

샘플值 제어계의 팔스폭변조에 의한 최적제어특성

The Optimum Control of the Sampled Data System by the Method of Pulse-Modulated Signal

논문
-20~1~1

양 흥 석* 김 경 기**
(Heung Suk Yang, Kyong Ki Kim)

[ABSTRACT]

The characteristics of optimum control for the second order P. W. M. sampled-data system with linear plants are investigated, with the development of method for finding the canonical representations for the initial states, as well as the optimality of modulator output for the P. W. M. system, which contains the electro-mechanical components, by dividing the phase plane into several regions, in which the position of the system in the phase plane are converted into the pulse polarity and pulse width.

1. 서 론

二重積分型의 플랜트와 적분器 및 時定數를 갖는 플랜트의 二階位팔스變調 샘플值制御系에 관한 최적제어 문제는 일반적으로 전기기계적 부분으로 구성되어 있는 플랜트이며, 이系の 제어에 있어서 位相面은 狹帶領域과 기타영역으로 구분되며, 狹帶領域은 플랜트의 連續繼電系統의 최적스윙칭 追跡線周圍에 있으며, 最適動作을 얻기 위하여는 팔스幅을 조정하여 달성하고 기타의 영역에서는 最適팔스幅變調系가 연속성 最適繼電器系統과 동일하게 동작하며, 팔스지속시간은 샘플링 주기와 동일하다.

본 논문에서는 第二階位의 팔스幅變調 샘플링值制御系의 최적제어를 線型플랜트에 적용하였을 때의 특성을 구명하였고, 이系の 최적제어를 얻을 수 있는 전기기계적 계산장치에 대하여도 간단히 설명하였다. 調調器의 팔스幅變調 샘플링值制御系의 최소시간제어는 飽和에 의한 팔스振幅變調샘플링系의 일반적인 解法이 팔스幅變調샘플링系에 적용되고 그 이론은 규명되어 있으나, 주어진 초기상태에 대한 正規型의 표현식을 수립하는 방법은 제시되지 않았다.

팔스幅變調샘플링值制御系는 採取週期의 終末時 系の 상태가 採取週期初의 系の 상태에 따라 결정되는 벡타量的의 總和이며, 이 벡타量은 그 크기와 방향이 팔스幅의 非線型函數이며, 따라서 이와 같은 非線型 관계로 말미암아 초기상태의 正規型表現式을 구하는 것은 팔스振幅變調系에 비하여 더욱 복잡하며, 팔스振幅變調系에서는 系の 상태는 샘플週期末에서의 值가 샘플週

期初의 系の 상태에 따라 결정되는 벡타量的의 總和이다, 이 벡타量은 그 크기와 방향이 팔스振幅에 線型的으로 變하는 函數이다. 샘플值制御系의 팔스幅變調系의 初期狀態의 正規表現式의 몇가지 특성은 이미 구명이 되어 있으며, 이 초기상태의 正規表現式이 구어졌을 때 이의 最適팔스幅變調裝置出力은 유도할 수 있으나, 임의의 초기상태에 대한 正規表現式을 유도하는 방법은 구명되어야 할 과제이다.

본 논문에서는 임의 초기에 대한 所要正規表現式을 구명하고 位相面에서의 系の 위치를 팔스極과 팔스幅으로 變換하여 최적조건과 특성을 유도하였다.

2. 본 론

(1) 系の 函數設定

本次に 取扱한 系는 계산기와 팔스幅 變調裝置 및 플랜트로 구성되어 있으며 플랜트는 線型系로서 라스타變換式으로 표시하면 다음과 같다.

즉 그 傳達函數는

$$G_1(S) = \frac{K}{S^2} \dots\dots\dots(1)$$

이며, 이는 二重積分型이며, 또 하나의 다른 槓의 플랜트는 積分器와 時定數를 갖는 것이므로 그 傳達函數는

$$G_2(S) = \frac{KT}{S(TS+1)} \dots\dots\dots(2)$$

이며, T는 플랜트의 時定數이고 K는 플랜트의 槓得을 표시한다.

그러므로 이 플랜트는 第二階位의 系이며, 積分要素를 하나 또는 둘을 가지며, 有限值의 零點을 갖지 않는다.

系에 대한 人力 x_r 를 常數라고 가정하면 이 系는 調

* 正회원 : 서울공대 전기공학과 교수
** " : 한양공대 전자공학과 교수

節器型的 제통이 된다.

(2) 팔스幅變調裝置에 관한 函數設定:

팔스幅變調裝置의 출력을 $\mu(t)$ 라 하면 다음 관계식에 따라 $\mu(t)$ 를 規定할 수 있다.

$$\mu(t) = \begin{cases} \xi_k M(k-1) : Ts \leq t \leq (k-1+\alpha_k) Ts \text{ 일 때} \\ 0 : (k-1+\alpha_k) Ts \leq t \leq kTs \end{cases} \quad (3)$$

단 $\xi_k = \pm 1, 0 \leq \alpha_k \leq 1$ 일 때
 $k=1, 2, 3, \dots$

윗식에서 M 는 變調裝置의 팔스높이 이며, T_s 는 샘플 採取週期이고, $\alpha_k T_s$ 는 k 번째 採取週期中의 팔스幅이다.

變調裝置의 입력-출력관계는 그림 1 및 2와 같다.

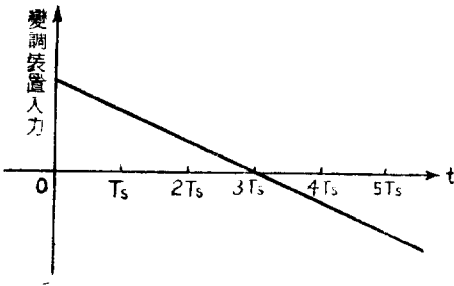


그림 1. 變調裝置 入力

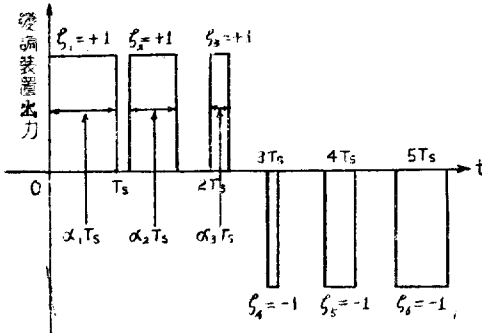


그림 2. 變調裝置의 出力

(3) 究明할 문제점

前述한바 調節器型的 系統에 대한 입력 x_s 는 恒常 零으로 설정하고 초기조건으로 (x, \dot{x}) 를 임의로 설정하였을 때

7) 採取週期の 最小倍의 시간내에 系를 平衡狀態로 가져오는 팔스幅變調裝置의 出力 $\mu(t)$ 의 算定問題

ㄴ) 상기조건을 만족하는 強制函數 $\mu(t)$ 를 발생시키

는 연산기장치의 설정문제를 해결하여야 한다.

상기문제는 變調裝置의 規定에서 系列

$$\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_k \quad \left[\begin{array}{l} \mu_k = \mu(t) : (k-1)Ts \leq t \leq kTs \text{ 일 때} \\ = 0 : \text{기타영역 일 때} \end{array} \right]$$

를 구하는 문제로 귀착된다. 이 제열은 (ξ_k, α_k) 에 의 하여 規定된다.

(4) 差分方程式의 유도문제

플랜트의 出力을 x 라고 하고, 狀態벡터 $\Psi(t)$ 를 다음과 같이 規定하기로 한다.

$$\Psi(t) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad \left[\begin{array}{l} \text{단 } x_1 = \dot{x} \\ x_2 = x \end{array} \right] \dots \dots \dots (4)$$

또

$$\dot{\phi} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \dots \dots \dots (5)$$

이라 하면, 時間領域 $(k-1)Ts \leq t \leq kTs$ 에서 플랜트 의 差分方程式은 다음과 같이 수립할 수 있다.

$$\dot{\Psi} = A\Psi + \mu_k K\phi \dots \dots \dots (6)$$

단 A 는 常數마트릭스임.

이제 $t' = \frac{t}{T_s}$

$$\theta = \frac{T_s}{KM} \cdot \Psi = \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{pmatrix}$$

$$B = -\frac{1}{T_s} \cdot A$$

이라 하면, 時間領域 $k-1 \leq t' \leq k$ 에서 (6)식과 같이 표시되는 플랜트의 差分方程式은 다음과 같이 變形된다.

$$\dot{\theta} = B\theta + \frac{\mu_k}{M} \phi \dots \dots \dots (7)$$

$$\dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt'}$$

이제, $\theta(k) = \theta_k$ 이라 하면 $k-1 \leq t' \leq k$ 에서 (7)식의 解는 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\theta(t') = e^{(t' - k + 1)B} \cdot \theta_{k-1} + \xi_k \int_{k-1}^{k-1 + \alpha_k} e^{(t' - \tau)B} \phi d\tau \dots (8)$$

이제

$\tau = \eta + (k-1)$ 이라 하면 (8)식은 다음과 같이 된다.

$$\theta(t') = e^{(t' - k + 1) \cdot B} \cdot \theta_{k-1} + \xi_k e^{(t' - k + 1)B} \int_0^{\alpha_k} e^{-\eta B} \phi d\eta \dots \dots \dots (9)$$

(9)식을 $t' = k$ 에서 계산하면

$$\theta_k = e^B \theta_{k-1} + \xi_k e^B \int_0^{\alpha_k} e^{-\eta B} \phi \cdot d\eta \dots \dots \dots (10)$$

과 같이 된다.

上記差分方程式과 $\{(\xi_k, \alpha_k)\}$ 의 系列로서 制御系의 동작상태는 결정된다.

이제

$$W = e^B \dots \dots \dots (11)$$

이라 놓고

$$r_i(\alpha_k) = -e^{-(i-1)B} \int_0^{\alpha_k} e^{-\eta B} \cdot \phi d\eta \dots\dots\dots(12)$$

단 $0 \leq \alpha_k \leq 1, i=1, 2, 3, \dots$

$$\theta_k = W[\theta_{k-1} - \xi_k r_i(\alpha_k)] \dots\dots\dots(13)$$

와 같이 (10)식을 變形할 수 있다.

(5) 벡터량 $r_i(\alpha_i)$ 의 검토

7) 反復性的 관계

벡터량 $r_i(\alpha_i)$ 의 특성은 다음 식에서와 같이 연속적으로 反復성을 가짐을 알 수 있다.

$$r_i(\alpha_i) = -e^{-(i-1)B} \int_0^{\alpha_k} e^{-\eta B} \phi d\eta = W^{-1} r_{i-1}(\alpha_i) \dots\dots\dots(14)$$

ㄱ) 벡터량 $r_i(\alpha_i)$ 의 連續繼電器制御의 最適軌道에 대한 관계

±1의 強制函數를 갖는 連續繼電器制御의 最適切換軌道에 대한 방정식을 얻기 위하여 다음의 微分方程式

$$\dot{\theta} = B \cdot \theta \pm 1 \cdot \phi \dots\dots\dots(15)$$

을 조건 $\theta(t) = 0$ 을 代入하여 풀면 強制函數 ±1에 대하여

$$\theta(t) = e^{tB} \theta_0 + e^{tB} \int_0^t e^{-\tau B} \phi d\tau \dots\dots\dots(16)$$

과 같이 된다. 여기서 θ_0 는 初期狀態이다.

이제 強制函數 +1에 대한 最適軌道를 벡터 $S(t)$ 로 표시하고, 強制函數 -1에 대한 벡터를 $-S(t)$ 로 표시하면, (15)식에 $\theta(t) = 0$ 를 代入하여

$$S(t) = \left\{ \theta_0 : \theta_0 = - \int_0^t e^{-\tau B} \phi d\tau, t \geq 0 \right\} \dots\dots\dots(17)$$

을 求하고,

$$-S(t) = \left\{ \theta_0 : \theta_0 = + \int_0^t e^{-\tau B} \phi d\tau, t \geq 0 \right\} \dots\dots\dots(18)$$

이다.

$$S(k-1+\alpha_k) - S(k-1), 0 \leq \alpha_k \leq 1$$

인 最適軌道의 線分을 검토하면,

$$S(k-1+\alpha_k) - S(k-1) = - \int_{k-1}^{k-1+\alpha_k} e^{-\tau B} \phi d\tau \dots\dots\dots(19)$$

이므로 $\tau = \eta + k - 1$ 을 代入하면

$$S(k-1+\alpha_k) - S(k-1) = -e^{-(k-1)B} \int_0^{\alpha_k} e^{-\eta B} \phi d\eta \dots\dots\dots(20)$$

이다.

이것은 $r_k(\alpha_k)$ 와 같으므로

$$r_k(\alpha_k) = S(k-1+\alpha_k) - S(k-1) \dots\dots\dots(21)$$

이다.

$r_k(\alpha_k)$ 는 最適軌道의 線分을 따라 움직이고 이 線分은 $r_{k-1}(\alpha_{k-1})$ 에 의하여 그려지는 線分보다 原點에서 멀리 떠러져 있다. 벡터 $r_i(\alpha_i)$ 에 의하여 그려

지는 線分과 最適軌道의 그림은 다음과 같다.

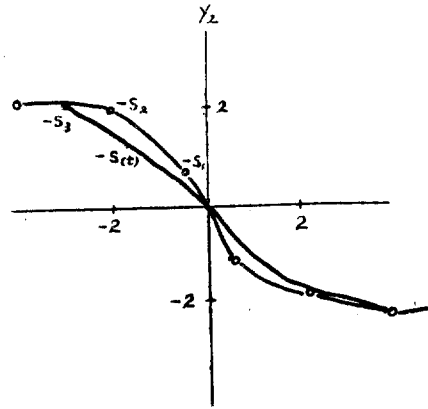


그림 3. 最適軌道와 벡터 $r_i(\alpha_i)$ 의 線分

ㄷ) 벡터 $r_i(\alpha_i)$ 의 傾斜問題

벡터량 $s(t)$ 의 성분을 $y_1(t), y_2(t)$ 이라 하면

$$s(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} \dots\dots\dots(22)$$

윗 식에서 t 를 消去하면 $\pm S(t)$ 로 表示된 最適切換軌道에 대한 方程式을 다음과 같은 스칼라量으로 표시할 수 있다.

$$y_2 = \begin{cases} f(y_1) & y_1 \geq 0 \\ -f(-y_1) & y_1 < 0 \end{cases} \dots\dots\dots(23)$$

이제 y_1 를 y_1 軸正方向의 단위 벡터라 하면 $f(y_1)$ 과 $-f(y_1)$ 는 單調減少函數이다.

그러므로 最適切換軌道에 관한 벡터량의 특성은

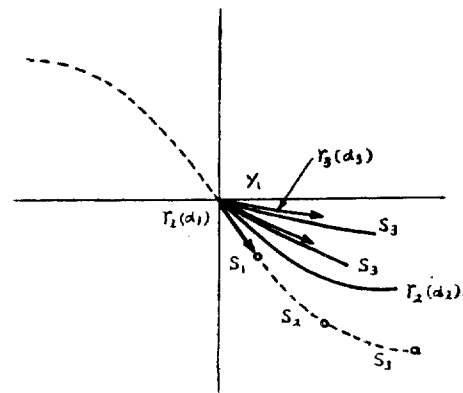


그림 4. $r_i(\alpha_i)$ 의 傾斜關係

다음과 같이 된다.

$$\begin{aligned}
& \Delta\{[S(t_2)-S(t_1)] \& y_1\} \\
& \Delta\{[S(t'_2)]-S(t'_1) \& y_1\} > 0 \dots\dots\dots(24)
\end{aligned}$$

$$\text{단 } t_1 < t_2 < t'_1 < t'_2 < \infty$$

$$\begin{aligned}
& \Delta[r_i(\alpha_i) \& y_1] > \Delta[r_{i-1}(\alpha_{i-1}) \& y_1] \dots\dots(24-1) \\
& \text{단 } 0 < \alpha_i \leq 1
\end{aligned}$$

$$0 \leq \alpha_{i-1} \leq 1 \quad i=1, 2, 3, \dots$$

$$\begin{aligned}
& \text{또 } \Delta[r_i(\alpha_i) \& y_1] > \Delta[r_i(\alpha_i + \epsilon) \& y_1] \dots\dots(24-2) \\
& \text{단 } \epsilon > 0
\end{aligned}$$

$$0 < \alpha_i + \epsilon \leq 1 \quad i=1, 2, 3, \dots$$

벡터량 $r_i(\alpha_i)$ 의 傾斜는 그림 4에 표시하였다.

(6) 初期狀態의 區分 關係

이제 R_N' 를 모든 初期狀態 θ_0^N 가 속하여 있는 集合이라고 하면 이 N 회 以下의 採取週期內에 팔스幅變調器出力 $\mu(t)$ 로서 系는 初期狀態 θ_0^N 에서 0으로 遷移하게 된다.

이제 $\mu(t)$ 를 $\{(\eta_k, \alpha_k)\}$ $\eta_k = \pm 1, 0 \leq \alpha_k \leq 1, k=1, 2, \dots, N$ 인 系列로 規定하면 集合 R_N' , $N=2, 3, \dots$ 은 位相平面上에 定해진 領域內의 모든 點으로 구성된다. 따라서 R_0' 는 原點이며, R_1' 은 曲線이고, R_N' 는 다음式의 集合과 같다.

$$\begin{aligned}
& \{\theta_0^N : \theta_0^N = \sum_{i=1}^N \xi_i r_i(\alpha_i), \xi_i = \pm 1, 0 \leq \alpha_i \leq 1\} \\
& n=1, 2, \dots, N \dots\dots\dots(25)
\end{aligned}$$

이제 初期狀態 θ_0^n 는

$$\begin{aligned}
& \theta_0^n = \sum_{i=1}^n \xi_i r_i(\alpha_i), \xi_i = \pm 1, 0 \leq \alpha_i \leq 1 \\
& n=1, 2, \dots, N \dots\dots\dots(26)
\end{aligned}$$

으로 표시할 수 있으므로 θ_0^n 을 初期狀態 θ_0^n 에 對한 $t' = k$ 일때 (13)식의 解이라고 하면 $\{(\xi_k, \alpha_k)\}$ 의 系列로서 $\mu(+)$ 를 規定하여 다음의 關係式을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned}
& \theta_1^n = W \left[\sum_{i=1}^n \xi_i r_i(\alpha_i) - \xi_1 r_1(\alpha) \right] \\
& = W \sum_{i=2}^n \xi_i r_i(\alpha_i) \dots\dots\dots(27)
\end{aligned}$$

또 $r_i(\alpha_i) = W \xi_i r_{i-1}(\alpha_i)$ 이므로 윗式은 다음과 같이 된다.

$$\theta_1^n = \sum_{i=1}^n \xi_i r_{i-1}(\alpha_i) \dots\dots\dots(28)$$

$$\text{그러므로 } \theta_i^n = \sum_{i=i+1}^n \xi_i r_{i-i}(\alpha_i), i=1, 2, \dots, n-1 \dots\dots(29)$$

따라서

$$\theta_{n-1}^n = \xi_n r_1(\alpha_n) \dots\dots\dots(30)$$

$$\theta_n^n = W[\xi_n r_1(\alpha_n) - \xi_n r_1(\alpha_n)] \dots\dots\dots(31)$$

$$= 0$$

이와 같은 방법으로 系列 $\{(\xi_k, \alpha_k)\}$ 로서 規定된 變調裝置出力 $\mu(t)$ 는 N 회 以下의 採取週期內에 系의 狀態를 原點으로 이동시킬 수 있음을 알 수 있다. 반대로 말일 θ_0^N 가 集合 R_N' 내에 있으면 實現possible 系列 $\{(\xi_k, \alpha_k)\}$ 로서 定할 수 있는 出力 $\mu(t)$ 가 존재하고 N 회 以下의 週期內에 系의 狀態를 初期狀態 θ_0^N 에서 0로 가져온다. 그러므로 (26)식과 같게 θ_0^N 에 對한 식을 수립할 수 있고, 集合 R_N' 는 (25)식의 集合과 같다.

(7) 初期狀態의 領域

이제 R_N 를 모든 初期狀態 θ_0^N 의 集合이라고 變調裝置出力 $\mu(t)$ 는 N 회 以下의 採取週期內에 制御系를 θ_0^N 에서 0으로 가져올 수 있는 것이라 하면

$$R_N = R_N' - R_{N-1}' \dots\dots\dots(32)$$

$$R_N' = \sum_{k=0}^N R_k \dots\dots\dots(33)$$

만일 θ_0^N 가 R_N 內에 있다고 하면 다음과 같은 標準式으로 표시할 수 있다.

$$\theta_0^N = \sum_{i=1}^N \xi_i r_i(\alpha_i), \xi_i = \pm 1, 0 \leq \alpha_i \leq 1, \alpha_N \neq 0 \dots(34)$$

(34)식의 關係는 逆으로 성립하지 아니하며, θ_0^N 의 모든 狀態는 R_N^1 에 반드시 속하나, R_N 에는 반드시 속한다고 할 수 없다.

이제

$$\begin{aligned}
& \theta_0^N = r(0) + r_2(0) + \dots + r_{N-1}(0) + r_N(\alpha_N), \alpha_N \neq 0 \dots(35) \\
& = r_N(\alpha_N)
\end{aligned}$$

이라하면,

$$0 \leq \alpha_1 \leq 1, \quad 0 \leq \alpha_2 \leq 1, \quad 0 \leq \alpha_N \leq 1$$

이며

$$r_N(\alpha_N) = -r_1(\alpha_1) + r_2(\alpha_2)$$

를 만족하는 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 의 값이 존재한다.

즉 $0 \leq \alpha_N \leq 1$ 인 α_N 의 값에 對하여 (35)식의 θ_0^N 는 R_N' 에 屬하고 R_N 에는 屬하지 않는다.

(8) R_N 의 구성

最適切換軌道 位相平面向 原點에 對하여 對稱的인 두개의 部分으로 구분한다. 最適切換軌道の 左半面向을 P_1 이라 하고, 그 右半面向을 P_2 이라 하면, 그림(5)와 같이 表示할 수 있다.

여기서 最適切換軌道の 線分은 R_{N-1} 의 境界의 一部이며 第4象限內에 있을 때는 P_1 面內에 있고, 第2象限內에 있을 때는 P_2 面內에 있다.

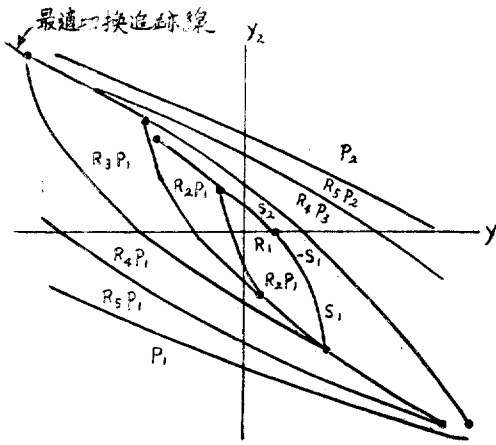


그림 5. 初期狀態의 R_N 領域

7) R_0 와 R_1 의 領域은 다음과 같이 表示할 수 있다.

$$R_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \dots \dots \dots (37)$$

$$R_1 = \left\{ \begin{matrix} \theta_0^1 : \theta_0^1 = \xi_1 r_1(\alpha_1); \xi_1 = \pm 1, 0 < \alpha_1 \leq 1 \end{matrix} \right\} \dots \dots \dots (38)$$

R_0 은 原點이며, 領域 R_1 은 $0 \leq t \leq 1$ 일때 $\pm S(t)$ 가 追跡할 수 있는 最適切換軌道의 一部分이 된다.

ㄴ) R_2 는 다음 集合과 同一하다.

$$\left\{ \begin{matrix} \theta_0^2 : \theta_0^2 = \xi_1 r_1(\alpha_1) + \xi_2 r_2(\alpha_2) \\ \xi_1 = \pm 1, \xi_2 = \pm 1, 0 \leq \alpha_1 \leq 1, 0 \leq \alpha_2 \leq 1 \end{matrix} \right\} \dots \dots \dots (39)$$

(25)式과 (34)式에서 R_2 내의 모든 初期狀態는 (37)式의 型態로 表示할 수 있으므로 R_2 는 (39)式에 包含되는 것임을 알 수 있다.

그런데 $\alpha_2 \approx 0$ 이므로 (24-1)式의 關係로 말미아마 θ_0^2 는 R_0 내에 있지 않다. 또 $\alpha_2 \approx 0$ 이므로 (24)式과 (21)式의 關係에서

$$\xi_1 r_1(\alpha_1) + \xi_2 r_2(\alpha_2) \approx \xi_1' r_1(\alpha_1) \dots \dots \dots (40)$$

$$\text{但 } \xi_1 = \pm 1, \xi_1' = \pm 1, \xi_2 = \pm 1 \\ 0 = \alpha_1 \leq 1, 0 \leq \alpha_1' \leq 1, 0 \leq \alpha_2 \leq 1$$

그러므로 θ_0^2 는 R_2' 내에 存在함을 알 수 있으며, 이것이 R_2' 내에 存在하지 않으면 R_2 내에 存在하여야 한다.

그러므로 R_2 는 (39)式과 同一한 集合 R_2 의 幾何學的 關係에 있어서 $i=1, 2, 3 \dots$ 에 對하여 $\xi_i s_i$ 는 벡터량 $\xi_i [s(i-1+r_i(\alpha_i))] = \xi_i s(i-1+\alpha_i)$, $\xi_i = \pm 1$, $0 \leq \alpha_i \leq 1$ 로서 追跡할 수 있는 最適切換軌道의 線分이다.

그러므로 (39)式으로 表示되는 集合은 線分+ S_1 과-

S_1 을 終點에서 다른 終點까지 움직일때 包含하는 面積內의 모든 點으로 構成된다.

當初 $+r_1(1)$ 에 있던 $\pm S_1$ 의 點을 $\pm S_1$ 과 接續시키면서 움직이면 그림(5)와 같게되고 R_2 는 領域 R_{2P1} 과 R_{2P2} 聯合이 된다.

그런데 $f(y_1)$ 는 y_1 에 關하여 單調히 變하는 函數이므로 R_2 의 境界는 $\pm S_2$ 의 點이 $\pm S_1$ 을 따라 移動함에 따라 一部 追跡되며, 또 一部는 $\pm S_2$ 自體로서 形成된다. 그러므로 R_2 의 境界는 $\pm S_1$ 및 $\pm S_2$ 의 線分으로 構成된다. (24)式의 結果로서 境界線分間의 內角은 π 보다 적게 됨을 알 수 있다.

ㄴ) $i=1, 2$ 에 對하여 P_i 面內의 R_N 의 境界上에서의 諸狀態를 集合 $R_{NB P_i}$ 이라하면 다음과 같은 關係式을 얻을 수 있다.

$$R_{2BP1} = \left\{ \begin{matrix} \theta_0^2 : \theta_0^2 = +r_1(1) \pm r_2(\alpha_2), 0 < \alpha_2 \leq 1 \\ = \pm r_1(\alpha_1) - r_2(1), 0 \leq \alpha_1 \leq 1 \end{matrix} \right\} \dots \dots \dots (41)$$

또 같은 方法으로

$$R_{2BP2} = \left\{ \begin{matrix} \theta_0^2 : \theta_0^2 = r_1(1) \pm r_2(\alpha_2), 0 < \alpha_2 \leq 1 \\ = \mp r_1(\alpha_1) + r_2(1), 0 \leq \alpha_1 \leq 1 \end{matrix} \right\} \dots \dots \dots (42)$$

ㄷ) $i=1, 2$ 에 對하여 R_{NP2} 를 P_2 面內의 R_N 의 一部이라하면 R_N 을 構成할 때와 마찬가지로 方法으로 R_3 에 對하여 二個의 集合을 얻을 수 있다.

P_1 面에서

$$\left\{ \begin{matrix} \theta_0^3 : \theta_0^3 = r_1(1) \mp r_2(\alpha_2) - r_3(\alpha_3) \\ = \pm r_2(\alpha_1) - r_2(1) - r_3(\alpha_3) \\ 0 \leq \alpha_1 \leq 1, 0 \leq \alpha_3 \leq 1, i=1, 2 \end{matrix} \right\} \dots \dots \dots (43)$$

(43)式으로 表示된 θ_0^3 을 檢討하여 볼 때 이것은 벡터량 $-r_3(\alpha_3)$, $0 < \alpha_3 \leq 1$ 를 P_1 面內의 R_2 의 境界에 含한 것이다.

벡터량 $-r_3(\alpha_3)$ 는 P_1 面에 向하여 있다. 또 R_2 의 境界線分間의 內角은 π 보다 적은 것임을 그림에서 알 수 있다.

그러므로 (43)式으로 表示되는 θ_0^3 은 P_1 面內에 存在하며 R_2' 內에는 存在하지 않는다.

마찬가지 方法으로

P_2 面內에서는

$$\left\{ \begin{matrix} \theta_0^3 : \theta_0^3 = -r_1(1) \mp r_2(\alpha_2) + r_3(\alpha_3) \\ = \mp r_1(\alpha_1) + r_2(1) + r_3(\alpha_3) \\ 0 \leq \alpha_1 \leq 1, 0 < \alpha_3 \leq 1, i=1, 2 \end{matrix} \right\} \dots \dots \dots (44)$$

이며 上式의 集合은 $-S_3$ 線分을 P_1 面內의 R_2 의 境界線에 따라 回轉없이 이동할 때 內包하는 面積으로 결정된다.

마찬가지로 (44)式의 集合은 P_2 面內의 R_2 의 境界線

을 따라 移動하는 +S₃線分에 依하여 이루어지는 面積으로 결정된다.

構成上 關係로 보아서

$$\sum_{i=1}^3 \xi_i r_i(\alpha_i), \xi_i = \pm 1, 0 \leq \alpha_i \leq 1 \text{는 (43)式과 (44)}$$

式의 外郭境界內에 存在하지 않으면 아니된다. 그러므로 R_{3BP1}는 (43)式의 集合內에 包含되는 同一집합이 된다.

N=3에 對하여 R_N도 마찬가지로 構成할 수 있다.

ㄷ) R₃의 諸境界는 線分 ±S₁, ±S₂ 및 ±S₃으로 構成되며 다음과 같은 方程式으로 표시할 수 있다.

$$R_{3BP1} = \begin{cases} \theta_0^3 : \theta_0^3 = r_1(1) + r_2(1) \pm r_3(\alpha_3), 0 < \alpha_3 \leq 1 \\ \theta_0^3 = r_1(1) \pm r_2(\alpha_2) - r_3(1), 0 \leq \alpha_2 \leq 1 \\ \theta_0^3 = \mp r_1(\alpha_1) + r_2(1) + r_3(1), 0 \leq \alpha_1 \leq 1 \\ \dots \dots \dots \end{cases} \text{(45)}$$

$$R_{3BP2} = \begin{cases} \theta_0^3 : \theta_0^3 = -r_1(1) - r_2(1) \mp r_3(\alpha_3), 0 \leq \alpha_3 \leq 1 \\ \theta_0^3 = -r_1(1) \pm r_2(\alpha_2) - r_3(1), 0 \leq \alpha_2 \leq 1 \\ \theta_0^3 = \mp r_1(\alpha_1) + r_2(1) + r_3(1), 0 \leq \alpha_1 \leq 1 \\ \dots \dots \dots \end{cases} \text{(46)}$$

여기서 R₃의 境界線上의 線分 ±S₁, ±S₂, ±S₃間의 內角은 π보다 적다.

ㄹ) N=3, 4, 5...에 대하여 같은 방법으로 R_{NP1} 및 R_{NP2}를 결정하는 關係式을 구하면 다음과 같은 諸集合을 求할 수 있다.

P₁面內에서

$$\left\{ \begin{array}{l} \theta_0^N : \theta_0^N = r_1(1) + \dots + r_{k-1}(1) + r_k(\alpha_k) - r_{k+1}(1) \\ \quad \dots - r_N(\alpha_N) \\ \theta_0^N = r_1(1) + \dots + r_{k-1}(1) - r_k(\alpha_k) - r_{k+1}(1) \\ \quad \dots - r_N(\alpha_N) \\ k=1, 2, \dots, (N-1) : 0 \leq \alpha_k \leq 1, 0 \leq \alpha_N \leq 1 \end{array} \right\} \text{(47)}$$

P₂面內에서

$$\left\{ \begin{array}{l} \theta_0^N : \theta_0^N = -r_1(1) - \dots - r_{k-1}(1) - r_k(\alpha_k) + r_{k+1}(1) \\ \quad + \dots + r_N(\alpha_N) \\ \theta_0^N = -r_1(1) - \dots - r_{k-1}(1) + r_k(\alpha_k) + r_{k+1}(1) \\ \quad + \dots + r_N(\alpha_N) \\ k=1, 2, \dots, N-1 : 0 \leq \alpha_k \leq 1 : 0 < \alpha_N \leq 1 \end{array} \right\} \text{(48)}$$

上記 諸集合의 外郭境界는 ±S_i, i=1, 2, ..., N인 線分이 이 境界上에 回轉없이 變動하여 이루어지고 그 構成上으로 보아 境界上의 諸線分 ±S_i間의 內角은 π보다 적다는 것을 알 수 있다.

(47)式과 (48)式의 外郭境界에 對한 方程式은 다음과 같이 表示할 수 있다.

P₁面內에서

$$\left\{ \begin{array}{l} \theta_0^N : \theta_0^N = r_1(1) + \dots + r_{k-1}(1) + r_k(\alpha_k) - r_{k+1}(1) - \\ \quad \dots - r_N(1) \\ \theta_0^N = r_1(1) + \dots + r_{k-1}(1) - r_k(\alpha_k) - r_{k+1}(1) - \\ \quad \dots - r_N(1) \\ k=1, 2, \dots, N : 0 \leq \alpha_k \leq 1 : 0 \leq \alpha_N \leq 1 \end{array} \right\} \text{(49)}$$

또 P₂面內에서

$$\left\{ \begin{array}{l} \theta_0^N : \theta_0^N = -r_1(1) - \dots - r_{k-1}(1) - r_k(\alpha_k) + r_{k+1} \\ \quad (\alpha_{k+1}) + \dots + r_N(1) \\ \theta_0^N = -r_1(1) - \dots - r_{k-1}(1) + r_k(\alpha_k) + r_{k+1} \\ \quad (\alpha_{k+1}) + \dots + r_N(1) \\ k=1, 2, \dots, N : 0 \leq \alpha_k \leq 1 : 0 < \alpha_N \leq 1 \end{array} \right\} \text{(50)}$$

이제 N=n, n>3, 일 때 R_{NP1}은 (47)式의 集合과 同一하다. 또 R_{NP2}는 (48)式의 集合과 同一하다. N=(n+1)에 對하여 (47)式의 θⁿ⁺¹을 檢討하면, -r_{n+1}(α_{n+1})은 P₁面을 向하고 있고 ±S_i, i=1, 2, ..., n인 諸線分間의 內角은 π보다 적으며, (24)式으로 표시되는 傾斜 關係로 말미아마 θⁿ⁺¹는 P₁面內에 存在하고 R'_n內에는 存在하지 않는다.

그러나 構成上 θⁿ⁺¹는 R'_{n+1}內에 存在하며, θⁿ⁺¹는 N=n+1 일 때 R_{(n+1)P1}內에 存在한다. 따라서 N=n+1 일 때 (47)式은 P₁面內의 R_n의 境界를 따라 回轉 없이 線分 -S_{n+1}을 移動시킬 때 占하는 面積이 된다.

그러나 構成上 ∑_{i=1}ⁿ⁺¹ ξ_i r_i(α_i), ξ_i = ±1, 0 ≤ α_i ≤ 1, α_N ≠ 0인 形態의 모든 벡터量은 N=n+1 일 때 (49)式과 (50)式으로 定해지는 (47)과 (48)式의 外部境界內에 存在하지 않으면 아니된다.

그러므로 N=n+1 일 때 R_{(i+1)P1}은 (47)式의 集合과 같고 R_{(n+1)P2}는 (48)式의 集合과 같다.

그러나 R_N는 N=3일 때 (47)과 (48)式의 集合의 聯合과 同一하며, 따라서 N=3, 4...일 때 R_N을 構成하는 方法은 마찬가지로 適用된다.

R_{NP1}은 (49)式의 集合과 같고, R_{NP2}는 (50)式의 集合과 같다.

(9) 最適 脈스幅變調裝置出力의 決定

最適脈스幅變調裝置出力은 正確히 N回的 採取週期內에 制御系를 R_N內의 初期狀態 θ₀^N에서 原點으로 變移시키는 것이며, 求하는 最適方策은 最適脈스幅變調裝置出力을 결정하는 {(ξ_i, α_i)}의 系列을 算定하는 問題가 된다.

그러므로 演算裝置는 最適方策을 얻는데 利用하여 時間 t'=i-1 일 때 필요한 (ξ_i, α_i)를 狀態 θ_{i-1}^N의 函數關係로 만들어서 脈스幅變調裝置에 印加하고 變調裝置는 持續時間 α_i이며, 極性 ξ_i인 脈스波를 發生시키도록 하여야 한다.

(10) 필요한 最適脈스幅變調裝置出力의 特性

R₁ 및 R₂內의 初期狀態에 對하여 소요되는 最適脈스

幅變調裝置의 出力은 일률적으로 결정되나 $N > 2$ 일 때는 R_N 內의 初期狀態에 對한 最適 出力은 반드시 일률적으로 결정되지 않는다.

R_N 內의 初期狀態 θ_0^N 에 對한 팔스幅變調裝置의 最適 出力과 그 狀態의 標準式은 同一한 系列 $\{(\xi_i, \alpha_i)\}$ 에서 구하여지기 때문에 1對1의 對應性을 갖는다. 따라서 팔스幅變調裝置의 最適 出力이 唯一하게 정하여짐을 究明하기 위하여 狀態標準式의 唯一性을 檢討하면 된다.

7) 萬一 θ_0^1 이 R_1 內에 存在하면 그 표준식은 다음과 같이 된다.

$$\theta_0^1 = \xi_1 r_1(\alpha_1), \quad 0 < \alpha_1 \leq 1, \quad \xi_1 = \pm 1 \dots \dots \dots (51)$$

그런데 α_1 의 各值에 對하여 $r_1(\alpha_1)$ 의 값은 단 1個만이 存在하며 그 反對도 마찬가지로 成立된다. θ_0^1 에 對한 표준식은 唯一하므로 이에 對한 最適 팔스幅變調裝置 出力도 唯一하게 결정된다.

나) 萬一 θ_0^2 가 R_2 內에 있으면 그 標準式은

$$\theta_0^2 = \xi_1 r_1(\alpha_1) + \xi_2 r_2(\alpha_2) : \xi_i = \pm 1, \quad 0 < \alpha_i \leq 1, \quad 0 \leq \alpha_2 \leq 1, \quad i = 1, 2 \dots \dots \dots (52)$$

이다. $r_1(\alpha_1)$ 과 $r_2(\alpha_2)$ 의 媒介變數方程式은 1對1의 對應性이 있으므로 벡터 θ_0^2 는 (52)式에서 (ξ_1, α_1) 과 (ξ_2, α_2) 에 依하여 唯一하게 決定된다. θ_0^2 가 R_2 에 있다고 하면 R_2 의 構成關係를 볼 때 線分 S_2 과 $-S_2$ 가 線分 S_1 과 $-S_1$ 上을 移動함에 따라 그중 하나는 주어진 狀態 θ_0^2 를 單한번 交叉하게 된다.

$r_1(\alpha_1)$ 과 $r_2(\alpha_2)$ 는 α_1 및 α_2 와 1對1의 對應性이 各各 있으므로 $\pm S_2$ 과의 交叉하는 點은 唯一한 값의 (ξ_1, α_1) 을 가지며, $\pm S_2$ 가 $\pm S_1$ 과 接하는 點도 唯一한 값의 (ξ_2, α_2) 를 갖게 된다. 그러므로 R_2 內의 θ_0^2 의 式은 唯一하게 決定되며, 最適 팔스幅變調裝置 出力도 唯一하게 決定된다.

다) 萬一 θ_0^3 가 R_{3P_1} 內에 存在하고, R_3 의 境界上에 있지 않으면 이 式은 P_1 內의 R_2 의 境界上의 點 θ_0^2 에 向量 $-r_3(\alpha_3)$, $0 < \alpha_3 \leq 1$ 를 合한 것으로 표시할 수 있다.

$$\theta_0^3 = \theta_0^2 - r_3(\alpha_3) \dots \dots \dots (53)$$

不等式(24-1)은 $\epsilon > 0$ 의 값에 對하여

$$\theta_0^3 + r_3(\alpha_3 + \epsilon) = \theta_0^2, \quad 0 < \alpha_3 + \epsilon \leq 1 \dots \dots \dots (54)$$

가 成立하며, θ_0^2 는 R_2 內부의 點이 된다. 그러므로 θ_0^3 에 對한 또 하나의 式은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\theta_0^3 = \theta_0^2 - r_3(\alpha_3 + \epsilon) \dots \dots \dots (55)$$

그러므로 R_{3P_1} 內의 初期狀態에 對한 式은 唯一하게 決定되는 것이 아니므로 팔스幅變調裝置의 最適 出力도

唯一하게 결정되는 것이 아니다.

마찬가지로 R_{3P_2} 內의 初期狀態에 對한 最適 팔스幅變調裝置 出力도 唯一하게 決定되지 않는다.

그러므로 R_3 의 境界上의 初期狀態에 對한 最適 方案은 단 하나만이 있다.

ㄷ) $N \geq 3$ 일 때 R_N 에 對하여도 마찬가지로 R_N 의 境界上에 存在하지 않는 初期狀態에 對한 最適 方案은 唯一하게 決定되지 않으며, R_N 의 境界上에 存在하는 初期狀態에 對하여는 最適 方案이 唯一하게 정해진다.

(11) 最適 方案의 究明

R_N 內의 初期狀態 θ_0^N 에 對하여 時間 $t' = 0$ 일 때 最適 팔스幅變調裝置 出力을 發生시키는데 必要한 式을 一時에 算定하지 않고 $t' = (i-1)$ 에서 (ξ_i, α_i) 의 값을 하나씩 算出하여도 系의 動作에는 아무 상관이 없을 것이므로 그 動作을 簡單히 구명할 수 있다.

이러한 경우 演算器는 (ξ_i, α_i) 의 값을 計算하면 되는 것이므로 各 採取瞬時마다 計算을 反復하면 될 것이다.

이제 $N=1, 2, \dots$ 인 R_N 內의 모든 初期狀態의 部分集合을 第1屬이라 하면 이것은 (38)式 (39)式 (47)式 및 (48)式에서와 같은 方法으로 다음과 같이 表示할 수 있다.

$$\theta_0^N = +r_1(\alpha_1) + \xi \left[\sum_{i=2}^{N-1} r_i(1) + r_N(\alpha_N) \right] \\ \xi = \pm 1, \quad 0 < \alpha_1 \leq 1, \quad 0 < \alpha_N \leq 1 \dots \dots \dots (56)$$

$$\varphi \left[\sum_{i=2}^{N-1} r_i(1) + r_N(\alpha_N) \right]$$

$$\xi = \pm 1, \quad 0 < \alpha_N \leq 1, \quad N=2, 3, \dots$$

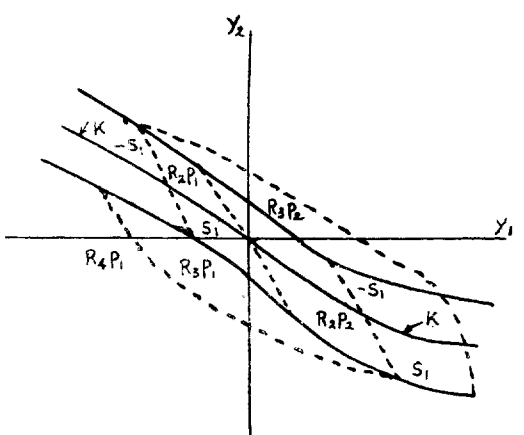


그림 6. 最適 方案을 얻기 위한 初期狀態의 區分

은 Vector量 $\xi[s(t) - r_i(1)] \quad 1 \leq i < \infty, \xi_i = \pm 1$ 로서 표시되는 曲線이 된다.

이 曲線을 臨界線이 되고 그림(6)의 對角線上에 K 로서 表示된다.

이제 (56)式은 檢討하면 第1屬內의 諸狀態는 $\pm r_1$ (α_1)가 臨界線上의 諸點으로 표시되므로 第1屬은 線分 $\pm S_1$ 을 臨界線에 따라서 變移할 때 점유하는 狹帶領域이다. 原點에 있던 $\pm S_1$ 의 諸點은 臨界線을 따라 移移한다. $\pm S_1$ 가 θ_o^N 點과 交叉할 時 α_1 의 값은 定해지며, ξ_1 의 값은 $\pm S_1$ 에서 直接求할 수 있다.

第1屬內의 狀態領域의 境界線은 最適切換軌道가 되고 이 境界에 對한 方程式은 다음과 같이 표시된다.

ㄱ) $K_1(t)$ 를 P_1 面內의 第1屬의 境界를 追跡하는 벡타量이라 하면

$$\text{또는 } \left. \begin{aligned} K_1(t) &= s(t) \\ K_1(t) &= -s(t) + 2r_1(1) \end{aligned} \right\} 1 \leq t < \infty \dots\dots\dots(57)$$

ㄴ) $K_1(t)$ 를 P_2 面內의 第1屬의 境界를 追跡하는 벡타量이라 하면

$$\left. \begin{aligned} K_2(t) &= -s(t) \\ K_2(t) &= +s(t) - 2r_1(1) \end{aligned} \right\} 1 \leq t < \infty \dots\dots\dots(58)$$

이제 第2屬을 $N=3, 4$ 인 R_N 內의 모든 初期狀態의 部分集合이라 하면 다음과 같이 표시할 수 있다.

$$\theta_o^N = \xi_i r_1(1) + \sum_{i=2}^N \xi_i r_i(\alpha_i), \quad 0 \leq \alpha_i \leq 1, \quad \xi_i = \pm 1$$

$$\alpha_N \neq 0 \quad N=3, 4 \dots\dots\dots(59)$$

上記 (59)式의 모든 狀態는 狹帶領域外部에 있고 初期狀態에서 $\alpha_1=1$ 이며 그 狀態가 臨界線左側에 있으면 $\xi_1=+1$ 이고 臨界線右側에 있으면 $\xi_1=-1$ 이다.

그러므로 最適方策은 다음과 같이 결정할 수 있다.

ㄱ) 臨界線의 左側에 있는 모든 狀態에 對하여 $\xi_1=+1$ 으로 정하고 臨界線 右側에 있는 모든 狀態에 對하여는 $\xi_1=-1$ 로 定한다.

ㄴ) 第1屬의 狹帶領域外部와 그 境界上에 存在하는 狀態에 對하여는 $\alpha_1=1$ 으로 定한다.

ㄷ) 第1屬內에 存在하는 모든 狀態에 對하여는 $0 \leq \alpha_1 < 1$ 로 定한다.

線分 $\pm S_1$ 은 媒介變數 α_1 의 값을 가지므로 線分 $\pm S_1$ 가 狀態 θ_o^N 과 交叉할 때 線分 $\pm S_1$ 에서 α_1 의 값을 直接 求한다.

(11)-1. 最適方策을 算定하기 위한 演算裝置

(Ts/KM) · x의 x入力과 (Ts/KM) · ẋ의 y入力을 그리는 x-y曲線을 만들면 이 x-y平面은 이 制御系의 正規位相平面이 될을 알 수 있다.

이 位相平面에 移動體를 設置하여 이것이 回轉 없이 移動하며 그 內部의 한點 0가 臨界線上을 追跡한다고 하고, 또 移動體內의 0點을 지나 홈을 만들어 線分

$\pm S_1$ 와 같게 하고 또 中間點을 接地한 非線型抵抗器와 같다고 생각하면 이 移動體가 位相平面을 移動함에 따라 이 線分은 第一屬의 狹帶를 占하게 된다.

이제 非線型抵抗器를 適切히 選定하여 電源에 連結하면 通路를 追跡하는 檢出裝置는 그 크기가 α_1 에 比例하는 電壓을 檢出하고 그 電壓極性이 位相平面上의 그 點에 對한 ξ_1 이 될 것이다. 그러므로 이 演算裝置에는 x-y曲線作圖裝置의 作圖針에 檢出裝置를 設置하여야 된다.

따라서 x-y曲線 作圖針은 探索裝置를 移動시킴에 따라 自動적으로 正確히 ξ_1 과 α_1 의 값이 되는 通路의 位置를 取하게 된다.

(12)-1. 二重積分프렌트의 最適制御

모든 單位를 正規化하면 프렌트의 傳達函數는 다음과 같다.

$$G_1(S) = \frac{1}{S^2} \dots\dots\dots(60)$$

(k-1) ≤ t' ≤ k일 때 프렌트의 微分方程式은 다음과 같이 된다.

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + \frac{u}{M} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \dots\dots\dots(61)$$

上式을 풀면

$$\begin{pmatrix} y_1(t') \\ y_2(t') \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & t'-k+1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1(k-1) \\ y_2(k-1) \end{pmatrix} + \xi_k \begin{pmatrix} 1 & t'-k+1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \int_0^{t'-k} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} d\tau \dots\dots\dots(62)$$

즉

$$\begin{pmatrix} y_1(t') \\ y_2(t') \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1(t'-k+1) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} y_1(k-1) \\ y_2(k-1) \end{pmatrix} + y_2 \begin{pmatrix} -\alpha_k^2 \\ \alpha_k \end{pmatrix} \right) \dots\dots\dots(63)$$

t' = k에서 (63)式의 값을 算出하고 $y_i(k) = y_{i,k}, i=1, 2, k=1, 2, \dots$ 이라 하면 制御系의 差分方程式은 다음과 같이 된다.

$$\begin{pmatrix} y_{1,k} \\ y_{2,k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_{1,k-1} \\ y_{2,k-1} \end{pmatrix} + \xi_k \begin{pmatrix} \alpha_k^2 \\ \alpha_k \end{pmatrix} \dots\dots\dots(64)$$

그러므로

$$r_i(\alpha_i) = \begin{pmatrix} -\alpha_i^2 \\ 2 \\ -\alpha_i \end{pmatrix} \quad 0 \leq \alpha_i \leq 1 \dots\dots\dots(65)$$

$$s(t) = \begin{pmatrix} t^2 \\ 2 \\ -t \end{pmatrix} \quad 0 \leq t \leq \infty \dots\dots\dots(66)$$

이 되고

$$r_i(\alpha_i) = \begin{pmatrix} 1-(i-1) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_i^2 \\ 2 \\ -\alpha_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_i^2 \\ 2 \\ -\alpha_i \end{pmatrix} + (i-1)\alpha_i \quad i=1, 2, \dots\dots\dots(67)$$

(66)式에서 t를 消去하면 強制函數 +1에 對한 最適

切換軌道에 對한 方程式을 얻는다.

$$y_2 = -\sqrt{2y_1} : y_1 \geq 0 \dots\dots\dots(68)$$

正인 y_1 의 값에 對하여 最適切換軌道の 傾斜는 다음과 같다.

$$\frac{dy_2}{dy_1} = \frac{-1}{\sqrt{2y_1}}$$

그러므로 $f(y_1)$ 과 $-f'(y_1)$ 은 y_1 에 關하여 單調로히 減少하는 函數임을 알 수 있다.

領域 R_n 과 第一屬의 狹帶領域은 그림(7)에 圖示하였다.

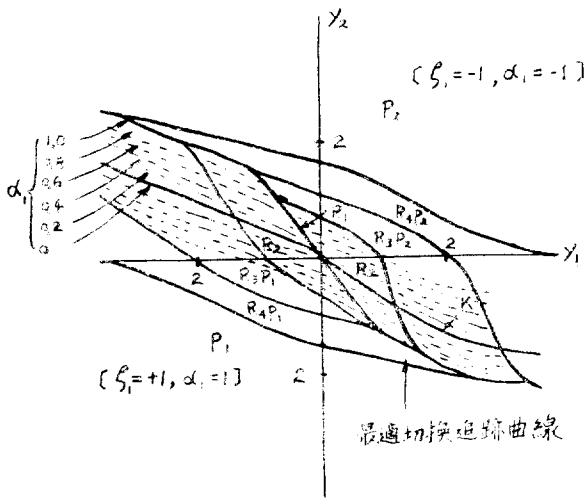


그림 7. 二重積分型프렌트의 位相平面關係

(12)-2. 單一積分과 時定數를 갖는 플렌트의 最適制御

모든 單位를 正規化하면, 플렌트의 傳達函數는 다음과 같이 表示된다.

$$G_2(S) = \frac{T}{S(Ts+1)} \dots\dots\dots(70)$$

但 T 는 正規 時定數임

$(k-1)T \leq t' \leq kT$ 일 때 플렌트의 微分方程式은 다음과 같이 表示된다.

$$\begin{pmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1/T \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + \frac{U_k}{M} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \dots\dots\dots(71)$$

上式을 풀면 다음과 같다.

$$\begin{pmatrix} y_1(t') \\ y_2(t') \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & T\{1 - \exp[-(t' - k + 1)/T]\} \\ 0 & \exp[-(t' - k + 1)/T] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1(K-1) \\ y_2(K-1) \end{pmatrix} + \xi_k \int_0^{\alpha_k} \begin{pmatrix} T\{1 - \exp(\eta/T)\} \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} d\eta \dots\dots\dots(72)$$

즉

$$\begin{pmatrix} y_1(t') \\ y_2(t') \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & T\{1 - \exp[-(t' - K + 1)/T]\} \\ 0 & \exp[-(t' - K + 1)/T] \end{pmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} y_1(k-1) \\ y_2(k-1) \end{bmatrix} + \xi_k \begin{pmatrix} T\{\alpha_k - T[\exp(\alpha_k/T) - 1]\} \\ T[\exp(\alpha_k/T) - 1] \end{pmatrix} \dots\dots\dots(73)$$

$t' = kT$ 에서 上式의 系에 對한 差分方程式은 다음과 같다.

$$\begin{pmatrix} y_{1k} \\ y_{2k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & T\{1 - \exp(-1/T)\} \\ 0 & \exp(-1/T) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1(k-1) \\ y_2(k-1) \end{pmatrix} + \xi_k \begin{pmatrix} T\{\alpha_k - T[\exp(\alpha_k/T) - 1]\} \\ T[\exp(\alpha_k/T) - 1] \end{pmatrix} \dots\dots\dots(74)$$

(73)式과 (74)式에서 다음式을 얻을 수 있다.

$$r_1(\alpha_1) = \begin{pmatrix} -T\{\alpha_1 - T[\exp(\alpha_1/T) - 1]\} \\ -T[\exp(\alpha_1/T) - 1] \end{pmatrix} \dots\dots\dots(75)$$

$$s(t) = \begin{pmatrix} -T\{t - T[\exp(t/T) - 1]\} \\ -T[\exp(t/T) - 1] \end{pmatrix}, 0 \leq \alpha_1 \leq 1 \dots\dots\dots(76)$$

또

$$\begin{aligned} r_i(\alpha_i) &= \begin{pmatrix} 1 & T\{1 - \exp[-(i-1)/T]\} \\ 0 & \exp[-(i-1)/T] \end{pmatrix} \\ &\quad \begin{pmatrix} -T\{\alpha_i - T[\exp(\alpha_i/T) - 1]\} \\ -T[\exp(\alpha_i/T) - 1] \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} T\{-\alpha_i + T\exp[(i-1)/T][\exp(\alpha_i/T) - 1]\} \\ -T \exp[(i-1)/T][\exp(\alpha_i/T) - 1] \end{pmatrix} \dots\dots\dots(77) \end{aligned}$$

(76)式에서 t 를 消去하여 +1인 強制函數에 對한 最適切換軌道에 對한 方程式을 求하면 다음과 같이 된다.

$$y_1 = -Ty_2 - T^2ix(1 - y_2/T), \quad y_2 \leq 0$$

負值의 y_2 에 對한 最適切換軌道는 第4象限에서 다음과 같이 된다.

$$\frac{dy_2}{dy_1} = \frac{1}{y_1} - \frac{1}{T} \dots\dots\dots(79)$$

(78)式과 (79)式에서 $f(y_1)$ 과 $-f'(y_1)$ 은 ($y_1 \geq 0$ 일 때) y_1 에 關하여 單調로히 減少하는 函數가 됨을 알 수 있다.

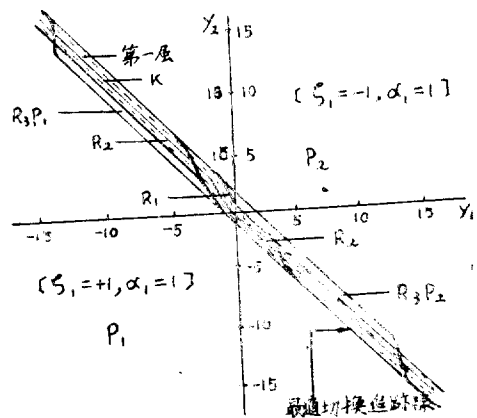


그림 8. 單一積分과 時定數를 갖는 플렌트의 位相平面關係

領域 R_N 과 第一屬의 狹帶領域은 ($T=1$ 일 때) 그림 (8)에 例示하였다.

3. 결 론

本論에서 記述한바와 같이 制御系의 位相平面은 몇 개의 初期狀態領域 R_N 으로 區分되고, 임의 初期狀態에서 原點으로 系를 N 回以下의 採取週期以內에 移動시킬 수 있으며, R_N 內에 存在하는 初期狀態에 對한 標準式은 N 個의 벡터量 $r_i(\alpha_i)$ 의 合成으로 求하여지며, N 回의 採取週期中 系를 原點으로 移動시키는데 要하는 팔스幅變調裝置出力과 벡터成分量과는 1對1의 對應性이 成立한다.

位相平面內의 系의 位置를 팔스幅變調裝置 最適出力 팔스波의 極性和 持續時間으로 變換하는 方法을 究明하였고 이를 達成하는데 演算機裝置를 使用하였다.

또 採取週期가 減少함에 따라 第一屬의 狹帶領域도 狹小하여져서 그 極限에서는 最適切換軌道와 일치하게 된다. 그러므로 採取週期가 감소하여짐에 따라 팔스幅變調制御系는 그 動作特性이 最適連續性繼電制御系와 近似하여짐이 究明되었으며 本연구과정에서 究明된 方法은 非線型系프렌트에서도 유용하게 적용할 수 있다고 생각된다.

참 고 문 헌

1. C.A. Descer and J.Wing: "An Optimal Strategy for a Saturating Sampled-Data System" Trans I. R.E. 1962
2. S.S.L. Chang: Synthesis of Optimum Control Systems; McGraw Hill, 1961
3. M. Athan and P.L. Falp. "Optimal Control", McGraw Hill, 1968

4. R.C. Dorf: "Time-Domain Analysis and Design of Control System", Addison-Wily, 1964
5. L.S Pontryagin, V. G. Boltyansty "The Mathematical Theory of Optimal Process", Interscience, 1962
6. Leitmann: "Optimization Techniques" Academic Press, 1962
7. Bach chuff: "Modern Analytical Design of Instrument Servomechanisin," Addison-Wily, 1964
8. W.E. Butcher, R. Oldenberger; "Identification of Linear Samped-Dater Systems by Transform Method", IEEE, OCT, 1969
9. EV. Bohn, J.W. Sutherland: "The Numerical Solution of Control Optimization Problems by Systematic Search in Initial Costate Space", IEEE. OCT. 1969
10. J.C. Hsu. & A.U. Meyer.: "Modern Control Principle and Applications," Mcgraw Hill, 1968
11. K.Ogata: "State Space Analysis of Control Systems." Prentice Hall, 1967
12. O.I. Elgerd. "Control Systems Theory", Mcgraw Hill, 1967
13. Merrian, J.,C, "Optimization Theory and Design of Feedback Control Systems" Mcgraw Hill, 1964
14. D.P.Lindorf. "Theory of Sampled-Data Control Systems," Wiley, 1965
15. J.E. Gibson: "Nonlinear Automatic Control", McGraw Hill, 1963.
16. J.Tou: "Modern Control Theory" Mcgraw Hill, 1964.