不規則 海洋波에 對한 船體運動의 等價線型化 方法에 關하여

禹 奉 九*

The Equivalent Value of the Linearized Method for the Ship Motion in Irregular Sea Waves

by

Bong Ku Woo

Abstract

The characters of linear response of ship among irregular waves were researched. But nonlinear characters of ship motion in irregular waves have not been considered. Then the author showed a method to linearize nonlinearity of damping coefficient of ship by making statistically equivalent linear theory and get equivalent gain K from the condition that the difference of variance between linear responce and approximate responce is minimum and show that the results of correlogram and spectrum, obtained from this method, for model 700 GT Ferry boat agree with the actual responce.

The author pays a particular attention not to the nonlinear element but to nonlinear system itself.

1. 緖 論

規則波中 船體運動에 關하여는 理論과 實驗으로 매우 詳細히 硏究되어 왔으나 不規則波中 船體運動이 微少運動의 範圍를 벗어 난 非線型運動에 關해서는 거의 硏究되지 않았음으로 本硏究에서는 橫搖時 船의 運動方程式中 damping coefficient 가 非線型인 random 入力을 받았을 때, 船의 應答을 統計的 等價線型化方法[4] 으로 解析하기로 한다. 等價線型化方法으로는 非線型인 要素, 그 自體에만 依存하지 않고 非線型系의 應答과 線型化된 應答과의 差, 即 眞應答의 分散과 線型化된 近似應答의 分散과의 差가 最少가 되게 等價 gain 을 決定함으로 非線型要素以外系의 構成要素에도 依存하게 된다.

2. 不規則波應答解一定常不規則過程

不規則波의 性格은 確率密度函數에 依하여 알 수 있으며 $p_1(y_1,t_1)$과 같은 一次元 確率密度函數는 크기가 不規則的으로 變動하는 同時에 그 不規則變動에 注目한 時間에도 관계가 있다.

그러나 우리가 取扱하는 不規則波, $y(t)$에 對하여는 이것을 確率變數로 定하고 數集合 $\{y(t)\}$를 생각하였을 때 $t=t_1$에선 $\{y(t_1)\}$ 과 $t_2=t_1+\tau$ 에선 $\{y(t_2)\}$ 의 統計的 性質은 變치 않는다고 假定하면 一次元確率密度函數 $p_1(y,t_1)=p_1(y)$ 로 되고 二次元確率密度函數 $p_2(y_1,t_1;\ y_2,t_2)=p_2(y_1,y_2;\ \tau)$로 되어 單純히 $t_2-t_1=\tau$ 인 時間간격에 依存하게 된다. 이것을 定常性假說이라 하며 이것을 導入하면 다음과 같은 式들이 成立된다 [3].

接受日字 1971年 11月 3日

* 正會員, 仁荷工科大學

i) $y(t)$의 平均

$$m_y = \langle y(t)\rangle_{s\cdot av} = \int_{-\infty}^{+\infty} y p_1(y)\ dy \tag{2.1}$$

ii) $y(t)$의 二乘平均値

$$\langle \{y(t)\}^2\rangle_{s\cdot av} = \int_{-\infty}^{+\infty} y^2 p_1(y)\ dy \tag{2.2}$$

iii) $y(t)$의 分散

$$\sigma_y = \langle \{y(t)-m_y\}^2\rangle_{s\cdot av} = \int_{-\infty}^{+\infty} \{y(t)-m_y\}^2 p_1(y)\ dy \tag{2.3}$$

iv) $y(t)$의 特性函數

$$\varphi(w) = \langle exp(jwy)\rangle_{s\cdot av} = \int_{-\infty}^{+\infty} p_1(y)\ exp(jwy)\ dy \tag{2.4}$$

v) $y(t)$의 自己相關函數

$$\psi_y(\tau) = \langle \{y(t)-m_y\}\{y(t+\tau)-m_y\}\rangle_{s\cdot av} = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} (y_1-m_y)(y_2-m_y)p_2(y_1, y_2;\ \tau)\ dy_1\, dy_2 \tag{2.5}$$

但, $y_1=y(t)$, $y_2=y(t+\tau)$

그리고 集合平均과 時間平均이 同一하다는 Ergode의 假說에 依해서 위의 여러가지 parameter들은 다음과 같은 時間平均에서 求할 수 있다.

i) $y(t)$의 平均値

$$m_y = \langle y(t)\rangle_{av} = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{+T} y(t)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} y p_1(y)\ dy \tag{2.6}$$

ii) $y(t)$의 二乘平均値

$$\langle \{y(t)\}^2\rangle_{av} = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{+T} y^2(t)\ dt = \int_{-\infty}^{+\infty} y^2 p_1(y)\ dy \tag{2.7}$$

iii) $y(t)$의 分散

$$\sigma_y = \langle \{y(t)-m_y\}^2\rangle_{av} = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{+T}\{y(t)-m_y\}^2\ dy = \int_{-\infty}^{+\infty}\{y(t)-m_y\}^2 p_1(y)\ dy \tag{2.8}$$

iv) $y(t)$의 特性函數

$$\varphi(w) = \langle exp(jwy)\rangle_{av} = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{+T} exp\{jwy(t)\}\ dt = \int_{-\infty}^{+\infty} exp\{jwy(t)\}p_1(y)\ dy \tag{2.9}$$

v) $y(t)$의 共分散(自己相關函數)

$$\psi_y(\tau) = \langle \{y(t)-m_y\}\{y(t+\tau)-m_y\}\rangle_{av} = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{+T} \{y(t)-m_y\}\{y(t+\tau)-m_y\}\ dt$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} (y_1-m_y)(y_2-m_y)p_2(y_1, y_2;\ \tau)\ dy_1\, dy_2 \tag{2.10}$$

上述한 바와 같이 不規則波에 關하여는 確率密度函數를 定義하였음으로 이 函數에 依해 支配되는 數學的 모델을 想定하고 이 모델이 갖고 있는 確率密度函數로부터 위와 같은 各種의 統計學的 parameter를 定義하여 이 값들에 依하여 一個의 性格을 平均的 見解로 表現하려고 하는 것이며 이들의 假定에 따르는 것을 定常不規則波라고 한다.

3. 一般調和解析—自己相關函數

不規則波의 性質을 調査하는데 잘 쓰이는 量인 自己相關函數는

$$\varphi_y(t_1-t_2)=\varphi_y(t_2-t_1)=\langle y(t_1)y(t_2)\rangle=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{+T/2}y(t+t_1)y(t+t_2)\,dy \tag{3.1}$$

과 같이 나타내며 自己相關函數가 주어지면 不規則波의 $t_1=t_c$ 에 있어서 時間二乘平均値는

$$\varphi_y(0)=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{+T/2}y^2(t)\,dt=\langle y(t)^2\rangle \tag{3.2}$$

에서 구해지고 또 Ergode 性波에 關한 自己相關函數, 自己分散函數 $K_y(t)$ 및 二次 모우먼트函數 $\phi_y(t)$와의 사이에 다음 관계가 成立한다.

$$\varphi_y(t)=\phi_y(t)=\iint_{-\infty}^{+\infty}y_1y_2f_2(y_1,y_2;\ t)dy_1dy_2=K_y(t)+\bar{y}^2 \tag{3.3}$$

特히 確率密度函數의 特性函數를 알면 다음 관계도 有用함으로 때때로 쓰인다.

$$\langle y\rangle=-j\frac{\partial}{\partial\xi_1}\phi_1(j\xi_1)|_{\xi_1=0}=\bar{y} \tag{3.4}$$

$$\phi_y(t)=\frac{\partial^2}{\partial\xi_1\,\partial\xi_2}\varphi(j\xi_1,j\xi_2;\ t)|_{\xi_1=\xi_2=0}=\overline{y_1y_2} \tag{3.5}$$

그리고 平均値가 0인 定常正規波의 二次確率密度函數는 아래의 式과 같다.

$$f_2(y_1,y_2;\ t)=\frac{exp[-(y_1^2+y_2^2-2\rho y_1y_2)/2\alpha^2(1-\rho^2)]}{2\pi\sigma^2\sqrt{1-\rho^2}} \tag{3.6}$$

$$\phi_{y_1y_2}(j\xi_1,j\xi_2;\ t)=exp[-\alpha^2(\xi_1^2+\xi_2^2+2\xi_1\xi_2\rho)/2] \tag{3.7}$$

但, α는 t에 無關係인 定數, $\rho=\rho(t)$.

(3.3)式과 (3.4)式에서

$$\left.\begin{aligned}\bar{y}_1&=\bar{y}_2=0\\ \bar{y}_1^2&=\bar{y}_2^2=\alpha^2\\ \overline{y_1y_2}&=\alpha^2\rho(t)\end{aligned}\right\} \tag{3.8}$$

이 유도된다. 여기서 自己相關函數의 性質을 記述하여 두기로 한다.

i) $\varphi_y(0)=\langle y^2\rangle$는 標本波의 平均 power를 表示한다.

ii) $\varphi_y(t)$는 t의 짝함수이다. 即 $\varphi_y(t)=\varphi_y(-t)$ (3.9)

iii) $\varphi_y(0)$는 $\varphi_y(t)$의 $-\infty\leq t\leq\infty$ 에서 最大値이다.

即 $\varphi_y(0)\geqq|\varphi_y(t)|\geq 0$ 但, $-\infty\leq t\leq+\infty$ (3.10)

이것은 $0\leq\langle[y(t_1)\pm y(t_2)]^2\rangle=2\varphi_y(0)\pm 2\varphi_y(t)$를 變形함으로써 證明된다.

iv) y가 Ergode 性波이고 直流成分以外의 確率成分을 갖지 않으면

$$\varphi_y(\pm\infty)=\phi_y(\pm\infty)=-[\int_{-\infty}^{+\infty}yf_1(y)dy]^2=\bar{y}^2 \tag{3.11}$$

即 $\varphi_y(\pm\infty)$는 直流 power를 나타낸다.

v) y가 Ergode 性波이면

$$\phi_y(t)=\langle y_1,\dot{y}_2\rangle=\overline{y_1\dot{y}_2}=-\frac{d}{dt}\phi_y(t) \tag{3.12}$$

但, ·는 時間微分을 表示한다.

vi) $\langle y_1\dot{y}_2\rangle+\langle\dot{y}_1y_2\rangle=0$ (3.13)

$\langle y_1\ddot{y}_2\rangle+\langle\ddot{y}_1y_2\rangle=2\ddot{\varphi}_y(t)$ (3.14)

y가 Ergode 性이면 다음 式과 같다.

$$\overline{y_1\dot{y}_2}+\overline{\dot{y}_1y_2}=0 \tag{3.15}$$

$$\overline{y_1\ddot{y}_2}+\overline{\ddot{y}y_2}=2\varphi_y(t) \tag{3.16}$$

vii) $\varphi_y(t)$, $\psi_y(t)$의 代身에

$$\gamma_y(t)=\frac{\varphi_y(t)}{\varphi_y(0)},\quad \zeta_y(t)=\frac{\psi_y(t)}{\psi_y(0)} \tag{3.17}$$

인 量을 쓰는 경우도 있다.

4. 確率過程式의 Fourier 解析— 一個의 標本過程이 $y(t, S_n)$인 경우

過程 $y(t,s)$에 關하여는 確率變數의 경우와 同一하게 確率分布函數 $p(y_t)$, 同時分布函數 $p(y_1, y_2, \cdots)$와 平均値 및 分散을 위시하여 여러가지 期待値 $E[y(y_1,y_2)]=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}y(y_1,y_2)p(y_1,y_2)\,dy_1\,dy_2$ 等이 定義되고 自己相關函數는 다음과 같다.

$$\varphi_y(t_1,t_2)=E[y_1y_2^*]=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}y_1y_2^*p(y_1,y_2)\,dy_1\,dy_2 \tag{4.1}$$

그러나 $E[cy_1-m_{y_1})(y_2-m_{y_2})^*]$는 自己共分散函數(Auto-Covariance Function)이고 $m_{y_1}=0$, $m_{y_2}=0$인 경우엔 自己相關函數와 同一하게 된다(*: 共軛數를 表示한다). 正規化하여서

$$\rho_y(t_1,t_2)=\psi\{(y_1-m_{y_1})(y_2-m_{y_2}^*)\}/\sigma_{y_1}\sigma_{y_2}=[\psi_x(t_1,t_2)-m_{y_1}m_{y_2}]/\sigma_{x_1}\sigma_{x_2} \tag{4.2}$$

를 自己相關函數係數(Auto-Correlation Coefficient)라고 하며 定常過程에서는 自己相關函數가 時間差 τ만의 函數임으로 다음 式과 같다.

$$\varphi_y(t_1,t_2)=\psi_y(t+\tau;\ t)=E[y_{t+\tau}+y_t^*] \tag{4.3}$$

이 때 平均値와 分散은 時間에 依하여 變化하지 않음으로 $\rho_y(\tau)=[\psi_y(\tau)-m_y^2]/\sigma_y^2$이 되고 $m_y=0$일 때 $\sigma^2_y=\psi_y(0)$임으로 $\rho_y(\tau)=\psi_y(\tau)/\psi_y(0)$가 된다. 그러나 power spectrum density function은 相關函數의 Fourier 變換으로 定義되며 이것은 一般調和解析의 경우와 같다.

$$\Phi_{11}(\omega)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi_{11}(t)e^{-j\omega\tau}\,d\tau \tag{4.4}$$

또는 $\Phi(f)=\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi_{11}(\tau)e^{-j2\pi f\tau}\,d\tau$ 但, $w=2\pi f$

$$\varphi_{11}(\tau)=\int_{-\infty}^{+\infty}\Phi_{11}(\omega)e^{jw\tau}\,dw=2\int_0^\infty\Phi_{11}(f)\cos 2\pi ft\,dt \tag{4.5}$$

$\varphi_{11}(\tau)$는 τ의 짝함수임으로

$$\Phi_{11}(\omega)=\frac{2}{2\pi}\int_0^\infty\varphi_{11}(\tau)\cos\omega\tau\,d\tau \tag{4.6}$$

$$\phi_{11}(f)=2\int_0^\infty\varphi_{11}(\tau)\cos 2\pi f\tau\,d\tau \tag{4.7}$$

$$\varphi_{11}(\tau)=2\int_0^\infty\phi_{11}(\omega)\cos\omega\tau\,d\omega=2\int_0^\infty\phi_{11}(f)\cos 2\pi ft\,dt \tag{4.8}$$

이 되며 定常確率過程 $y(t)$가 보통 實數函數의 경우와 마찬가지로 區間 $A\leq t\leq B$에 對하여 複素數의

exponential 로 展開된다고 생각하면

$$y(t)=2C_n e^{jnw_0 t} \quad 但,\ 2\pi/(B-A)=w_0 \tag{4.9}$$

$$C_n=\frac{1}{B-A}\int_A^B y(t)e^{-jnw_0 t}dt \tag{4.10}$$

C_n 을 確率變數 $B-A=T$ 로 하면

$$\lim_{T\to\infty} T.E[C_n, C_m]=\begin{cases}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi_y(u)e^{-jw_n u}du, & m=n\\ 0 & m\neq n\end{cases} \tag{4.11}$$

이며 $w_n=n\cdot 2\pi/T=nw_0$, $n\to\infty$ 일 때 $nw_0=w$ 로 하면 $y(t)$를 區間 $[A,B]$에서 變換하여

$$Y_T(\omega)=\lim_{A\to-\infty}\int_A^B y(t)e^{-jwt}\,dt=\lim_{T\to\infty} TC_n \tag{4.12}$$

로 하면

$$\Phi(w)\,dw=\lim_{T\to\infty} E[|C_n|^2]=\lim_{T\to\infty}\{Y(w)/T\}^2 \tag{4.13}$$

이 된다. 그러나 實際計算에 있어서는 $\{Y(w)/T\}^2$ 로부터 $T\to\infty$ 로 되면 平均値는 $\Phi(w)dw$ 와 같으나 分散이 크며 매우 離散되어 $\Phi(w)dw$ 에 收斂하지 않는 까닭으로 $\phi_{11}(w)dw$ 를 求할 수는 없다.

(4.12)式으로부터 形式的으로

$$y(t)=\int_{-\infty}^{+\infty} e^{jwt}\sqrt{\Phi(\omega)\delta\omega} \tag{4.14}$$

라는 $y(t)$의 spectrum 을 나타낼 수 있으며 確率過程 power 는 標本過程 power 의 統計的 期待値로 생각하여도 상관없음으로

$$\text{Power}=E\left[\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{+T/2}|y(t)|^2dt\right]=\lim_{T\to\infty}\sum_{n=-\infty}^{\infty}|C_n|=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}E\left[|C_n|^2\cdot T\cdot\frac{2\pi}{T}\right]$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}2\pi\Phi(w)\,dw=\int_{-\infty}^{+\infty}\Phi(w)\,dw \tag{4.15}$$

이 되며 또 (4.5)式으로부터

$$\text{Power}=\int_{-\infty}^{+\infty}\Phi(w)\,dw=R(0)=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-\infty}^{+\infty}|y(t)|^2\,dt=E[|y(t)|^2]=\sigma_x^2 \tag{4.16}$$

即 Spectrum 이 $-\infty$ 부터 $+\infty$ 까지 포함한 面積이 바로 σ_x^2 이 된다.

5. 橫搖運動方程式

5.1 船의 橫搖運動方程式과 非線型要素[2]

線型運動方程式을 쓰면 이미 아는 바와 같이 다음 式과 같다

$$J_s\ddot{\theta}+B_s\dot{\theta}+K_s\theta=M_w \tag{5.1}$$

(5.1)式中 damping 項이 zero memory 形의 非線型要素로 바꾸어 쓰면

$$J_s\ddot{\theta}+B_s\dot{\theta}+\beta f(\dot{\theta})+K_s\theta=M_w \tag{5.2}$$

로 되며 (5.2)式을 等價 gain K 를 利用하여 다시 쓰면

$$J_s\ddot{\theta}+B_s\dot{\theta}+\beta K\dot{\theta}+K_s\theta=M_w-\beta e(\dot{\theta}) \tag{5.3}$$

但, M_w 는 不規則波의 强制 모우먼트이다.

$$e(\dot{\theta})=-f(\dot{\theta})-K\dot{\theta} \tag{5.4}$$

이며 $e(\theta)$는 非線型要素와 線型化된 要素와의 差를 말하며 (5.2)式에서 $f(\theta)$는 θ^2 項까지만 考慮하여 正規化하면

$$\ddot{\theta}+(b_{so}+\beta\dot{\theta})\dot{\theta}+\omega_s^2\theta=\omega_s\gamma\Theta_w \tag{5.5}$$

로 되며

$$|\Theta_w|=\pi\times\left|\frac{2\pi h(w)}{\lambda(w)}\right|=\frac{2\pi}{\lambda(w)}\left|h(w)\right|=\frac{w^2}{g}\left|h(w)\right| \tag{5.6}$$

이며 (5.6)式을 (5.5)式에 代入하면

$$\ddot{\theta}+(b_{so}+\beta\dot{\theta})\dot{\theta}+\omega_s^2\theta=\omega_s^2\frac{\omega^2}{g}\gamma|h(\omega)| \tag{5.7}$$

이 된다.

5.2 等價線型運動方程式과 等價 gain K의 評價

$$\ddot{\theta}_l+(b_{so}+K\beta)\dot{\theta}_l+\omega_s^2\theta_l=\Phi h \tag{5.8}$$

但, $\Phi=\gamma\frac{\omega_s^2\omega^2}{g}$, h=波의 振幅

(5.8)式에서 θ_l는 線型化運動方程式의 解 即 船의 應答을 表示하고 있으며 $\theta_l(t)$의 分散 $\sigma_{\theta l}$는

$$\sigma_{\theta l}=\frac{\Phi^2\alpha}{\omega_s^2+\alpha}\int_0^\infty e^{-\alpha t}\cos\omega_s t dt\times\varphi_{hh}(\tau) \tag{5.9}$$

이며 (5.3)式으로부터 $\theta(t)$의 分散 σ_θ를 評價하면

$$\sigma_\theta=\frac{\Phi^2\alpha}{\omega_s^2+\alpha}\int_0^\infty e^{-\alpha t}\cos\omega_s t dt[\varphi_{hh}(\tau)-\varphi_{ee}(\tau)-\varphi_{eh}(\tau)-\varphi_{he}(\tau)] \tag{5.10}$$

이 된다. 따라서 (5.9)式과 (5.10)式으로부터

$$\sigma_\theta-\sigma_{\theta l}=\frac{\Phi^2\alpha}{\omega_s^2+\alpha}\int_0^\infty e^{-\alpha t}\cos\omega_s t dt\{\varphi_{ee}(\tau)-\varphi_{eh}(\tau)-\varphi_{he}(\tau)\}$$
$$=\frac{\Phi^2\alpha^2}{(\omega_s^2+\alpha)^2}\{\varphi_{ee}(\tau)-\varphi_{eh}(\tau)-\varphi_{he}(\tau)\} \tag{5.11}$$

이 됨으로 (5.11)式에서 $\sigma_\theta-\sigma_{\theta l}$의 絕對値가 最少가 되게 K의 값을 求하면 된다. 入力이 正規性定常波라 하더라도 이 波를 入力으로 하는 系가 非線型이면 이를 通過한 out-put 即 船의 應答을 나타냄으로 確率密度는 이미 正規分布(gauss 分布)가 아니며 $\theta(t)$의 統計的 性質이 未知인고로 K의 決定은 不可能하다. 따라서 이것을 線型應答의 統計的 性質을 利用하여 다음과 같이 近似的으로 풀기로 한다.

$$\varphi_{ee}(\tau)\cong\varphi_{ee}^*(\tau)=\varphi_{ff}^*(\tau)-2K\varphi_{f\dot{\theta}}(\tau)+K^2\varphi_{\dot{\theta}\dot{\theta}}(\tau) \tag{5.12}$$

$$\varphi_{eh}(\tau)\cong\varphi_{eh}^*(\tau)=\left(b_{so}+K\beta+\frac{\partial}{\partial\tau}\right)\{\varphi_{\dot{\theta}f}(\dot{\theta})-K\varphi_{\dot{\theta}\dot{\theta}}(\tau)+\omega_s^2\varphi_{\theta f}(\dot{\theta})-K\omega_s^2\varphi_{\theta\dot{\theta}}(\tau)\} \tag{5.13}$$

$$\varphi_{he}(\tau)\cong\varphi_{he}^*(\tau)=\left(b_{so}+K\beta-\frac{\partial}{\partial\tau}\right)\{\varphi_{\dot{\theta}f}(\theta)-K\varphi_{\dot{\theta}\dot{\theta}}(\tau)+\omega_s^2\varphi_{\theta f}(\theta)-K\omega_s^2\varphi_{\theta\dot{\theta}}(\tau)\} \tag{5.14}$$

(5.12)式, (5.13)式, (5.14)式을 (5.11)式에 代入하면

$$\sigma_\theta-\sigma_{\theta l}=\frac{\Phi^2\alpha^2}{(\omega_s^2+\alpha)^2}[\varphi_{ff}^*(\tau)-2K\varphi_{f\dot{\theta}}^*(\tau)+K^2\varphi_{\dot{\theta}\dot{\theta}}^*(\tau)-2(b_{so}+K\beta)\{\varphi_{\dot{\theta}f(\dot{\theta})}(\tau)$$
$$-K\varphi_{\dot{\theta}\dot{\theta}}(\tau)+\omega_s^2\varphi_{\theta f(\dot{\theta})}(\tau)-K\omega_s^2\varphi_{\theta\dot{\theta}}(\tau)\}] \tag{5.15}$$

와 같이 된다. (5.15)式의 左邊의 絕對値를 最少로 하는 K는 左邊을 零으로 놓고 풀면 된다.

$$\varphi_{ff}(\tau)-2K\varphi_{f\dot{\theta}}(\tau)+K^2\varphi_{\dot{\theta}\dot{\theta}}(\tau)-2(b_{so}+K\beta)\{\varphi_{\dot{\theta}f(\dot{\theta})}-K\varphi_{\dot{\theta}\dot{\theta}}+\omega_s^2\varphi_{\theta f(\dot{\theta})}-K\omega_s^2\varphi_{\theta\dot{\theta}}\}=0 \tag{5.16}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\int \rho_{\dot\theta}{}^{n}(\tau)a_n{}^2-2K\frac{a_1}{\sigma_{\dot\theta l}\omega_s}\varphi_{\dot\theta\dot\theta}(\tau)+K^2\varphi_{\dot\theta\dot\theta}(\tau)-2(b_{so}+K\beta)\left\{\frac{a_1}{\sigma_{\theta l}}\varphi_{\dot\theta\dot\theta}(\tau)\right.$$

$$\left.-K\varphi_{\dot\theta\dot\theta}(\tau)+\omega_s{}^2\frac{\varphi_{\dot\theta f(\dot\theta)}}{\omega_s}-K\omega_s{}^2\frac{1}{\omega_s}\varphi_{\dot\theta\dot\theta}(\tau)\right\}=0 \tag{5.17}$$

(5.17)式에서

$$a_n=\frac{1}{\sqrt{2\pi n!}\ \sigma_{\theta_n}}\int_{-\infty}^{+\infty}f(\theta_n)H_n\left(\frac{\theta_n-m_{\theta_n}}{\sigma_{\theta_n}}\right)exp\left(-\frac{(\theta_n-m_{\theta_n})^2}{2\sigma_{\theta_n}{}^2}\right)d\theta_n \tag{5.18}$$

$$(n=1,2,\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots)$$

이 되며 (5.18)式에서 H_n은 Chebychev-Hermite의 多項式이며 a_n 係數는 非正規分布를 正規分布函數의 母函數로 한 多項式으로 表現하고 있다.*

實際 β의 係數를 0.10, 0.115, 0.130인 强한 非線型을 取하여 船의 橫搖方程式을 Analog-Computer로 풀어서 그 應答을 調査한 結果 $\rho_{\dot\theta}(\tau)\fallingdotseq\rho_\theta(\tau)$, $a_n(\dot\theta)\fallingdotseq a_n(\theta)$임으로

$$\sum_{n=1}^{\infty}\rho_\theta{}^n(\tau)a_n{}^2-2K\frac{a_1}{\sigma_{\dot\theta l}}\varphi_{\dot\theta\dot\theta}(\tau)+K^2\varphi_{\dot\theta\dot\theta}(\tau)-2(b_{so}+K\beta)$$

$$\times\left\{\frac{a_1}{\sigma_{\dot\theta l}}\varphi_{\dot\theta\dot\theta}(\tau)-K\varphi_{\dot\theta\dot\theta}(\tau)+\omega_s{}^2\frac{a_1}{\omega_s}\frac{\varphi_{\dot\theta\dot\theta}(\tau)}{\sigma_{\dot\theta l}}-K\omega_s{}^2\frac{1}{\omega_s}\varphi_{\dot\theta\dot\theta}(\tau)\right\}=0 \tag{5.19}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\rho_{\theta}{}^n a_n{}^2-2a_1b_{so}(1-w_s)-2a_1K-2a_1\beta(1-\omega_s)K+2\omega_s{}^2\sigma_{\theta l}b_{so}(1+$$

$$\omega_s)K+\omega_s{}^2\sigma_{\theta l}K^2+2\omega_s{}^2\sigma_{\theta l}\beta(1+\omega_s)K^2=0 \tag{5.20}$$

이 成立하므로 (5.20)式으로부터 K(等價 gain)을 求하면

$$K=\frac{-B\pm\sqrt{B^2-AC}}{A} \tag{5.21}$$

$$K=\frac{1}{\omega_s{}^2\sigma_{\theta l}{}^2\{1+2\beta(1+\omega_s)\}}[a_1(1+\beta-\beta\omega_s)-\omega_s{}^2b_s\sigma_{\theta l}{}^2(1+\omega_s)+$$

$$\{a_1(1+\beta-\beta\omega_s)-\omega_s{}^2b_{so}\sigma_{\theta l}{}^2(1+\omega_s)\}\times$$

$$\left[\left(1-\frac{1}{2}\frac{\omega_s\sigma_{\theta l}{}^2\{1+2\beta(1+\omega_s)\}\{\sum_{n=1}^{\infty}\rho_\theta{}^n a_n{}^2-2a_1b_{so}(1-\omega_s)\}}{\{a_1(1+\beta-\beta\omega_s)-\omega_s{}^2b_{so}\sigma_{\theta l}{}^2(1+\omega_s)\}^2}\right)\right] \tag{5.22}$$

이 되며 (5.22)式에서 $\beta=0.115$, 0.120, 0.130에 對하여 實際로 計算한 結果 等價 gain K의 값은 0.6460, 0.6360, 0.6145이며 이 β의 값을 利用하여 等價線型方程式에 依하여 船의 應答 Correlogram과 Spectrum을 求할 수 있다.

Fig. 1은 非線型의 統計的 等價線型化에 必要한 係數로 a_1, a_2, …, a_n까지 求하여야 하나 여기서는 a_2 以下 係數가 微少量임으로 無視하기로 하였으며 a_1과 a_2 係數는 平均值와 分散의 函數로 나타내고 있다.

Fig. 2는 $\beta=0.130$과 $\beta=0.00$에 對한 autocorrelation curve로 非線型影響을 明確히 나타내고 있으며 Fig. 3은 $\beta=0.000$와 $\beta=0.115$와 이에 對한 等價線

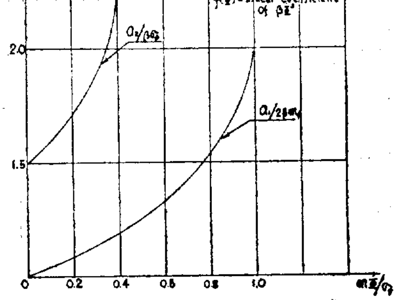

Fig. 1 a_1 and a_2 coefficient

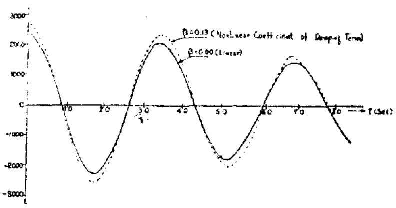

Fig. 2. Autocorrelation Curve

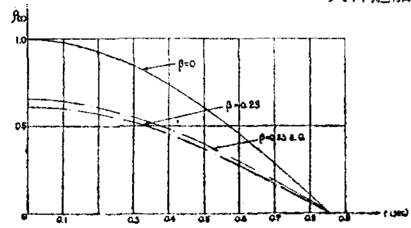

Fig. 3 Correlation Coefficient

型化한 것과 이를 correlation coefficient에 依하여 比較하고 있다. 여기서 $\beta=0.000$ 即 damping 項의 2乘項이 없을 때의 경우로 橫搖運動을 線型으로 假定하였을 때를 뜻하며 $\beta=0.115$는 2乘項이 存在하는 非線型方程式의 경우에 對하여 correlation coefficient로서 比較하고 있다.

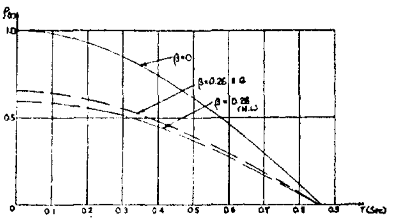

Fig. 4 Correlation Coefficient

그래서 統計的 等價線型化한 K値를 求하면 等價 correlation coefficient는 實際와 매우 잘 一致하고 있음을 確認할 수 있다. 그리고 Fig. 4는 同一한 方法으로 β의 係數만을 變化시켜서 再確認한 것으로서 $\beta=0.130$으로 하여 그 等價値와 correlation coefficient를 比較한 結果 Fig. 3과 같은 경향으로 잘 一致하므로 本等價線型化方法에 依하여 不規則波應答을 解析할 수 있다는 것을 알 수 있다.

Fig. 5는 $\beta=0.120$과 $\beta=0.130$에 對하여 等價値와 $\beta=0.00$인 線型方程式의 解를 함께 置點한 것으로 β의 값이 큰 것이 即 damping이 큰 것이 $\rho(\tau)$의 값이 적음으로 規則波中에서도 damping이 큰편이 적은 편보다 amplitude가 작다는 理論과 一致하고 있음을 나타내고 있으며 Fig. 6은 $\beta=0.120$에 對하여 correlogram을 그린 것으로 역시 前述한 바처럼 等價値와 非線型値와의 比較이다.

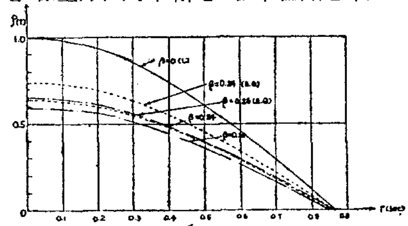

Fig. 5 Correlation Coefficient

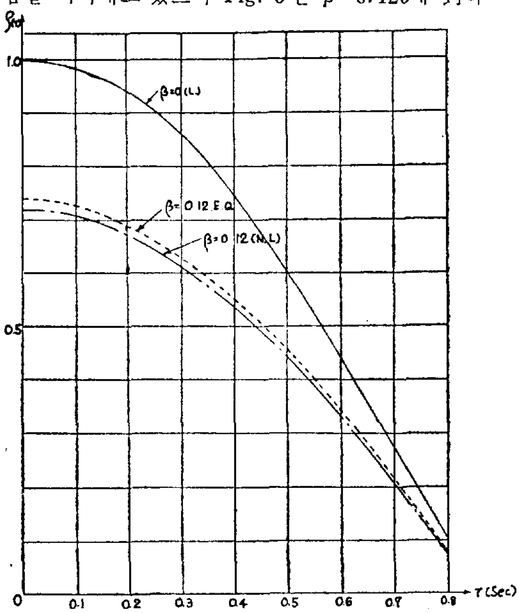

Fig. 6 Correlogram for Comparison between the Linear Term and the Equivalent Term

Fig. 7은 $\beta=0.115$에 對하여 等價線型化한 方程式에 依한 gauss分布인 不規則波를 入力으로 하여 Analog-computer로 그 應答線을 얻어 spectrum을 求한 것으로 等價値와 非線型曲線이 매우 接近하고 있음을 알 수 있고 Fig. 8은 $\beta=0.130$에 對한 非線型應答曲線과 $\beta=0.00$인 即 線型應答曲線과 等價線型化方法에 依한 應答曲線으로 求한 spectrum이다. 이 그림에서도 等價線 型化한 것이 매우 잘 一致함을 알 수 있다.

Fig. 9는 入力不規則波에 對한 power spectrum이며 Fig. 10은 入力波의 correlogram을 나타내고

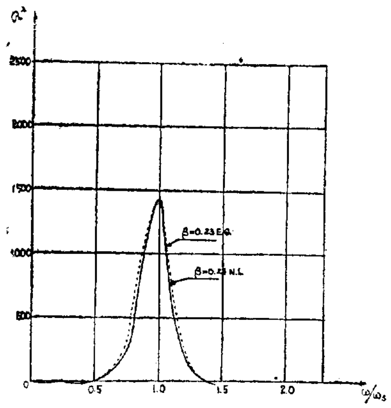

Fig. 7 Spectrum for $\beta=0.015$ and its Equivalent value

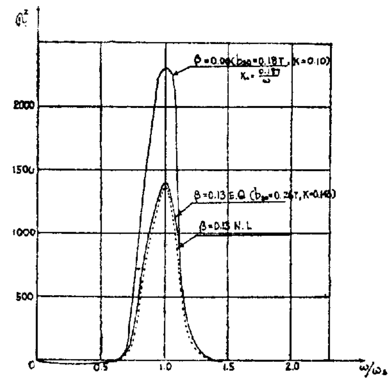

Fig. 8 Power Spectrum of the Linear, the Non-linear 2nd the Equivalent (where, $K=K+K_0\beta$)

Fig. 11 은 θ_w 가 入力不規則波로써 data recorder 로부터 analog computer 에 入力으로 記錄된 波形이고 이에 對한 300 GT 型 ferry-boat 의 應答曲線은 θ 이다. 이 그림에서 點線(…)이 $\beta=0.120$ 에 對한 非線型應答曲線이고 實線(—)이 이것에 對한 等價線型이며 amplitude 에 있어서는 多小差異가 있으나 位相은 매우 잘 一致하고 있는 셈이다.

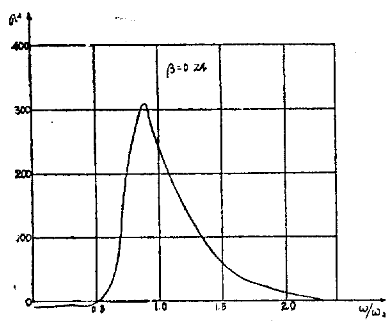

Fig. 9 Spectrum of the Irregular Wave as Input

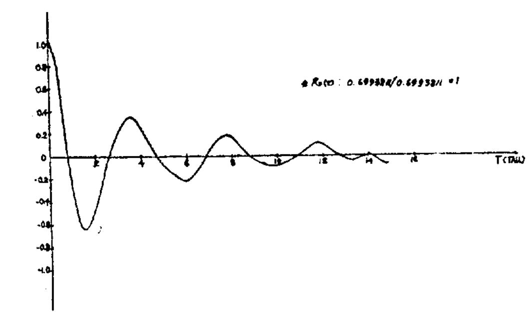

Fig. 10 Correlogram

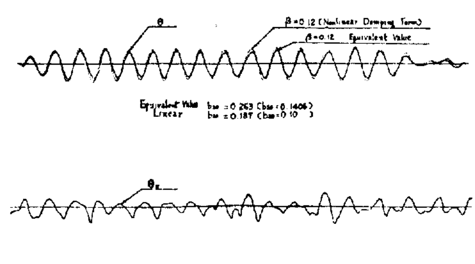

Fig. 11 Rolling of Ship In Irregular Wave

6. 結　言

Zero-memory 形 非線型要素를 包含하는 系에서 統計的 等價線型化方法으로 等價 gain K 를 求하여 等價線型化한 spectrum 과 correlogram 이 實際와 매우 잘 一致함으로 不規則波中 船의 應答解析에 있어서 非線型問題를 線型理論으로 解釋할 수 있게 되었다.

後　記

本研究 동안 圖面作成과 data 整理를 도와 준 船舶工學科 大學院生 具鍾道君의 수고에 감사한다.

參　考　文　獻

1) 山内保文："船の波浪中動搖應答の 解析法してついて（その 1）
日本造船協會論文集 第109號 昭 36, 6

2) 磯部考編："相關函數すよびスペクトル"

3) 椹檥一, 砂原善文："統計的手法による自動制御理論"

4) A.A. Pervozvanskii; "*Random Process in Nonlinear Control System*" Academic Press. New York London, 1965.

5) Y.W. LEE; "*Statistical theory of Communication*" New York London, John Wiley & Sons Inc 1963.

6) 山内保文："海洋波中の應答"
日本造船學會 耐航性に關するシンポジウム 昭44年 7月

7) 宮川澤："不規則信號論と動特性推定"
コロナ社 昭 44年 2月