degenerate

그러나 $d(v)=k$이고 $ev\notin E(G)$이므로

$G+e$는 k-degenerate이다.

이것은 모순이다.

lemma 5.

G가 maximal k-degenerate graph이고 $|G|=p\geqq k$라면 $|E(G)|=kp-\binom{k+1}{2}$이다.

증명. 위의 lemma 3과 4를 사용하여 induction으로 곧 밝힐 수 있다.

lemma 5를 사용하면 G가 maximal 1-degenerate graph이고 $|G|=p$인 경우에 $|E(G)|=p-1$임을 알 수 있으므로 이러한 경우의 graph는 tree가 된다. 따라서 G가 1-connected임을 알수 있다. 이러한 성질을 확장하여 maximal k-degenerate graph인 경우에도 G가 k-connected가 될 수 없겠는가 생각하게 된다. 이것은 긍정적으로 해결된다.

lemma 6.

G가 3-connected planar graph이면 $d(v)=3$인 $v\in V(G)$가 존재한다.

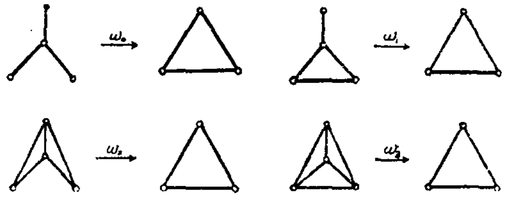
증명. P를 3-polytope라고 하고 $v=v(P)$, $e=e(P)$, $p=p(P)$로 각각 P의 vertex, edge, 2-face의 갯수를 나타내고 $v_k=v_k(P)$, $p_k=p_k(P)$로 각각 P의 k-valent vertex, k-gonal 2-face의 갯수를 나타낸다고 하자.

그러면 $v=\sum_{k\geqq 3}v_k$, $p=\sum_{k\geqq 3}p_k$, $v-e+p=2$이다. 또 쉽게 $2e=\sum_{k\geqq 3}kp_k$, $2e=\sum_{k\geqq 3}kv_k$이므로

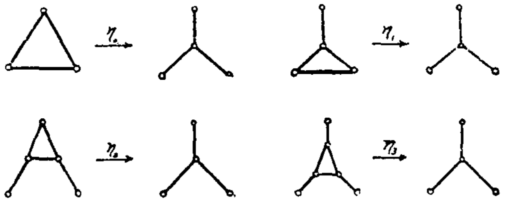
$$\sum_{k\geqq 3}kv_k+\sum_{k\geqq 3}kp_k=4e=4v+4p-8$$
$$=4\sum_{k\geqq 3}v_k+4\sum_{k\geqq 3}p_k-8$$
$$\therefore\ v_3+p_3=8+\sum_{k\geqq 3}(k-4)(v_k+p_k)\geqq 8$$

따라서 모든 3-polytope P는 적어도 8개의 3-valent vertex를 갖는다. G는 connected planar이므로 3-polytope P에 적용한 성질은 G에도 적용된다. 곧 G는 $d(v)=3$인 $v\in V(G)$를 갖는다.

graph G에서 v가 3-valent vertex인 경우 다음과 같이 이 vertex를 triangular face로 변환하여 graph G*를 만드는 것을 ω elementary transformation 라고 부르자.



또 triangular face를 3-valent vertex가 되도록 다음과 같이 바꾸는 것을 η-elementary transformations 라고 하자.



이러한 변환에서 graph G가 graph G*로 된 경우 $E(G^*)<E(G)$가 성립한다.

lemma 7

G*를 graph G에서 elementary transformation으로 얻어진 graph라고 하고 P*를 G*를 realizing하는 3-polytope라고 하자. 그러면 G는 (P)-realizable이다.

증명. P를 P*에서 역변환으로 만들면 이 P가 G를 realiging하는 3-polytope이다.

이제 H를 4-valent, 3-connected planar graph라고 하자. $ab\in E(H)$일 때 bc를 ab의 direct extension 라고 하는 것은 ab, bc가 b에서 만나는 다른 두 edge를 분리시킬 경우를 말한다. $a_i\in V(H)$, $(i=0, 1, \cdots, n)$, $a_{i-1}a_i\in E(H)$ $(i=1, 2, \cdots, n)$일 때 $a_0a_1a_2\cdots a_n$을 H에서의 path라고 한다. 모든 $i=1, 2, \cdots, n$에 대하여 a_ia_{i+1}

4. David W. Barnette, On Steinitz's theorm concerning convex 3-polytopes and on Some properties of planar graphs
5. D.W. Baruette, Tree in polyhedral graphs
6. Grünbaum, On the facial structure of convex polytopes

가 $a_{i-1}a_i$의 direct extension 일 때 path $a_0a_1a_2 \cdots a_n$을 geodesic arc라고 한다. L≦H일 때

(i) $Q=a_0a_1 \cdots a_nb_0b_1 \cdots b_ma_0$가 simple closed path 이고 L가 Q와 Q의 내부에 속한 모든 vertex 와 edge로 된 graph이고

(ii) path $a_0a_1 \cdots a_nb_0$와 path $b_0b_1 \cdots b_ma_0$가 geodesic arc이고 Q의 내부에 속한 어떠한 edge 도 pole a_0와 b_0에 incident가 아닌 경우 graph L를 graph H에서의 lens라고 한다.

여기에서 graph H가 4-valent, 3-connected planar graph이면 H안에 lens가 존재한다는 것을 쉽게 알 수 있다.

L이 lens일 때 L의 boundary를 $Q=a_0a_1 \cdots a_nb_0b_1 \cdots b_ma_0$라고 하자. 이 때 $n=m$이고 모든 $i=1, 2, \cdots, n$에 대하여 a_i를 L에 속하는 geodesic arc L_i로서 이은 b_i가 단 하나만 존재할 때 L를 indecomposable lens라고 한다. 이 경우의 L_i를 cut라고 부른다.

lemma 8

L이 indecomposable lens이고 Q가 L의 boundary이면 Q에 접하는 triangular face T가 존재한다.

증명. L에 inner vertex가 없는 경우는 a_0에 접하는 face가 바로 triangle이다.

L에 inner vertex가 존재하는 경우는 이 중에 어떤 a_k에 접하는 것을 $d_1, d_2, \cdots, d_r$로 표시하자. $h(d_i)$를 d_i에서 만나는 두 cut Q_j, Q_k과 그 cut의 끝점 a_j, a_k를 끝점으로 갖는 Q의 부분호로서 만들어진 삼각 영역에서 그 내부의 속에 있는 L의 face의 갯수라고 하자. 이 때

$h(d_i)=\min\{h(d_1), \cdots, d(d_r)\}$이면 d_i, a_j, a_k는 L의 한 삼각형을 결정한다. 이로써 증명이 끝난다.

G가 3-connected planar graph라고 할 때, 새로운 graph I(G)를 다음과 같이 만들자.

I(G)의 vertex는 G의 edge의 내점 하나를 택하고 I(G)의 두 vertex가 한 edge로 연결된다는 것을 이 두 vertex에 대응하는 G의 두 edge가 공통인 vertex를 가지고 G의 같은 face 속에 속해있을 때 그때만이 성립한다고 하자.

여기에서 I(G)는 planar 3-connected graph가 되고 4-valent graph가 된다. 또 $p(I(G))=p(G)+v(G)$이므로 I(G)의 k-gonal face은 G의 k-gonal face에 대응하거나 G의 k-valent vertex에 대응한다.

lemma 9

graph G가 triangular face에 접하는 $d(v)=3$인 vertex v를 가지면 G에서 elementary transformation으로 만든 G*로 $E(G^*)<E(G)$ 되게 할 수 있다.

lemma 10

G가 3-connected planar graph이면 G는 (P^3)-realizable이다.

증명. $e=|E(G)|$에 관한 induction으로 증명한다. G가 3-connected이므로 $e \geqq 6$이다. $e=6$이면 그때에 한하여 $G=K_4$이다. 이 경우에는 P를 3-simplex로 보면 G를 realizing하는 3-polytope가 P가 된다.

$e>6$인 경우에만 증명하면 된다.

lemma 6과 I(G)를 사용하여 lemma 8를 사용할 수 있다. lemma 9에 따라 $E(G^*)<E(G)$인 G*을 만들 수 있고 lemma 7에 따라 G는 (P^3)-realizable이다.

정리 1

G가 maximal k-degenerate이고 $|G|=p \geqq k+1$이면 G는 k-connected이다.

증명. $p=k+1$인 경우

$G=K_{k+1}$이므로 G는 k-connected이다.

$p=k+2$인 경우

$\exists e \in E(K_{k+2}) : G=K_{k+2}-e$

$\therefore$ G는 k-connected이다.

$k+1 \leqq p \leqq n$에 대하여 n에 관한 induction에 따라 증명한다. $p<n$에서 G가 maximal k-degenerate이고 $|G|=p \geqq k+1$이면 G는 k-connected 임을 가정하자.

lemma 3에 따라

$G-v$는 maximal k-degenerate이다

lemma 4에 따라

$G-v$는 k-connected이다.

이 때 G 가 k-connected 가 아니라고 가정하자. 그러면

$\exists$S 는 G 의 $(k-1)$-cutset

$v \in S$ 이면 $S-\{v\}$ 를 $G-v$ 의 $(k-2)$-cutset 이다.

이것은 모순이다.

$v \notin S$ 이면 $G-S$ 의 component C 가 존재하여 $v \in C$ 가 된다. 이 때 $u(\neq v)$가 C 안에 있다면

S 가 $G-v$ 의 $(k-1)$-cutset 가 된다.

이것은 모순이다.

따라서 $C=\{v\}$ 곧 v 는 S 의 점에만 adjacent 한다.

$\therefore d(v) \leqq k-1$

이것은 모순이다.

따라서 G 는 k-connected 이다.

정리 2

G 가 maximal 3-degenerate graph 이고 $|G|=p \geqq 4$ 인 planar graph 이면 G 는 (P^3)-realizable 이다.

증명 정리 1 과 lemma 10 에 따라 직접 유도된다.

〈서울대학교 사범대학 부교수〉

4. 참 고

1. F. Harary, Graph theory, Addison-Wesley, Reading, Massachusetts 1969.
2. M. Behzad and G. chartrand, An introduction to the theory of graphs, Allyn and Bacon
3. E. Steinitz and H. Rademacher, Verlesungen über die Theorie der Polyeder Berlin 1934.
4. David W. Barnette, On Steinitz's Theorem concerning convex 3-polytopes and on some properties of planar graphs, Lecture notes in Math., Springer-Verlag 110
5. D.W. Barnette Tree in polyhedral graphs, Canad. J. Math., 18(1966) 731—736
6. Grünbaum On the facial structure of convex polytopes, Bull. Amer. Math. Soc., 71(1965)

5. Abstract

We consider the class Π_k of all k-degenerate graphs, for k a non-negative integer. The class Π_0 and Π_1 are exactly the classes of totally disconnected graphs and of forests, respectively; the classes Π_2 and Π_5 properly contain all outerplanar and planar graphs respectively. The advantage of this view point is that many of the known results for chromatic number and point arboricity have natural extensions, for all larger values of k.

The purpose of this note is to show that a graph G is (P^3)-realizable if G is planar and 3-degenerate.