

補強된 圓形구멍을 가진 平板의 二軸荷重下에서의 應力分布

任 尙 鍊\*

The Stress Distribution in a Flat Plate with a Reinforced  
Circular Hole under Biaxial Loading

by

S. J. Yim\*

ABSTRACT

The effect of reinforced circular hole in a flat plate under general biaxial loading conditions is considered. The reinforcement is achieved by attaching a circular ring of uniform rectangular cross section along the boundary of the hole. This investigation includes a theoretical solution and an experimental conformation.

In the theoretical analysis, Gurney's method is used to obtain a solution for the stress distribution and the solution is expressed in a general form, so that it can be applicable to the cases of general biaxial loading and general values of Poisson's ratios.

In the experimental work a systematic series of photoelastic models, as shown in Fig. 5 and Table 1, were analyzed on polariscopes. The experimental results were in good agreement with the theoretical ones, as shown in Fig. 8 and 9.

The conclusions derived are as follows:

- 1) The theoretical results, given in Eq. (1)~(5), are sufficient in accuracy for the engineering design purpose.
- 2) The stress concentration factor decreases as the ratio  $n$  increases, but not significant beyond  $n=3$ .
- 3) The stress concentration factor increases as the ratio  $m$  increases, but not significant below  $m=0.7$ .

記 號

$t$  : 平板의 두께

$a$  : 補強環의 內部半徑

$b$  : 補強環의 外部半徑

$n$  : 補強環의 두께와 平板의 두께의 比

$m = a/b$

$\mu$  : Poisson 比

$f_v$  : 鉛直荷重의 세기 (psi)

$f_h$  : 水平荷重의 세기 (psi)

$S = f_h/f_v$

接受日字 1971年 5月 10日

\*正會員, 서울大學校 工科大學

### 1. 緒 論

船體나 航空機 構造에서는 파이프나 電線을 通過시키기 위하여 板部材에 구멍을 뚫고, 그로 因한 弱화效果를 相殺하기 위하여 그 구멍의 가장자리에 補強環을 붙이는 경우가 흔히 있다. 이와 같은 環의 形狀과 材質에 따르는 補強效果에 對해서는 많은 研究가 이루어져 있다[1][2][3][4].

Gurney는 Fig. 1과 같은 均一矩形斷面의 環으로 補強된 圓形구멍을 갖는 無限平板에서의 應力分布를 實應力函數를 使用하여 解析한 바 있다[1]. 그는 Poisson 比가 1/4인 경우를 다루었으나, Houghton과 Rothwell은 그 解法을 Poisson 比가 1/3인 경우에 對하여 適用하였으며, 알루미늄板으로 된 模型에 스트레인 게이지를 붙여 구멍 周邊의 各點에서의 變形度를 計測하여 理論値와 比較한 바 있다[2].

本研究에서는 Gurney의 理論解를 Poisson 比  $\mu$ 를 包含하는 形式으로 表示하였고, 그들을 重疊하여 一般的인 二軸荷重下에서의 主應力과 最大剪斷應力을 求할 수 있게 하였으며, 光彈性 實驗을 通하여 그 理論解의 有效範圍를 考察하였다.

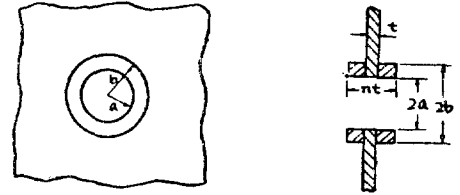
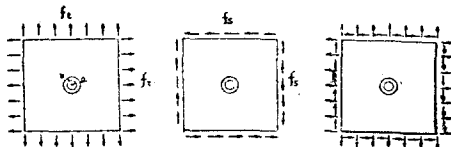


Fig. 1. Circular hole reinforced by a ring

### 2. 理論解

Fig. 1에 보인 것과 같은 同質材料의 環으로 補強된 圓形구멍을 가진 無限平板이 Fig. 2에 보인 것과 같은 均一한 二軸引張荷重과 純粹剪斷荷重을 받는 경우의 應力分布를 求하고, 이들을 重疊하여 一般的인 二軸荷重下에서의 主應力과 最大剪斷應力을 決定한다.



(a) Hydrostatic tension (b) Pure shear (c) General biaxial load

Fig. 2. Biaxial loading

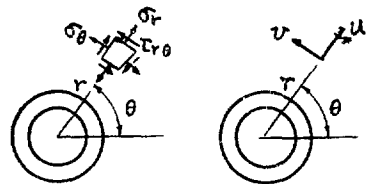


Fig. 3. Polar coordinates

Fig. 3에 보인 것과 같은 極座標系를 使用하고, 異質材料의 補強環이 붙은 경우[4]에 했던 것과 같은 方式으로 處理하면, 均一 二軸引張下에서의 應力分布는 다음과 같이 表示된다.

板에 對하여,

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= f_1 \left( -\frac{A_1}{r^2} + 1 \right), \\ \sigma_\theta &= f_1 \left( -\frac{A_1}{r^2} + 1 \right), \\ \tau_{r\theta} &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (1a)$$

環에 對하여,

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= f_1 \left( \frac{A_2}{r^2} + 2C_2 \right), \\ \sigma_\theta &= f_1 \left( -\frac{A_2}{r^2} + 2C_2 \right), \\ \tau_{r\theta} &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (1b)$$

但,

$$\left. \begin{aligned} A_1 &= \frac{(1-\mu)(1-m^2)n - (1+\mu)m^2 - (1-\mu)}{(1+\mu)(1-m^2)n + (1+\mu)m^2 + (1-\mu)} \cdot b^2, \\ A_2 &= \frac{-2m^2}{(1+\mu)(1-m^2)n + (1+\mu)m^2 + (1-\mu)} \cdot b^2, \\ C_2 &= \frac{1}{(1+\mu)(1-m^2)n + (1+\mu)m^2 - (1-\mu)}. \end{aligned} \right\} \quad (1c)$$

한편, 純粹剪斷荷重下에서의 應力分布는 다음과 같이 表示된다.  
板에 對하여,

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= f_s \left[ 1 - 4d_1 \left( \frac{b}{r} \right)^2 - 6c_1 \left( \frac{b}{r} \right)^4 \right] \sin 2\theta, \\ \sigma_\theta &= f_s \left[ -1 + 6c_1 \left( \frac{b}{r} \right)^4 \right] \sin 2\theta, \\ \tau_{r\theta} &= f_s \left[ 1 + 2d_1 \left( \frac{b}{r} \right)^2 + 6c_1 \left( \frac{b}{r} \right)^4 \right] \cos 2\theta, \end{aligned} \right\} \quad (2a)$$

環에 對하여,

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= f_s \left[ B_1 \left\{ -2 + 8m^2 \left( \frac{b}{r} \right)^2 - 6m^4 \left( \frac{b}{r} \right)^4 \right\} + F_1 \left\{ 12m^4 \left( \frac{b}{r} \right)^2 - 12m^6 \left( \frac{b}{r} \right)^4 \right\} \right] \sin 2\theta, \\ \sigma_\theta &= f_s \left[ B_1 \left\{ 2 + 6m^4 \left( \frac{b}{r} \right)^4 + F_1 \left\{ 12 \left( \frac{r}{b} \right)^2 + 12m^6 \left( \frac{b}{r} \right)^4 \right\} \right\} \right] \sin 2\theta, \\ \tau_{r\theta} &= f_s \left[ B_1 \left\{ -2 - 4m^2 \left( \frac{b}{r} \right)^2 + 6m^4 \left( \frac{b}{r} \right)^4 \right\} + F_1 \left\{ -6 \left( \frac{r}{b} \right)^2 - 6m^4 \left( \frac{b}{r} \right)^2 + 12m^6 \left( \frac{b}{r} \right)^4 \right\} \right] \cos 2\theta. \end{aligned} \right\} \quad (2b)$$

但, 이들 式 속의 積分常數  $c_1, d_1, B_1,$  및  $F_1$  은 다음 四元聯立方程의 根이다.

$$\left. \begin{aligned} 1 - 4d_1 - 6c_1 &= B_1 n (-2 + 8m^2 - 6m^4) + F_1 n (12m^4 - 12m^6), \\ 1 + 2d_1 + 6c_1 &= B_1 n (-2 - 4m^2 + 6m^4) + F_1 n (-6 - 6m^4 + 12m^6), \\ (1 + \mu) + 4d_1 + 2(1 + \mu)c_1 &= B_1 [-2(1 + \mu) - 8m^2 + 2(1 + \mu)m^4] + F_1 [-4\mu - 12m^4 + 4(1 + \mu)m^6], \\ (1 + \mu) + 2(1 - \mu)d_1 - 2(1 + \mu)c_1 &= B_1 [-2(1 + \mu) - 4(1 - \mu)m^2 - 2(1 + \mu)m^4] \\ &\quad + F_1 [-2(3 + \mu) - 6(1 - \mu)m^4 - 4(1 + \mu)m^6]. \end{aligned} \right\} \quad (2c)$$

一般的인 二軸荷重狀態는 軸을 適切히 擇하면, Fig. 4(a)와 같은 狀態로 表示되며, 이것은 Fig. 4(b) 및 4(c)와 같은 2個의 基本荷重狀態를 重疊하여 얻을 수 있다.

Fig. 4(a)와 같은 一般二軸荷重狀態에서 水平荷重의 세기  $f_h$ 와 鉛直荷重의 세기  $f_v$ 의 比를

$$f_h/f_v = S$$

라고 하면, 重疊條件

$$\left. \begin{aligned} f_i + f_s &= f_v, \\ f_i - f_s &= f_h = S \cdot f_v \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

로부터 Fig. 4(b) 및 4(c)에 보인 두 基本狀態의 荷重의 세기  $f_i$ 와  $f_s$ 가 다음과 같이 決定된다.

$$\left. \begin{aligned} f_i &= \frac{1+S}{2} \cdot f_v, \\ f_s &= \frac{1-S}{2} \cdot f_v. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

따라서 一般二軸荷重狀態에서의 應力分布는 式 (1) 및 (2)에 式(3)을 代入하여 두 基本荷重狀態에서의 應力分布를 求하여 成分別로 合함으로써 얻을 수 있다.

應力分布가 決定되면 各點에서의 主應力 및 最大剪斷應力은 다음 式으로부터 計算된다.

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{1,2} &= \frac{\sigma_r + \sigma_\theta}{2} \pm \sqrt{\left( \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{2} \right)^2 + \tau_{r\theta}^2}, \\ \tau_{\max} &= \pm \sqrt{\left( \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{2} \right)^2 + \tau_{r\theta}^2}. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

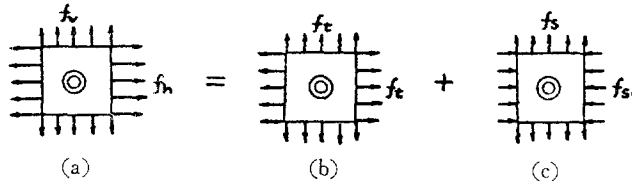


Fig. 4. General biaxial loading

### 3. 實 驗

이 實驗은 前記 理解論의 基本部를 確認하기 위한 것이며, Poisson 比가 0.36인 光彈性材料로 만들어진 模型에 Fig. 2(a) 및 2(b)에 該當하는 2가지 基本 二軸荷重을 걸고 各點에 發生하는 最大剪斷 應力을 光彈性學의 方法으로 求하여 理論值와 比較하였다.

이 實驗에 使用된 模型은 美國 Photolastic Inc.의 PS-5 板材로부터 만들어 졌고, 그 形狀 및 치수는 Fig. 5 및 Table 1과 같다. 이들 模型은 7"×7"의 크기로 切斷된 平板의 中央部에 同一材質의 圓板 2장을 兩面對稱으로 接着하고 그 中央에 구멍을 뚫은 것으로서,  $n$ 의 값에 의해서 4個의 系列로 나누어져 있고, 各系列마다 補強環의 外徑은 一定하며 實驗을 進

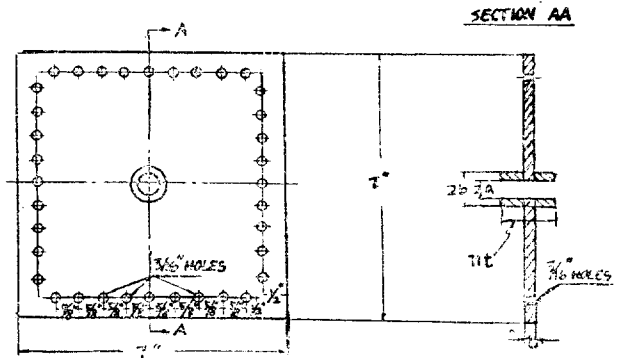


Fig. 5. Photo-elastic model

Table 1 Dimensions of models

Series No.	Dimensions	Model No.	m values							
			1 (m=0)	2 (m=0.25)	3 (m=0.5)	4 (m=0.6)	5 (m=0.7)	6 (m=0.8)	7 (m=0.9)	8 (m=1.0)
I (n=0.5)	t=0.25 2b=0.5"	2a	0	0.125"	0.25"	0.30"	0.35"	0.40"	0.45"	0.50"
II (n=3)	t=0.25 2b=1"	2a	0	0.25"	0.5"	0.6"	0.7"	0.8"	0.9"	1.0"
III (n=5)	t=0.125 2b=0.5"	2a	0	0.125"	0.25"	0.30"	0.35"	0.40"	0.45"	0.50"
IV (n=10)	t=0.125 2b=0.5"	2a	0	0.125"	0.25"	0.30"	0.35"	0.40"	0.45"	0.50"

행하면서, 그 內徑을 0 으로부터 順次의으로 擴大시켜  $m$ 의 값을 8가지로 變化시킨 것이다. 圓板의 接着에는 Photolastic Inc.의 PC-1C cement 를 使用하였고, 2個의 圓板을 兩面對稱位置에 接着하기 위하여 特別한 裝置를 考案製作하여 使用하였다. 이들 模型의 周圍에는 가장자리로부터 0.5" 안쪽에 各邊마다 9個 씩의 3/16" 구멍을 뚫어 荷重用 bracket 들을 固着할 수 있게 하였다.

한편, 이 模型의 四邊에 붙여진 荷重用 bracket, 이 模型에 二軸荷重을 作用시키기 위한 荷重裝置, 및 荷重 計測을 위한 transducer 는 著者が 異質材料의 補強圓環을 가진 模型에 대하여 使用했던 것과 同一하다[4].

本實驗에서는 上記 模型들을 均一한 二軸引張荷重과 純粹剪斷荷重下에서 觀察하였다. 前者는 鉛直과 水平 方向으로 똑같은 引張荷重을 作用시킨 狀態이며, 이 때 模型의 中央部分에서의 應力分布는 回轉對稱이므로, fringe 들은 Fig. 6에 보인 바와 같이 구멍을 中心으로 한 同心圓形으로 된다. 한편, 後者는 鉛直方向의 引張 荷重과 水平方向의 壓縮荷重이 똑 같은 狀態이며, fringe 들은 Fig. 7에 보인 바와 같이 鉛直 및 水平 中心線에 關한 對稱形으로 된다. 本實驗에서는 polariscope 을 通하여 fringe 를 觀察하면서 荷重用 너트를 틀어 5~6 位의 fringe 가 나타나도록 調節한 뒤에 transducer 로부터 荷重을 記錄하고 Polaroid film 을 써서 dark field 와 light field 에서 各一枚씩 寫眞을 撮影하였다.

各荷重狀態에서 撮影된 fringe 寫眞들로부터 各點에서의 fringe order 를 決定하고 그것에 模型材料의 剪斷 下에서의 fringe value 를 곱하여 그들 點에서의 最大剪斷應力을 決定하였다. 뒤이어, 그 最大剪斷應力을 그 경우의 荷重의 세기로 나누어 그들 點에서의 應力集中 係數들을 定하였다.

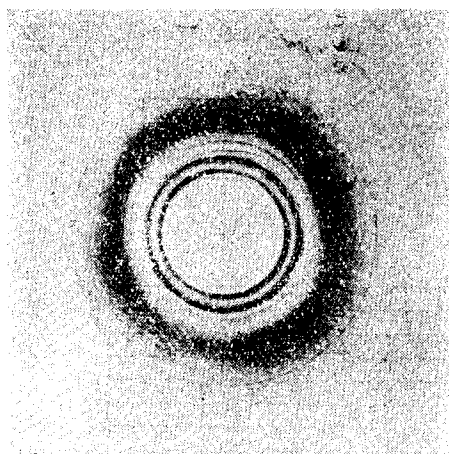


Fig.6 Fringe patterns under hydrostatic tension  
( $n=3, m=0.8$ )

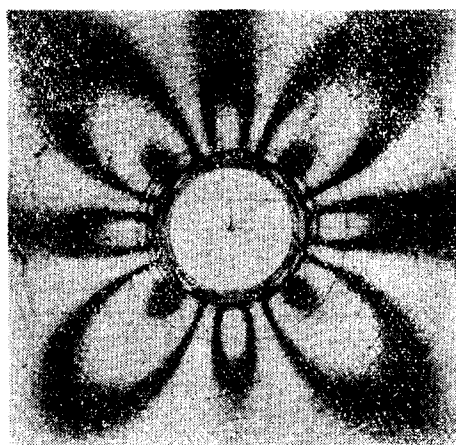


Fig.7 Fringe patterns under pure shear  
( $n=3, m=0.8$ )

#### 4. 結果 및 考察

實驗으로부터 얻어진 應力集中係數들을 前記 理論式에 의한 計算結果로부터 作成된 曲線 위에 點적으던 Fig. 8 및 9에 보인 것과 같은 結果들을 얻는다. 이 結果에 의하면, 理論値와 實驗値 사이의 差異는 大略 10% 以內이며, 따라서 實用目的으로는 前記 理論値들을 價値있는 것이라고 생각할 수 있을 것이다.

元來 Gurney의 解析에서는 補強環과 母板의 接着部에서의 三次元的 形狀을 二次元的으로 取扱했다는 難點이 있다. 即, 環과 板의 두께가 같지 않으므로 그 接着部에는 段이 생기고, 따라서 應力의 傳達는 實接着部分을 통해서만 일어날 것이므로, 環과 板의 두께 위에 應力이 均一하게 分布한다고 假定하는 것은 옳지 않다. 이런 假定으로 因한 應力分布上의 誤差는 環과 板의 두께의 差가 클 수록( $n$ 이 클 수록) 크고, 또한 環의 半徑方向의 幅이 작을 수록( $m$ 이 클 수록) 클 것이 豫想되며, 實驗結果도 그런 傾向을 나타내고 있다. 또한,  $n$ 이 어떤 값을 넘어서면 板에서의 應力分布가 그 以上 變하지 않게 될 것이 豫想된다.

이로 미루어, 그 理論値들은 現實에 完全히 符合되는 것은 아니지만, 그 誤差는 補強環에서 더 클 것이며, 母板에서는 工學的으로 큰 支障을 招來할 程度가 아니라는 것이 實驗으로부터 確認된 바 있다. 그러나, 現實的으로는 環과 板의 接着部에서의 急激한 變化를 避하도록 工作될 뿐만 아니라, 補強環 안에서의 應力水準이 母板에서의 그것보다 낮기 때문에 큰 問題가 되지 않을 것이다.

本研究에서는  $\mu=0.36$ 인 경우를 實驗하였고, Houghton과 Rothwell은  $\mu=1/3$ 인 경우를 다루었으므로, 아직 完全하다고는 볼 수 없다. 더구나 最近에 金屬材料 以外の 工業材料가 많이 使用됨에 따라 Poisson 比의 範圍가 넓어졌으므로 넓은 範圍에 걸친 實驗이 要請된다.

#### 5. 結 論

以上の 結果를 綜合하여 다음과 같은 結論에 到達하였다.

- 1) 式 (1)~(5)로부터 計算된 理論値들은 工學的 設計에 利用하기에는 充分히 精密하다.
- 2) 應力集中係數는  $n$ 의 값이 클 수록 작아지지만,  $n$ 이 3을 넘으면 크게 變動하지 않는다.
- 3) 應力集中係數는  $m$ 의 값이 클 수록 커지지만,  $m$ 이 0.7 以下가 되면 크게 變動하지 않는다.

#### 後 記

本研究를 物心兩面으로 指導後援 해주신 MIT의 Murray 教授와 資料整理를 도와준 權寧中氏에게 깊은 感謝를 드린다.

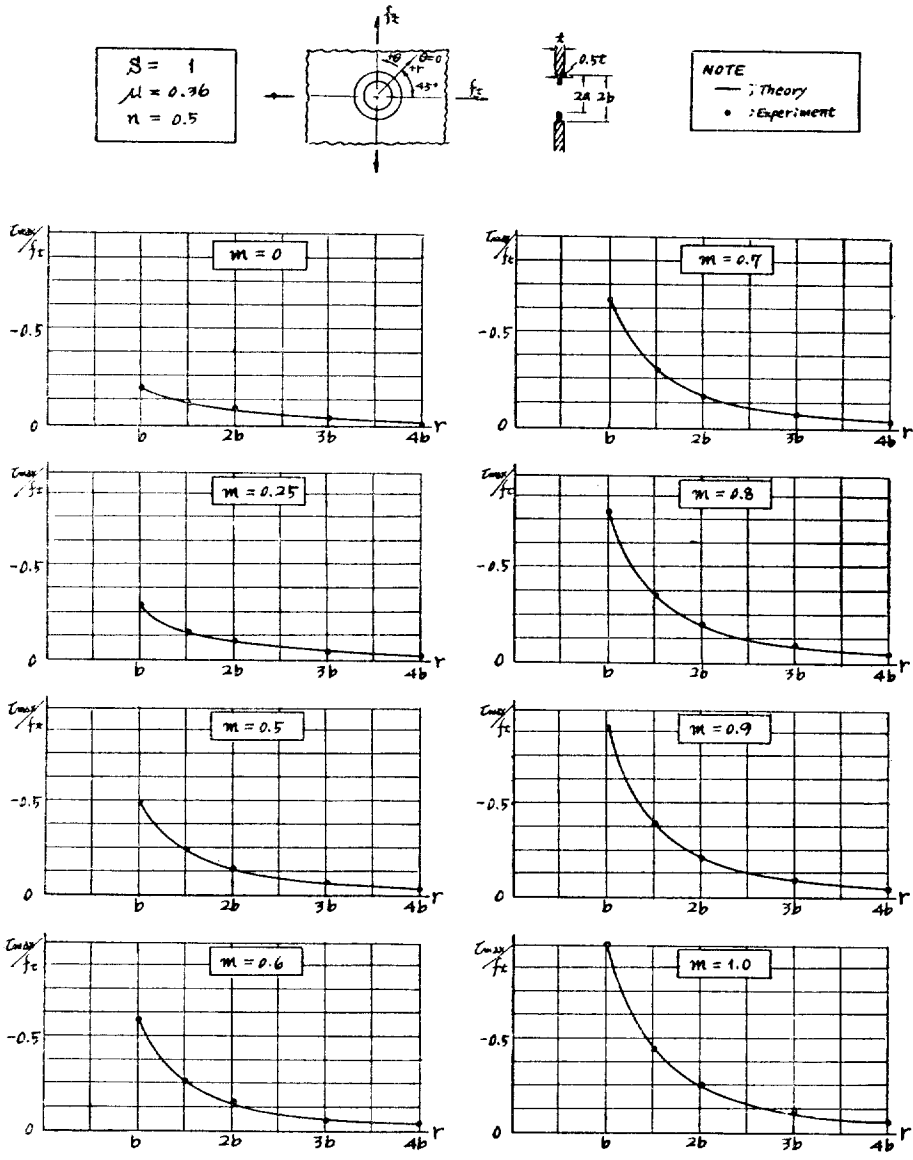


Fig. 8-1 Stress concentration factors under hydro-static tension.

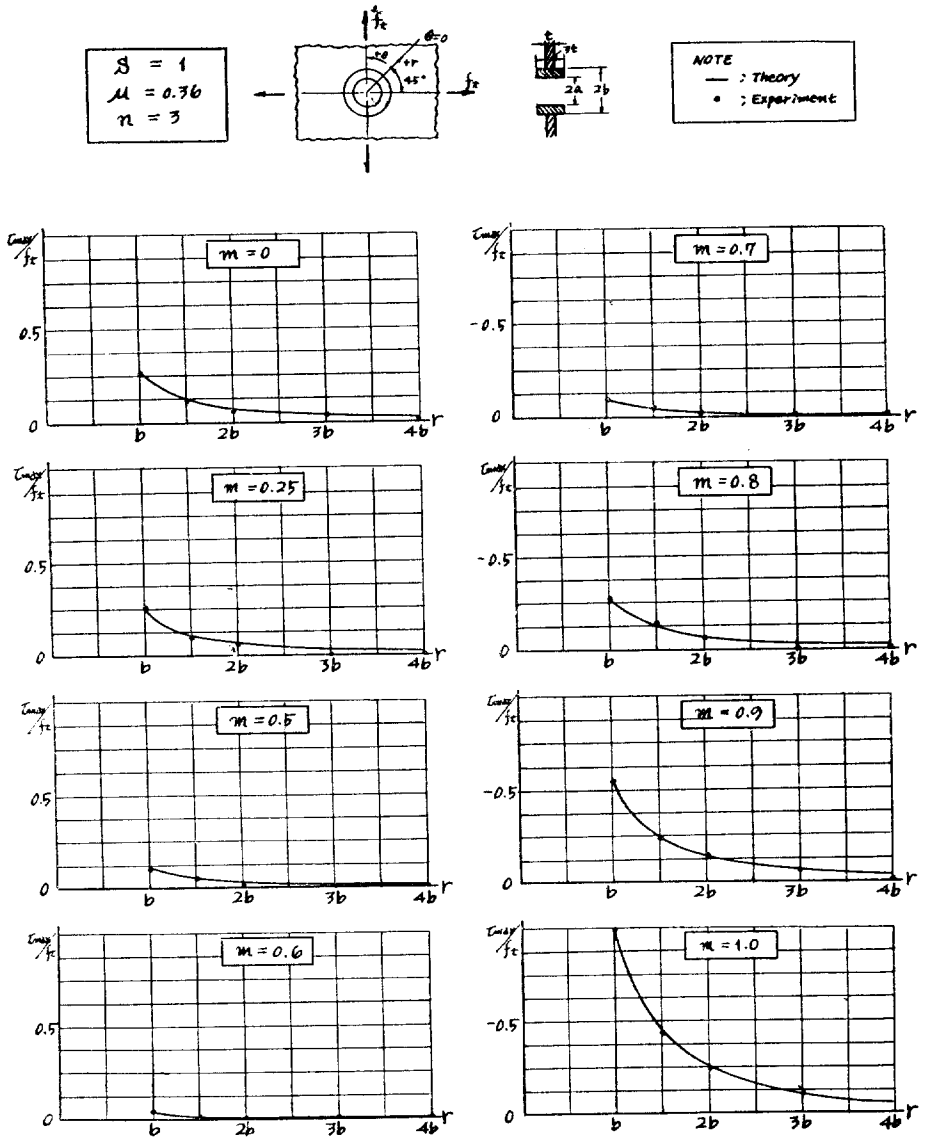


Fig.8-2 Stress concentration factors under hydro-static tension

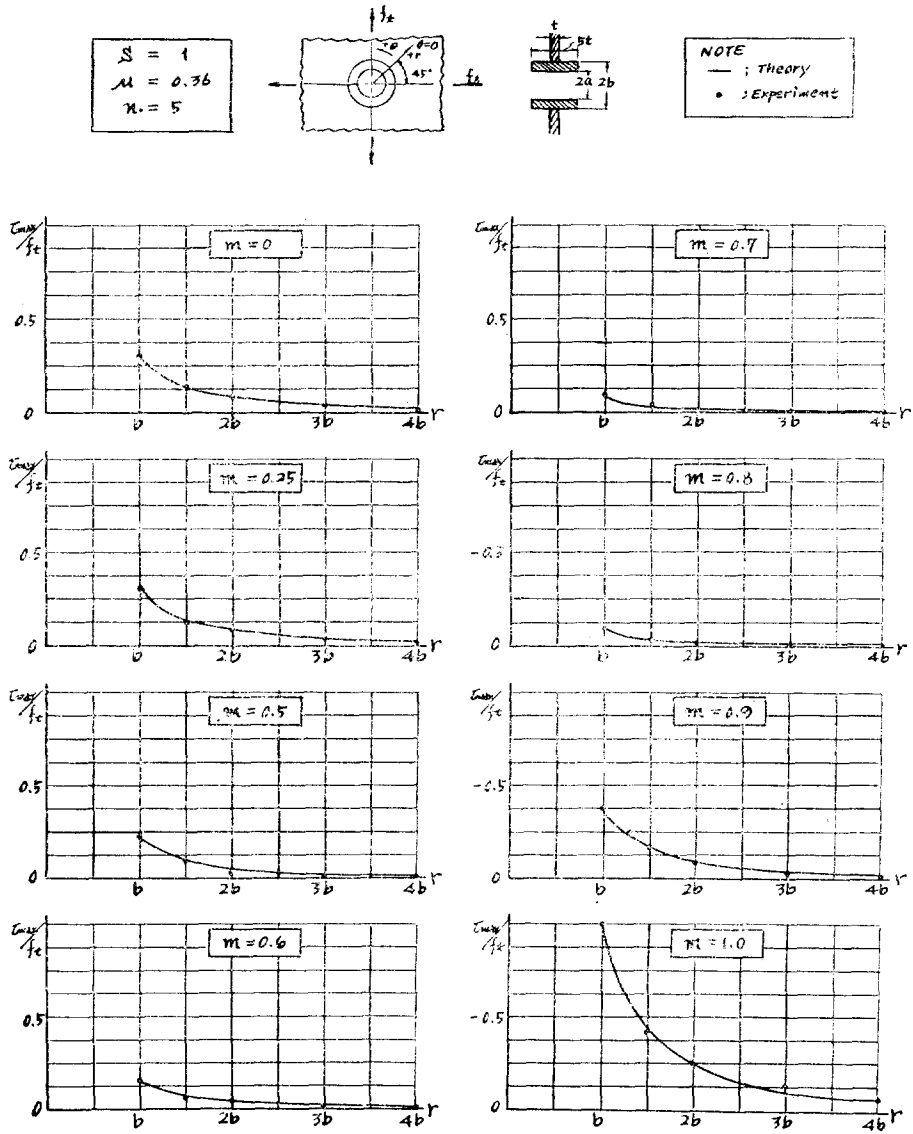


Fig. 8-3 Stress concentration factors under hydro-static tension



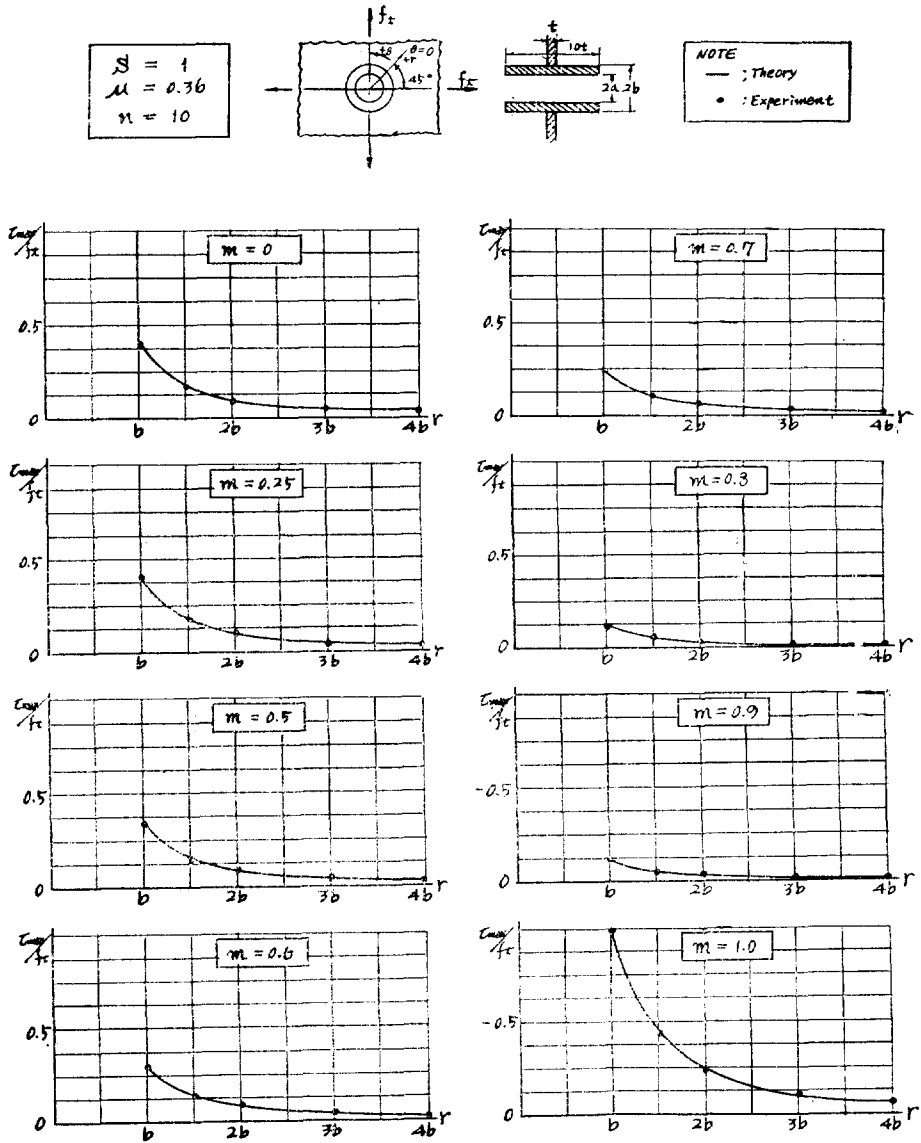


Fig. 8-4 Stress concentration factors under hydro-static tension

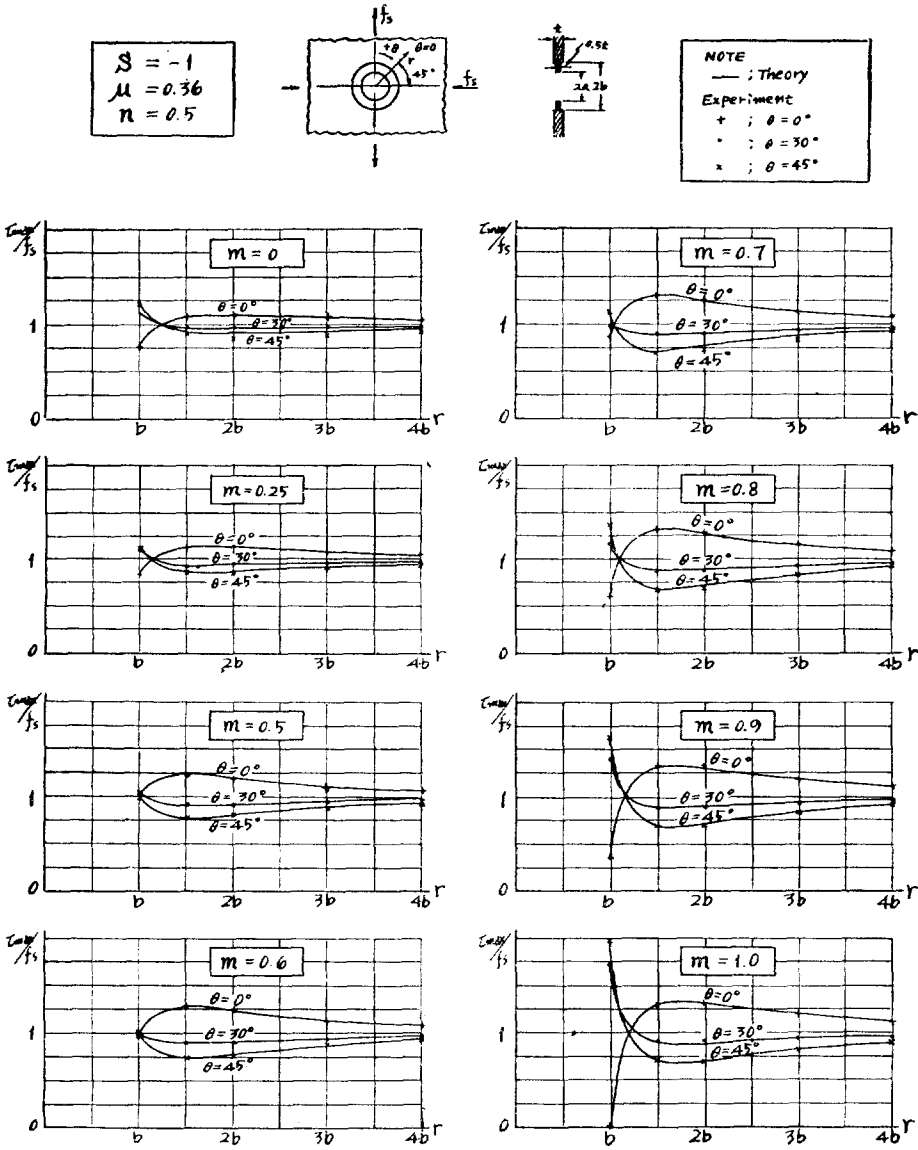


Fig.9-1 Stress concentration factors under pure shear

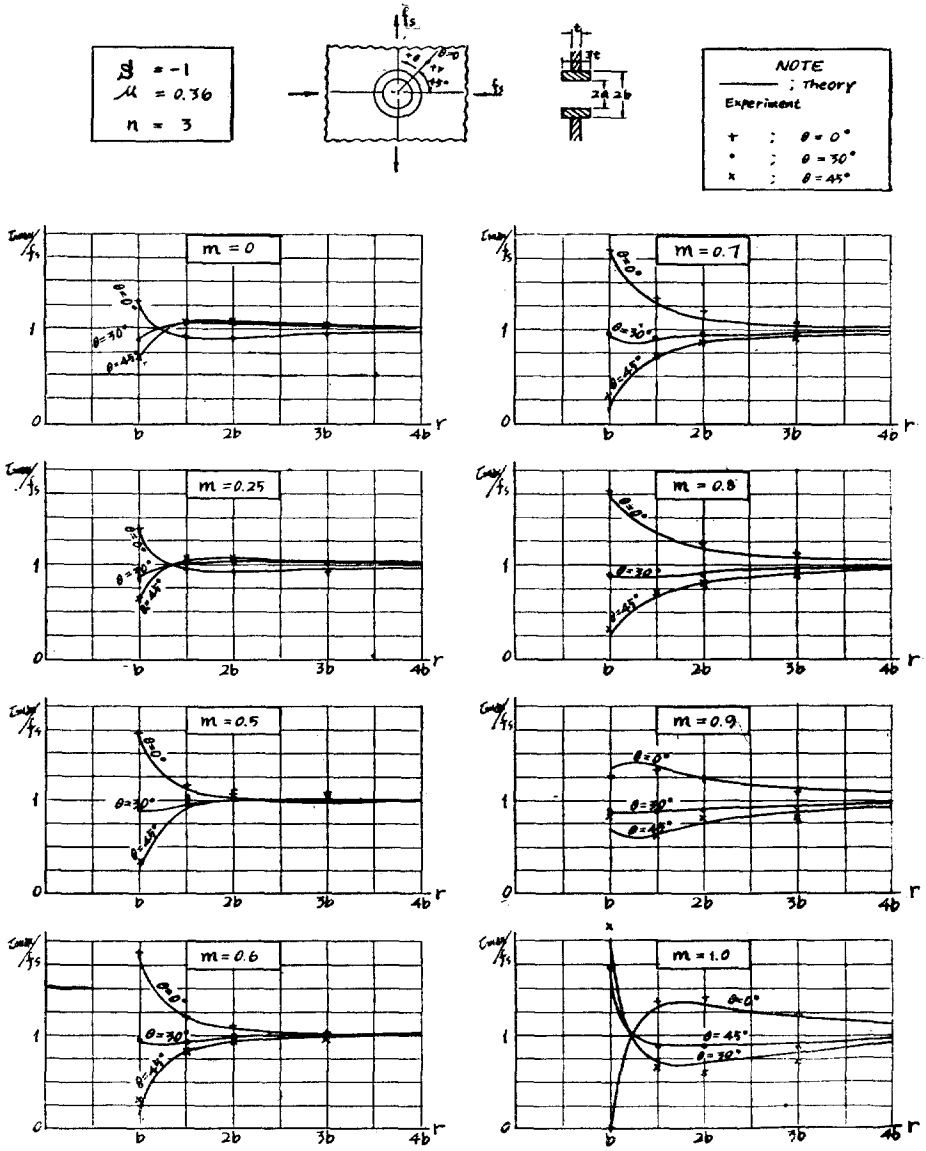


Fig.9-2 Stress concentration factors under pure shear

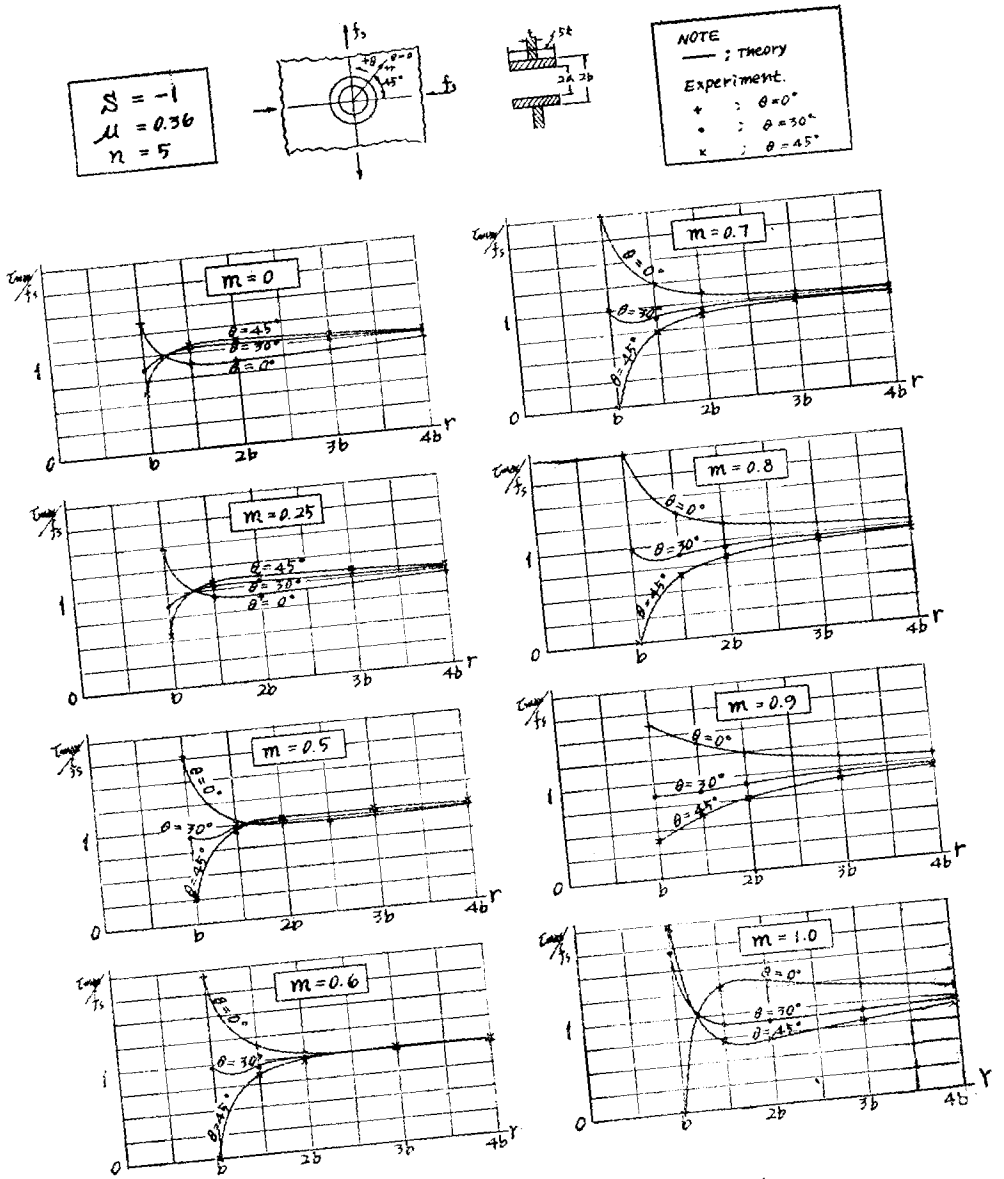


Fig. 9-3 Stress concentration factors under pure shear

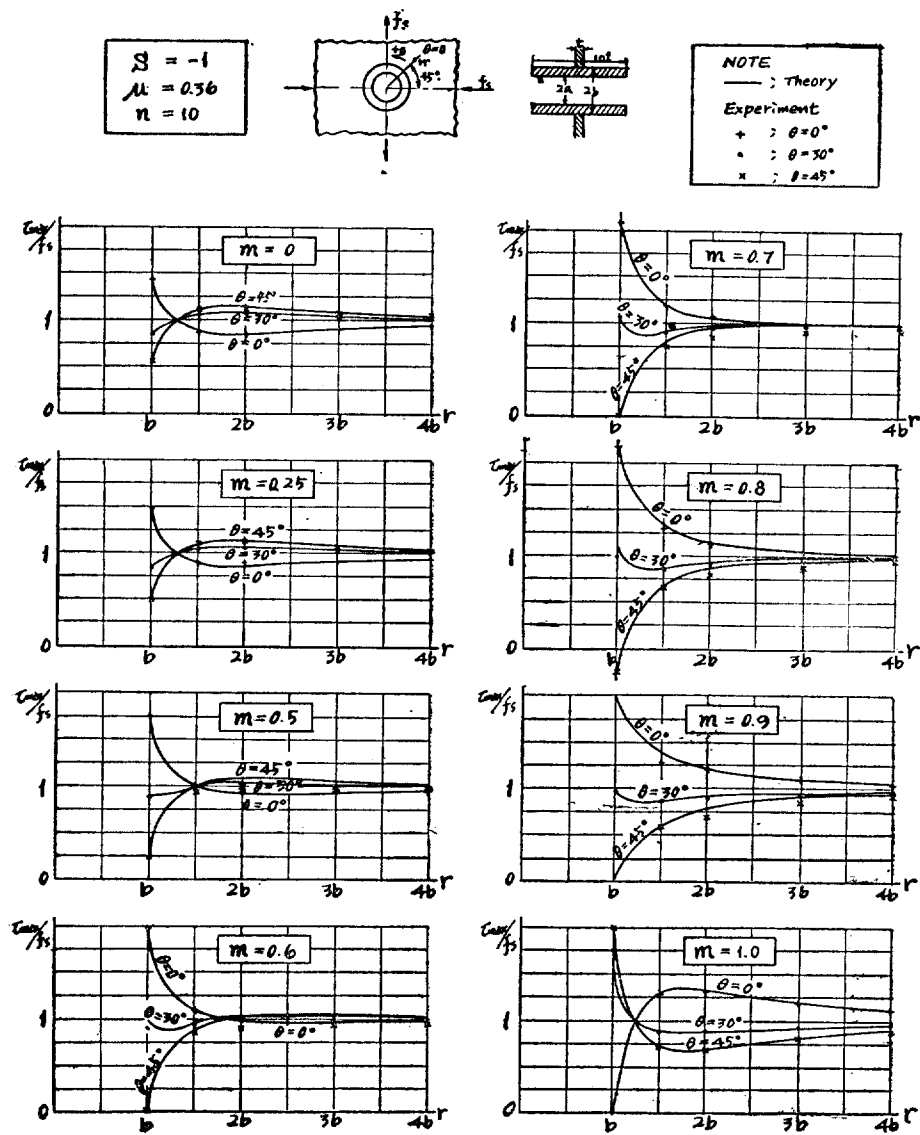


Fig.9-4 Stress concentration factors under pure shear

## 參 考 文 獻

- [1] C. Gurney, "An Analysis of the Stresses in a Flat Plate with a Reinforced Circular Hole under Edge Forces." *Aero. Res. Comm. (England) Report & Mem.* No. 1834, Feb., 1938.
- [2] D. S. Houghton and A. Rothwell, "The Analysis of Reinforced Circular and Elliptical Cutouts under Various Loading Conditions," *Coll. of Aero. (Cranfield, England) Report* No.151, Jul., 1961
- [3] W. H. Wittrick, "Stresses around Reinforced Elliptical Holes in Plane Sheet," *Aero. Res. Lab. (Australia) Report* SM. 267, 1959.
- [4] 任尙鎮, "異質圓環으로 補強된 圓形 孔의 周圍에서의 應力 分布," 大韓造船學會誌 第6卷 第1號 May 1969.
- [5] S. Timoshenko and J. N. Goodier, "*Theory of Elasticity*", McGraw-Hill Book Co., 1951.
- [6] M. M. Frocht, "*Photoelasticity* Vol. I & II," John Wiley & Sons, Inc., 1949.
- [7] J. W. Dally and W. F. Riley, "*Experimental Stress Analysis*," McGraw-Hill Book Co., 1965.
- [8] M. Hetenyi, "*Handbook of Experimental Stress Analysis*," John Wiley & Sons, Inc., 1954.