<논 說>

조립제법과 유리해를 찾는 방법

나 병 소

다항식 $P(x)$를 일차식 $x-a$로 나눈 몫과 나머지를 구하는 방법으로는 이미 잘 알려진 조립제법이 있다. 나머지 정리(remainder theorem)에 의하면 $P(x)$를 $x-a$로 나눈 나머지는 $P(a)$와 같다. 만일 $P(a)=0$이면 a는 방정식 $P(x)=0$의 해이다. 그래서 조립제법은 방정식 $P(x)=0$의 유리해를 찾는데 이용된다.

여기에서는 2차 이상의 다항식을 2차 이상의 다항식으로 나누는 조립제법과 이것을 이용하여 다항식의 유리해를 찾는 방법을 서술하려 한다.

〈조립제법의 확장〉

먼저 2차 이상의 다항식을 x^2+bx+c과 같은 2차식으로 나눌 때, 이것을 조립제법의 확장으로 간단히 몫과 나머지를 구하는 방법을 생각해 보자.

예를 들어, 다항식 $2x^5+3x^4-x^3+x-1$을 x^2+2x+1로 나눌 때 우리는 보통 다음과 같은 방법을 생각한다.

$$
\begin{array}{r|rrrrrr}
 & 2x^3 & -x^2 & -x & +3 & & \\ \hline
x^2+2x+1 & 2x^5 & +3x^4 & -x^3 & & +x & -1 \\
 & 2x^5 & +4x^4 & +2x^3 & & & \\ \cline{2-4}
 & & -x^4 & -3x^3 & & & \\
 & & -x^4 & -2x^3 & -x^2 & & \\ \cline{3-5}
 & & & -x^3 & +x^2 & +x & \\
 & & & -x^3 & -2x^2 & -x & \\ \cline{4-6}
 & & & & 3x^2 & +2x & -1 \\
 & & & & 3x^2 & +6x & +3 \\ \cline{5-7}
 & & & & & -4x & -4
\end{array}
$$

첫 단계로 이 방법을 계수로 분리해서 계산하면 다음과 같이 된다.

$$
\begin{array}{ll|rrrrrr}
\text{(a)} & & 2 & -1 & -1 & 3 & & \\ \cline{3-8}
\text{(b)} & 1\ 2\ 1 & 2 & 3 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ \cline{2-2}
\text{(c)} & & 2 & 4 & 2 & & & \\ \cline{3-5}
\text{(d)} & & & -1 & -3 & 0 & & \\
\text{(e)} & & & -1 & -2 & -1 & & \\ \cline{4-6}
\text{(f)} & & & & -1 & 1 & 1 & \\
\text{(g)} & & & & -1 & -2 & -1 & \\ \cline{5-7}
\text{(h)} & & & & & 3 & 2 & -1 \\
\text{(i)} & & & & & 3 & 6 & 3 \\ \cline{6-8}
\text{(j)} & & & & & & -4 & -4
\end{array}
$$

위의 과정에서 (c), (e), (g), (i)행의 첫 숫자는 위의 숫자와 중복되어 있으므로 이 숫자를 생략하고 처리해 보자. 더우기 (b), (d), (f), (h)행의 과정에서 첫 숫자는 몫과 일치하므로 사실상 몫은 생략해도 아무런 불편이 없다. 이것을 생략해서 다시 정리해 보면 다음과 같다.

$$
\begin{array}{l|rrrrrr}
1\ 2\ 1 & 2 & 3 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ \hline
 & & 4 & 2 & & & \\ \cline{1-4}
 & & -1 & -3 & 0 & & \\
 & & & -2 & -1 & & \\ \cline{3-5}
 & & & -1 & 1 & 1 & \\
 & & & & -2 & -1 & \\ \cline{4-7}
 & & & & 3 & 2 & -1 \\
 & & & & & 6 & 3 \\ \cline{5-7}
 & & & & & -4 & -4
\end{array}
$$

그런데 젯수 x^2+bx+c의 2차항의 계수는 1이므로 이것을 생략해도 좋겠다. (젯수가 ax^2+bx+c의 경우는 뒤에 설명하겠음.) 또 위의 계산 과정에서는 첫 식에서 둘째 식을 빼는 것이므로 빼는 과정을 더하도록 하기 위하여 젯수의 계수 2, 1 대신에 -2, -1과 같이 부호를 바꾸면 좀 더 간편해질 수 있겠다.

그래서 우리는 다음과 같은 계산 과정을 얻는다.

$$
\begin{array}{ll|rrrrrr}
 & & & & & & & \\ \cline{3-8}
\text{(b)} & -2\quad -1 & 2 & 3 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ \cline{2-2}
\text{(c)} & & & -4 & -2 & & & \\ \cline{4-5}
\text{(d)} & & & -1 & -3 & 0 & & \\
\text{(e)} & & & & +2 & +1 & & \\ \cline{4-6}
\text{(f)} & & & & -1 & 1 & 1 & \\
\text{(g)} & & & & & 2 & 1 & \\ \cline{6-7}
\text{(h)} & & & & & 3 & 2 & -1 \\
\text{(i)} & & & & & & -6 & -3 \\ \cline{7-8}
\text{(j)} & & & & & & -4 & -4
\end{array}
$$

위의 계산에서 ○표 한 수는 중간의 계산 과정에서 나타나는 수이므로 사실상 필요없는 숫자이다. 예를 들어 (f)행의 -1은 -1에 -2와 $+2$를 더한 것이고, (d)행의 -3은 이 계산에서 -1에 -2를 더한 것이므로 이것을 생략하

고 바로 계산해도 된다는 말이다. 또 (d), (f), (h)의 끝 숫자 0, 1, -1은 피젯수에서 내려온 숫자이므로 생략할 수 있다. 그래서 이와 같은 숫자를 제외하면 이 과정을 4행으로써 간단히 처리할 수 있다.

$$\begin{array}{lrr|rrrrrr}
(1) & -2 & -1 & 2 & 3 & -1 & 0 & 1 & -1 \\
(2) & & & & & -2 & 1 & 1 & -3 \\
(3) & & & & -4 & 2 & 2 & -6 & \\
\hline
(4) & & & 2 & -1 & -1 & 3 & -4 & -4
\end{array}$$

여기에서 (4)행의 처음 네 수는 몫 $2x^3-x^2-x+3$의 계수이고, 마지막 두 수는 나머지 $-4x-4$의 계수이다.

이 과정을 간단히 설명하면 다음과 같다.

1. 피젯수인 다항식의 계수를 (1)행에 쓴다. 이 때 빠진 찻수가 있으면 0으로 쓰고, 두 행을 띄우고 선을 긋는다.
2. 만일 젯수가 x^2+bx+c이면 $-b$, $-c$를 (1)행에 쓴다.
3. (4)행의 첫 열에 피젯수의 첫 계수를 쓴다.
4. 이 수와 $-b$, $-c$와의 곱을 선 위의 두 행 (2), (3)의 그 다음 열에 차례로 쓴다.
5. 다음 열을 계산하여 그 합을 (4)행에 쓴다.
6. 4와 5의 방법을 마지막 열에 올 때까지 계속한다.
7. 마지막 두 열을 더하여 (4)행에 쓴다.

이 과정을 도표로 나타내면 (fig. 1)과 같다. ⟶표는 합을 말하고 - - →표는 -2와의 곱을, ⟶표는 -1과의 곱을 의미한다.

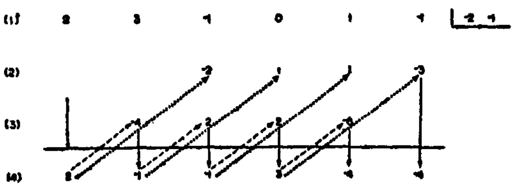

Fig. 1

만일 젯수가 ax^2+bx+c일 때는 2차항의 계수가 1이 아니므로 이 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $mx+n$이라 하면, 피젯수 $P(x)$는 다음과 같이 표현되므로

$$\begin{aligned} P(x) &= Q(x)(ax^2+bx+c)+(mx+n) \\ &= aQ(x)\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)+(mx+n) \end{aligned}$$

$P(x)$를 $x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}$로 나눈 몫은 $aQ(x)$가 되어 이것을 다시 a로 나누면 몫이 나오므로 먼저 $x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}$로 나누어 몫을 구하고, 그 몫을 다시 a로 나누면 된다. 이 때 나머지는 a로 나누지 않는다.

예를 들면 $3x^5-x^4+6x^3-2x+4$를 $2x^2-4x+8$로 나눌 때 우리는 젯수를 x^2-2x+4로 변형하여

$$\begin{array}{rr|rrrrrr}
2 & -4 & 3 & -1 & 6 & 0 & -2 & 4 \\
& & & & -12 & -20 & -16 & 48 \\
& & & 6 & 10 & 8 & -24 & \\
\hline
& & 3 & 5 & 4 & -12 & -42 & 52
\end{array}$$

몫과 나머지 $3x^3+5x^2+4x-12$, $-42x+52$를 구하고 몫을 다시 2로 나누어 $\frac{3}{2}x^3+\frac{5}{2}x^2+2x-6$을 몫으로 하고, 나머지는 $-42x+52$가 된다.

젯수가 3차 이상일 때는 어떻게 조립제법을 이용할 것인가 다음 예를 보고 생각해 보자.

$$(3x^5+x^4+4x^2+2x+5)\div(x^3+x^2-2x-1)$$

$$\begin{array}{rrr|rrrrrr}
-1 & 2 & 1 & 3 & 1 & 0 & 4 & 2 & 5 \\
& & & & & & 3 & -2 & 8 \\
& & & & & 6 & -4 & 16 & \\
& & & & -3 & 2 & -8 & & \\
\hline
& & & 3 & -2 & 8 & -5 & 16 & 13
\end{array}$$

몫 : $3x^2-2x+8$ 나머지 : $-5x^2+16x+13$

〈응　용〉

앞에서 생각한 조립제법을 이용하여 고차방정식의 유리해를 찾아내는 방법을 생각해 보자.

우선 우리는 다음과 같은 정리를 증명해 보자.

Theorem

2차 이상인 다항식 $P(x)$를 x^2+bx+c로 나눌 때 나머지를 $mx+n$이라고 하자. 만일 r이 $x^2+bx+c=0$의 해이면 r이 방정식 $P(x)=0$의 해일 필요충분조건은 $r=-\frac{n}{m}$일 때이다.

〔Proof〕

$P(x)$를 x^2+bx+c로 나눈 몫을 $Q(x)$라 놓으면 $P(x)=Q(x)(x^2+bx+c)+(mx+n)$이 된다. 만일 $r=-\frac{n}{m}$이라면 $P(r)=Q(r)(0)+0=0$이므로 r은 $P(x)=0$의 해이다.

역으로 만일 $P(r)=0$이라면 $0=P(r)=Q(r)(0)+(mr+n)$이므로 $mr+n=0$ 즉 $r=-\frac{n}{m}$이다.

만일 우리가 고차방정식 $P(x)=0$ 의 유리해를 구하려 한다면, 유리해의 정리는 만일 유리해가 존재한다면 유리해는 $\pm a$, $\pm b$, ……, $\pm k$ 중 어느 것이라는 것을 말하고 있다. 〔유리해의 정리(rational root theorem) : 정계수 다항식 $P(x)=a_nx^n+\cdots\cdots+a_1x+a_0$ 에서 $P(x)=0$ 의 유리해는 만일 존재한다면 $\frac{p}{q}$ 로 나타내진다. 이때 p 는 a_0 의 약수이고, q 는 a_n 의 약수이다.〕

보통 우리는 가능한 유리해를 한 번에 하나씩 조립제법과 나머지 정리를 써서 조사했는데, 여기에서 설명한 정리를 이용하면 동시에 2개의 유리해를 조사해 볼 수가 있다.

예를 들면 $+a$, $-a$ 의 두 수가 $P(x)=0$ 의 방정식의 해가 되는지는 $(x-a)(x+a)=x^2-a^2$ 이므로 $P(x)$를 x^2-a^2 으로 나누어 봄으로써 알 수 있다.

$$P(x)=Q(x)(x^2-a^2)+(mx+n)$$

에서 $+a$ 또는 $-a$ 중 $-\frac{n}{m}$과 같아지는 수가 있다면 그 수는 방정식 $P(x)=0$ 의 해이며 어느 것도 $-\frac{n}{m}$과 같지 않다면, $+a$, $-a$ 의 어느 것도 해가 아니므로 동시에 두 수는 해에서 제외될 수 있는 것이다. 물론 나머지가 0 이면 x^2-a^2 은 $P(x)$의 약수이므로 $+a$, $-a$ 모두가 해가 된다.

다음의 방정식을 가지고 생각해 보자.

$$3x^3-2x^2-5x-6=0$$

유리해의 정리에 의하면 이 방정식의 가능한 유리해는 ± 1, ± 2, ± 3, ± 6, $\pm\frac{1}{3}$, $\pm\frac{2}{3}$이다.

± 1 을 조사하기 위해서 x^2-1 로 나누어 보면

$$\begin{array}{r|rrrr} 0\ \ 1 & 3 & -2 & -5 & -6 \\ & & & 3 & -2 \\ & & 0 & 0 & \\ \hline & 3 & -2 & -2 & -8 \end{array}$$

여기에서 $m=-2$, $n=-8$ 이므로 $r=-\frac{(-8)}{(-2)}=-4$ 이다. 그런데 이것은 $+1$, -1 과 같지 않으므로, ± 1 은 이 방정식의 해가 아니다.

다음에 ± 2 에 대하여 조사하면

$$\begin{array}{r|rrrr} 0\ \ 4 & 3 & -2 & -5 & -6 \\ & & & 12 & -8 \\ & & 0 & 0 & \\ \hline & 3 & -2 & 7 & -14 \end{array}$$

에서 나머지는 $7x-14$ 이므로 $r=+2$ 이다. 그러므로 $+2$ 는 이 방정식의 해이다.

〔참고 문헌〕

Margaret Wiscamb Hutchinson "Using Synthetic Division by Quadratics to Find Rational Roots" The Mathematics Teacher Vol. LXIV, No. 4 pp. 349—352. N.C.T.M. (1971)