

# 部分剛 接合의 節點을 갖는 架構의 應力解析에 關한 研究

A Study on the Stress Analysis for Frames with  
Partially Rigid Joints

金 亨 杰\*

## 1. 序 論

構造物의 應力解析에 있어서 節點을 pin connection이나 또는 完全한 rigid connection으로 假定하는 것이 普通이다. 그러나 實際의 構造物에 있어서는 그런 것은 없다. pin connection이라하는 것도 摩擦作用을 無視하였을 때에 限하여 成立되는 條件이다. 그러므로 truss의 境遇에도 正確을 要할때에는 二次應力으로서 節點의 剛性에 對한 補正을 할 때가 있다. 鐵筋콘크리트構造로서 一體式으로 되어 있는 構造에서는 그 節點은 完全한 rigid connection으로 생각할 수 있다. rivet나 bolt connection으로 그 節點을 이루는 鐵筋構造같은 것은 pin connection도 아니고 그렇다고 完全한 rigid connection도 아닌 것이다. 節點에 welding을 使用한 鐵骨構造는 rigid connection으로 볼 수 있을 것이다. rivet connection으로된 鐵骨構造에서 girder와 column을 “moment resistant connection”으로 設計하였다 하더라도 完全剛接合의 70%, 80% 或은 90%의 效果를 거두울뿐 決코 100%의 剛接合을 이루지 못할 것이다. 그렇고 實際에 있어서는 이 部分剛接合으로 利益이 될수도 있고 損될 수도 있다. 그런데 實際에 있어서 節點을 完全剛接合으로 假定하고 應力を 算出하였다 하더라도 그 誤差는 僅少할지 모르나 적어도 合理的은 아닐 것이며 誤差가 存在

\*技術士(建設部門)

서울大學校 工科大學 建築工學科 教授

한다는 것은 認定해야 할 것이다. 그러면 이 部分剛接合의 程度는 如何히하여 언어될 것인가? 이것은 그 接合狀態의 構造를 實驗하므로써 알 수 있다. 이 論文에서는 節點의 部分剛接合의 程度를 假定하여 部分剛接合의 節點을 갖는 架構의 휨모멘트를 求하는 法을 理論적으로 誘導하고 數值問題를 例示하여 節點이 完全剛接合일 경우와 比較하고자 한다.

## 2. 部分剛接合의 定義와 意義

이제 column은 그 節點이 完全剛接合으로 通하였다하고 그 column에 部分剛接合으로 girder가 붙은 架構를 생각하자. 그렇듯 girder 節點의 column에 對한 部分剛接合의 程度를 girder의 材端에 있어서의 部分固定度  $f$ 로 부르기로하고 다음 fig 2.1에서  $A, B$ 를 girder라하고  $A$  및  $B$ 는 各各 column에 部分剛으로 接合되어 있다 하자. 또  $f_{AB}$ 를 girder  $AB$ 의  $A$ 端에 있어서의 column에 對한 部分固定度  $f_{BA}$ 를 girder  $AB$ 의  $B$ 端에 있어서의 column에 對한 部分固定度라 한다. 또 部分固定度を Fig 2.1에 表示한 記號로 한다.



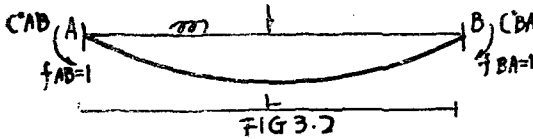
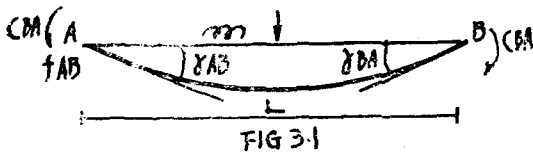
FIG 2-1

그러하고 部分固定度(degree of fixity, fixation factor)  $f_{AB}$ 를 다음과 같이 定義한다. 같은 girder  $A, B$ 가 兩端 完全固定일 때의 荷重에 依한  $A$  및  $B$ 端에 있어서의 固定端 모멘트를 各各  $C_{AB}^{\circ}$  및  $C_{BA}^{\circ}$ 라 한다.

$B$ 端이 完全固定이고  $A$ 端이 部分固定度  $f_{AB}$

를 갖는 部分固定端보에 있어서 A 端의 部分固定 度 모멘트는  $f_{AB} C_{AB}^{\circ}$ 이다. 이렇듯  $f_{AB}=0$  일 때는 hinge end가 되고  $f_{AB}=1$  일 때는 fixed end가 되며  $f$ 는 恒常 0와 1 사이에 있는 값이 된다.  $f_{BA}$ 에 關係서도 마찬가지로 定義된다. 이 定義에 따르면  $f_{AB}$ 를 갖는 部分固定端보에 있어서 A 端의 回轉角은 如何히 될까 하면 B 端이 fixed 이고 A 端이 hinge 인 보에 있어서 같은 荷重에 依한 A 端의 回轉角의  $(1-f_{AB})$ 배가 된다. 그러면 이때에 B 端의 固定端 모멘트는 如何할까? 또  $f_{AB}$ 와  $f_{BA}$ 를 갖는 部分固定端보에 있어서 部分固定端 모멘트와 材端回轉角은 各各 如何히 될 것인가를 다음에 誘導하기로 한다.

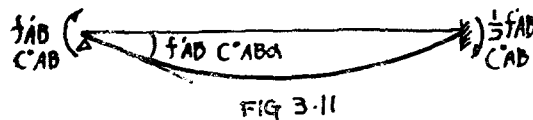
### 3. 材端回轉角과 部分固定端모멘트



#### 3.1 部材 中間에 荷重이 作用할 때

Fig 3.1에 表示한 兩端部分 固定인 보 AB에서  $f_{AB}$  및  $f_{BA}$ 를 各各 A 및 B 端의 部分 固定度라 한다.

다음에 이 보에서 주어진 荷重에 依한 材端 A 및 B 端의 材端回轉角을 各各  $\gamma_{AB}$  및  $\gamma_{BA}$ 라 하고 또 部分 固定端 모멘트를 各各  $C_{AB}$  및  $C_{BA}$ 라 하자. Fig 3.2에서 같은 보가 兩端完全 固定일 때 A 및 B 端에서의 固定端모멘트를 各各  $C_{AB}^{\circ}$  및



$C_{BA}^{\circ}$ 라 하면  $\gamma_{AB}$  및  $\gamma_{BA}$ 와  $C_{AB}$  및  $C_{BA}$ 는 다음과 같이 생각하여 구할 수 있다.

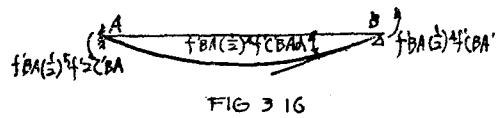
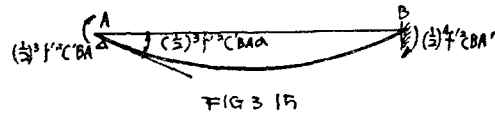
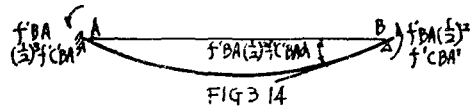
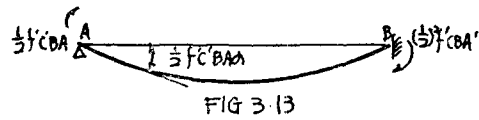
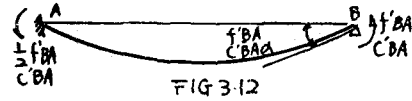
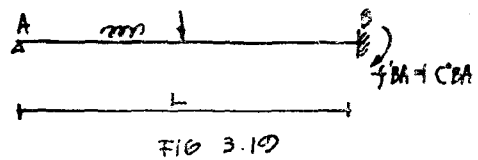


Fig 3.1에서 B 端을 完全 固定으로 假定하면 A 端의 部分 固定端 모멘트는 部分 固定度의 定義로부터  $f_{AB} C_{AB}^{\circ}$ 가 되는데 이것은 다음 Fig 3.19와 Fig 3.11의 두 境遇를 重疊한 것으로 생각할 수 있다.



即 A 端에 있어서는

$$C_{AB}^{\circ} - C_{r f_{AB}} C_{AB}^{\circ} = f_{AB} C_{AB}^{\circ} \text{가 되고}$$

B 端에 있어서는

$$C_{BA}^{\circ} + \frac{1}{2}(1-f_{AB}) C_{AB}^{\circ} = C_{BA}^{\circ} + \frac{1}{2} f_{AB} C_{AB}^{\circ}$$

가 된다. 또 A 端의 材端回轉角은 時計針方向으로  $f_{AB}' C_{AB}^{\circ}$ 가 된다.

但, 여기서  $f_{AB}' = 1 - f_{AB}$

$$\alpha = \frac{L}{4EI}$$

$$C_{BA}^{\circ} + \frac{1}{2} f_{AB}' C_{AB}^{\circ} = C_{BA}'$$

로 놓았고  $E$ 는 보 材料의 young's modulus  $I$ 는 보 斷面의 二次모멘트 이다.

그러나 完全固定으로 假定한  $B$  端은 實際에 있어서는 部分固定度  $f_{BA}$  를 갖는 部分固定端이므로 이 影響을 考慮하지 않으면 안된다. Fig 3.11 에서  $A$  端部分固定度の 影響을 考慮한 것과 같은 原理로 Fig 3.12 에서  $A$  端을 完全固定  $B$  端을 鉞端으로 假定하고  $B$  端에  $C_{BA}'$  와 反對方向으로 即 反對時針方向으로  $f_{BA}' C_{BA}'$  의 모멘트를 作用시키면 될 것이고 그렇게 하면  $B$  端의 回轉角은 反時針方向으로  $f_{BA}' C_{BA}' \alpha$  가 되고  $A$  端의 모멘트는 反時針方向으로  $\frac{1}{2} f_{BA}' C_{BA}'$  가 된다. 여기서  $f_{BA}' = 1 - f_{BA}$  로 놓았다.

그러나  $A$  端은 完全固定이 아니므로 다시  $A$  端의 部分固定度の 影響을 考慮하여 Fig 3.13 에 表示된 것과 같이  $B$  端을 또 完全固定으로 設定하고  $A$  端에 時計針方向으로 모멘트  $\frac{1}{2} f' C_{BA}'$  를 加하면 이때에  $A$  端의 回轉角과  $B$  端의 모멘트는 Fig 3.13 에 表示된 바와 같이

$$\text{各 } \frac{1}{2} f' C_{BA}' \alpha \text{ 및 } \left(\frac{1}{2}\right)^2 f' C_{BA}' \text{ 가 된다.}$$

但 여기서

$$f' = f_{AB}' f_{BA}' = (1 - f_{AB}) (1 - f_{AB})$$

로 놓았다. 다음에 다시  $B$  端의 部分固定度の 影響을 考慮하면 Fig 3.14 에 表示된 것과 같이 材端모멘트와 材端回轉角을 얻는다. 이와 같은 操作을 無限히 반복하면 Fig 3.15 Fig 3.16 에 表示한 것과 같고, 따라서 Fig 3.1 의 境遇의 材端모멘트  $C_{AB}$ ,  $C_{BA}$  및 材端回轉角  $\alpha_{AB}$  및  $\alpha_{BA}$  는 以上各境遇의 材端모멘트의 總和 및 材端回轉角의 總和를 求하므로 얻어진다.

### (A) 材端回轉角

$$\begin{aligned} \alpha_{AB} &= f_{AB}' C_{AB}^{\circ} \alpha + \frac{1}{2} f' C_{BA}' \alpha + \left(\frac{1}{2}\right)^3 f^{12} C_{BA}' \\ &+ \left(\frac{1}{2}\right)^5 f^{13} C_{BA}' \alpha + \left(\frac{1}{2}\right)^7 f^{14} C_{BA}' 2 + \dots \\ &= f_{AB}' C_{AB}^{\circ} \alpha + \frac{1}{2} f' C_{BA}' \alpha \left( H - \frac{f^1}{2^2} + \right. \end{aligned}$$

$$\left. \frac{f^{12}}{2^4} + \frac{f^{13}}{2^6} + \frac{f^{14}}{2^8} + \dots + \frac{f^{1(n-1)}}{2^{2(n-1)}} + \dots \right)$$

그런데

$$S = 1 + \frac{f^1}{2^2} + \frac{f^{12}}{2^4} + \frac{f^{13}}{2^6} + \frac{f^{14}}{2^8} + \dots + \frac{f^{1(n+1)}}{2^{2(n-1)}} \text{로 놓으면}$$

$$\frac{f^1}{2^2} S = \frac{f^1}{2^2} + \frac{f^{12}}{2^4} + \frac{f^{13}}{2^6} + \frac{f^{14}}{2^8} + \dots + \frac{f^{13}}{2^{2n}}$$

위 두 式을 各邊에서 減하면

$$\therefore S \left( 1 - \frac{f^1}{2^2} \right) = 1 - \frac{f^{13}}{2^{2n}}$$

$$S = \frac{4}{4 - f^1} \left\{ 1 - \left( \frac{f^1}{4} \right)^n \right\}$$

그런데  $\frac{f^1}{4} < 1$  이므로  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{f^1}{4} \right)^n = 0$

$$\therefore S = \frac{4}{4 - f^1}$$

$$\therefore \gamma_{AB} = f_{AB}' C_{AB}^{\circ} \alpha + \frac{1}{2} f' C_{BA}' \alpha \frac{4}{4 - f^1}$$

$$= f_{AB}' C_{AB}^{\circ} \alpha + f_{AB}' f_{BA}' C_{BA}' \alpha$$

$$\cdot \frac{2}{4 - f^1}$$

$$= f_{AB}' \alpha \left( C_{AB}^{\circ} + f_{BA}' C_{BA}' \frac{2}{4 - f^1} \right)$$

$$C_{BA}' = C_{BA}^{\circ} + \frac{1}{2} f_{AB}' C_{AB}^{\circ},$$

$$\alpha = \frac{L}{4EI} \text{ 를 代入하면}$$

$$\gamma_{AB} = f_{AB}' \frac{L}{4EI} \left\{ C_{AB}^{\circ} + f_{BA}' \left( C_{BA}^{\circ} + \frac{1}{2} \cdot f_{AB}' C_{AB}^{\circ} \right) \frac{2}{4 - f} \right\}$$

$$= f_{AB}' \frac{L}{4EI} \left\{ \left( 1 + \frac{f_{AB}'}{4 - f} - \frac{f_{AB}' f_{BA}'}{4 - f} \right) \right.$$

$$\cdot C_{AB}^{\circ} + \left( \frac{2}{4 - f} - \frac{2 f_{BA}'}{4 - f} \right) C_{BA}^{\circ} \left. \right\}$$

$$= \frac{f_{AB}'}{4 - f} \frac{L}{EI} \left\{ C_{AB}^{\circ} + \frac{1}{2} (1 - f_{BA}') C_{BA}^{\circ} \right\}$$

$$= \frac{1 - f_{AB}}{3 + f_{AB} + f_{BA} - f_{AB} f_{BA}} \frac{L}{EI}$$

$$\cdot \left\{ C_{AB}^{\circ} + \frac{1}{2} (1 - f_{BA}') C_{BA}^{\circ} \right\}$$

$$\gamma_{BA} = f_{BA}' C_{BA}' \alpha + f_{BA}' \left( \frac{1}{2} \right)^2 f' C_{BA}' \alpha + f_{BA}'$$

$$\cdot \left( \frac{1}{2} \right)^4 f^{12} C_{BA}' + f_{BA}' \left( \frac{1}{2} \right)^6 f^{13} C_{BA}' \alpha + \dots$$

$$= f_{BA}' C_{BA}' \alpha \left( 1 + \frac{f^1}{2^2} + \frac{f^{12}}{2^4} + \frac{f^{13}}{2^6} + \frac{f^{14}}{2^8} + \dots \right)$$

$$= f_{BA}' C_{BA}' \alpha \frac{4}{4-f'}$$

$C_{BA}'$ 와  $\alpha$ 의 값을 代入하면

$$\gamma_{AB} = \frac{f_{BA}' L}{4-f'} \frac{L}{EI} \left\{ C_{BA}^\circ + \frac{1}{2}(1-f_{AB}) C_{AB}^\circ \right\}$$

$$= \frac{1-f_{BA}}{3+f_{AB}+f_{BA} f_{AB} f_{BA}} \frac{L}{EI} \left\{ C_{BA}^\circ + \frac{1}{2}(1-f_{AB}) C_{AB}^\circ \right\}$$

(B) 材端모멘트

$$C_{AB} = C_{AB}^\circ - f_{AB}' C_{AB}^\circ + \frac{1}{2} f_{BA}' C_{BA}'$$

$$- \frac{1}{2} f' C_{BA}' + f_{BA}' \left( \frac{1}{2} \right)^3 f' C_{BA}'$$

$$- \left( \frac{1}{2} \right)^3 f^{12} C_{BA}' + f_{BA}' \left( \frac{1}{2} \right)^5 f^{12} C_{BA}'$$

$$- \left( \frac{1}{2} \right)^5 f^{13} C_{BA}' + f_{BA}' \left( \frac{1}{2} \right)^7 f^{13} C_{BA}'$$

$$- \left( \frac{1}{2} \right)^7 f^{14} C_{BA}' + f_{BA}' \left( \frac{1}{2} \right)^9 f^{14} C_{BA}'$$

$$\dots \dots \dots$$

$$= C_{AB}^\circ - f_{AB}' C_{AB}^\circ - \frac{1}{2} f' C_{BA}' \left( 1 + \frac{f'}{2^2} + \frac{f^{12}}{2^4} + \frac{f^{13}}{2^6} + \dots \right) + \frac{1}{2} f_{BA}' C_{BA}' \left( 1 + \frac{f'}{2^2} + \frac{f^{12}}{2^4} + \frac{f^{13}}{2^6} + \dots \right)$$

$$= C_{AB}^\circ - f_{AB}' C_{AB}^\circ - \frac{1}{2} f' C_{BA}' \frac{4}{4-f'}$$

$$+ \frac{1}{2} f_{BA}' C_{BA}' \frac{4}{4-f'}$$

$$= f_{AB} C_{AB}^\circ + \frac{1}{2} f_{BA}' C_{BA}' \frac{4}{4-f'} (1-f_{AB})$$

$$= f_{AB} C_{BA}^\circ + \frac{2}{4-f'} f_{BA}' f_{AB} C_{AB}^\circ$$

$C_{BA}^\circ = C_{BA}^\circ + \frac{1}{2} f_{AB}' C_{AB}^\circ$ 를 代入하면

$$C_{AB} = f_{AB}' C_{AB}^\circ + \frac{2}{4-f'} f_{BA}' f_{AB} \left( C_{BA}^\circ + \frac{1}{2} f_{AB}' C_{AB}^\circ \right)$$

$$= \frac{4f_{AB}}{4-f'} \left\{ C_{AB}^\circ + \frac{1}{2}(1-f_{BA}) C_{BA}^\circ \right\}$$

$$= \frac{4f_{AB}}{3+f_{AB}+f_{BA}-f_{AB}f_{BA}} \left\{ C_{AB}^\circ + \frac{1}{2}(1-f_{BA}) C_{BA}^\circ \right\}$$

$$C_{BA} = C_{BA}^\circ + \frac{1}{2} f_{AB}' C_{AB}^\circ - f_{BA}' C_{BA}'$$

$$+ \left( \frac{1}{2} \right)^2 f' C_{BA}'$$

$$- f_{BA}' \left( \frac{1}{2} \right)^2 f' C_{BA}' + \left( \frac{1}{2} \right)^4 f^{12} C_{BA}'$$

$$- f_{BA}' \left( \frac{1}{2} \right)^4 f^{12} C_{BA}' + \left( \frac{1}{2} \right)^6 f^{13} C_{BA}'$$

$$- f_{BA}' \left( \frac{1}{2} \right)^6 f^{13} C_{BA}' + \left( \frac{1}{2} \right)^8 f^{14} C_{BA}'$$

$$\dots \dots \dots$$

$$= C_{BA}^\circ + \frac{1}{2} f_{AB}' C_{AB}^\circ - f_{BA}' \left( 1 + \frac{f'}{2^2} + \frac{f^{12}}{2^4} + \frac{f^{13}}{2^6} + \dots \right) + \left( \frac{1}{2} \right)^2 f' C_{BA}' \left( 1 + \frac{f'}{2^2} + \frac{f^{12}}{2^4} + \frac{f^{13}}{2^6} + \dots \right)$$

$$= C_{BA}^\circ + \frac{1}{2} f_{AB}' C_{AB}^\circ - f_{BA}' C_{BA}' \frac{4}{4-f'}$$

$$\cdot \left( 1 - \frac{f_{AB}'}{4} \right)$$

$C_{BA}' = C_{BA}^\circ + \frac{1}{2} f_{AB}' C_{AB}^\circ$ 를 代入하면

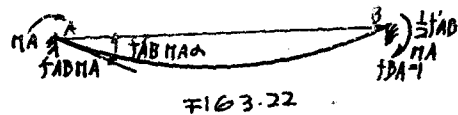
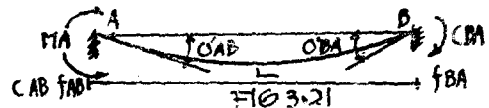
$$C_{BA} = C_{BA}^\circ + \frac{1}{2} f_{AB}' C_{AB}^\circ - f_{BA}' \left( C_{BA}^\circ + \frac{1}{2} f_{AB}' C_{AB}^\circ \right) \frac{4}{4-f'} \frac{4-f_{AB}'}{4}$$

$$= \frac{1}{2} f_{AB}' \left( 1 - \frac{4-f_{AB}'}{4-f'} f_{BA}' \right) C_{AB}^\circ$$

$$+ \left( 1 - \frac{4-f_{AB}'}{4-f'} f_{BA}' \right) C_{BA}^\circ$$

$$= \frac{4f_{BA}}{4-f'} \left\{ C_{BA}^\circ + \frac{1}{2}(1-f_{AB}) C_{AB}^\circ \right\}$$

3. 材端에 모멘트가 作用할 때



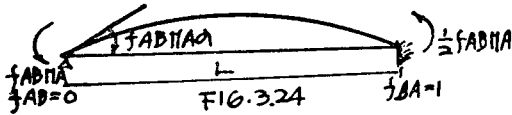
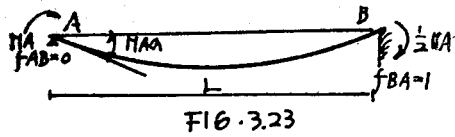


Fig 3.21 에서 兩端의 部分固定度가  $f_{AB}$  및  $f_{BA}$  인 보 AB의 A 端에 모멘트  $M_A$  가 作用하였다 하고 이때에 兩端 AB 에 있어서의 材端回轉角  $O_{AB}'$ ,  $O_{BA}'$  와 部分固定端모멘트  $C_{AB}$ ,  $C_{BA}$  를 求하고자 한다.

우선 Fig 3.22 에 表示된 것과 같이 같은 보 AB의 A 端이 部分固定度  $f_{AB}$  를 갖는 部分固定端이고 B 端이 完全固定인 보 AB 를 생각하고 A 端에 모멘트  $M_A$  가 作用하였다 하면 이것을 Fig 3.23 과 Fig 3.24 의 두 경우를 重疊한 것으로 생각할 수가 있다.

즉 A 端에 있어서의 回轉角은

$$M_A \alpha f_{AB} M_A \alpha = (1 - f_{AB}) M_A \alpha = f_{AB}' M_A \alpha$$

A 端에 있어서의 固定端모멘트는 部分固定度의 定義로부터  $f_{AB} M_A$  일 것이나 또 이것은 Fig 3.22 와 Fig 3.23 을 重疊하여 얻어질 수도 있다.

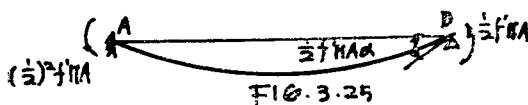
그리고 B 端의 固定端모멘트는

$$\frac{1}{2} M_A \frac{1}{2} f_{AB} M_A = (1 - f_{AB}) \frac{1}{2} M_A = \frac{1}{2} f_{AB}' M_A$$

이다.

그러나 (3.1) 에 取扱한 것과 같은 原理로 完全固定으로 假定한 B 端은 部分固定度  $f_{BA}$  를 갖는 部分固定端으므로 다음 Fig 3.25 에 表示한 것과 같이 B 端을 A 鉸端, A 端을 完全固定으로 생각하고 B 端에 Fig 3.22 에서 얻어진 B 端의 固定端 모멘트

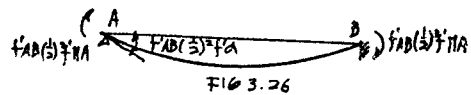
즉  $\frac{1}{2} f_{AB}' M_A$  와 反對方向으로  $f_{BA}' \frac{1}{2} f_{AB}' M_A = \frac{1}{2} f_{BA} f_{AB}' M_A$  를 作用시켜서 B 端의 部分固定度の



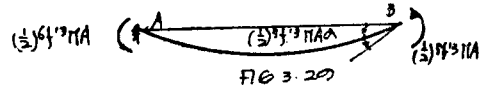
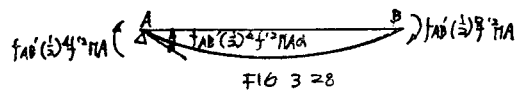
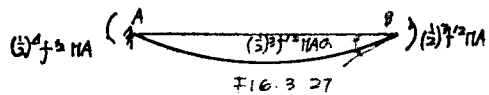
여향을 고려하지 않으면 안된다.

그리하여 이 때의 固定端 모멘트  $(\frac{1}{2})^2 f_{BA} f_{AB}' M_A$  와 B 端의 回轉角  $\frac{1}{2} f_{BA} \alpha$  를 얻는다.

다시 完全固定으로 假定한 A 端의 A 部分固定度の 영향을 고려하여 A 端을 鉸端, B 端을 完全固定으로 가정하고 A 端에 時針方向의 모멘트  $f_{AB}' (\frac{1}{2})^2 f_{BA} M_A$  를 作用시키면 다음 Fig 3.26 과 같이 되고 A 端의 回轉角  $f_{AB}' (\frac{1}{2})^2 f_{BA} \alpha$  와 B 端의 固定端 모멘트  $f_{AB}' (\frac{1}{2})^3 f_{BA} f_{AB}' M_A$  를 얻는다.



以下 같은 操作을 無限히 反覆하면 Fig 3.27 以下에 表示된 바와 같이 A 端 및 B 端에서의 回轉角  $O_{AB}'$  및  $O_{BA}'$  와 部分固定端 모멘트  $C_{AB}$  는 Fig 3.22 및 Fig 3.25 以下の 各 경우를 重疊함으로써 얻어진다.



(A) 材端回轉角

$$O_{AB}' = f_{AB}' M_A \alpha + f_{AB}' \left(\frac{1}{2}\right)^2 f_{BA} f_{AB}' M_A \alpha + f_{AB}' \left(\frac{1}{2}\right)^4 f_{BA}^2 f_{AB}' M_A \alpha + \dots$$

$$= f_{AB}' M_A \alpha \left( 1 + \frac{f_{BA}^2}{2^2} + \frac{f_{BA}^4}{2^4} + \frac{f_{BA}^6}{2^6} + \dots + \frac{f_{BA}^{n-2}}{2^{n-2}} + \dots \right)$$

$$\begin{aligned}
&= f_{AB}' M_A \alpha \frac{4}{4-f'} \\
&= \frac{f_{AB}'}{4-f'} \frac{L}{EI} M_A \\
&= \frac{1-f_{AB}}{3+f_{AB}+f_{BA}-f_{AB}f_{BA}} \frac{L}{EI} M_A \\
O_{BA}' &= \frac{1}{2} f' M_A \alpha + \frac{f^{12}}{2^3} M_A \alpha + \frac{f^{13}}{2^5} M_A \alpha \\
&\quad + \frac{f^{14}}{2^7} M_A \alpha + \dots \\
&= \frac{1}{2} f' M_A \alpha \left( 1 + \frac{f'}{2^2} + \frac{f^{12}}{2^4} + \frac{f^{13}}{2^6} + \dots \right) \\
&= \frac{1}{2} f' M_A \alpha \frac{4}{4-f'} \\
&= \frac{1}{2} \cdot \frac{f'}{4-f'} \frac{L}{EI} M_A \\
&= \frac{1}{2} \cdot \frac{(1-f_{AB})(1-f_{BA})}{3+f_{AB}+f_{BA}-f_{AB}f_{BA}} \frac{L}{EI} M_A \\
&= \frac{f_{BA}'}{2} (O_{AB}')
\end{aligned}$$

(B) 材端모멘트

$$\begin{aligned}
C_{AB} &= f_{AB} M_A + \left(\frac{1}{2}\right)^2 f' M_A - f_{AB}' \left(\frac{1}{2}\right)^2 f' M_A \\
&\quad + \left(\frac{1}{2}\right)^4 f^{12} M_A - f_{AB}' \left(\frac{1}{2}\right)^4 f^{12} M_A \\
&\quad + \left(\frac{1}{2}\right)^6 f^{13} M_A - f_{AB}' \left(\frac{1}{2}\right)^6 f^{13} M_A \\
&\quad + \dots \\
&= f_{AB}' M_A + \frac{f'}{2^2} M_A \left( 1 + \frac{f'}{2^2} + \frac{f^{12}}{2^4} \right. \\
&\quad \left. + \frac{f^{13}}{2^6} + \dots \right) - f_{AB}' \frac{f'}{2^2} M_A \left( 1 + \frac{f'}{2^2} \right. \\
&\quad \left. + \frac{f^{12}}{2^4} + \frac{f^{13}}{2^6} + \dots \right) \\
&= f_{AB} M_A + \frac{f'}{4} M_A \frac{4}{4-f'} \\
&\quad - f_{AB}' \frac{f'}{4} M_A \frac{4}{4-f'} \\
&= f_{AB} M_A + \frac{f'}{4-f'} M_A (1-f_{AB}') \\
&= f_{AB} M_A \left( 1 + \frac{f'}{4-f'} \right) \\
&= \frac{4f_{AB}}{4-f'} M_A \\
&= \frac{4f_{AB}}{3+f_{AB}+f_{BA}-f_{AB}f_{BA}} M_A \\
C_{BA} &= \frac{1}{2} f_{AB}' M_A - \frac{1}{2} f' M_A + f_{AB}' \left(\frac{1}{2}\right)^3 f' M_A
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \left(\frac{1}{2}\right)^3 f^{13} M_A + f_{AB}' \left(\frac{1}{2}\right)^5 f^{12} M_A \\
& - \left(\frac{1}{2}\right)^5 f^{13} M_A + f_{AB}' \left(\frac{1}{2}\right)^7 f^{13} M_A \\
& \dots + \dots \\
&= \frac{1}{2} f_{AB}' M_A \left( 1 + \frac{f'}{2^2} + \frac{f^{12}}{2^4} + \frac{f^{13}}{2^6} + \dots \right) \\
&\quad - \frac{1}{2} f' M_A \left( 1 + \frac{f'}{2^2} + \frac{f^{12}}{2^4} + \frac{f^{13}}{2^6} + \dots \right) \\
&= \frac{1}{2} f_{AB}' M_A \frac{4}{4-f'} - \frac{1}{2} f_{AB}' f_{BA}' M_A \frac{4}{4-f'} \\
&= \frac{1}{2} f_{AB}' M_A \frac{4}{4-f'} (1-f_{BA}') \\
&= \frac{2f_{AB}'}{4-f'} M_A f_{BA} \\
&= -\frac{2f_{BA} (1-f_{AB})}{4-f'} M_A \\
&= -\frac{2f_{BA} (1-f_{AB})}{3+f_{AB}+f_{BA}-f_{AB}f_{BA}} M_A
\end{aligned}$$

같은 방법으로 B 端에 모멘트  $M_B$  가作用하였을 때에 A 端 및 B 端의回轉角  $O_{AB}''$  및  $O_{BA}''$  와 材端의部分固定端 모멘트를求하면 다음과 같이 될을容易하게 알 수 있다.

$$\begin{aligned}
O_{AB}'' &= \frac{1}{2} \frac{f'}{4-f'} \frac{L}{EI} M_B \\
&= \frac{1}{2} \frac{(1-f_{AB})(1-f_{BA})}{3+f_{AB}+f_{BA}-f_{AB}f_{BA}} \frac{L}{EI} M_B \\
O_{BA}'' &= \frac{f_{BA}'}{4-f'} \frac{L}{EI} M_B \\
&= \frac{(1-f_{BA})}{3+f_{AB}+f_{BA}-f_{AB}f_{BA}} \frac{L}{EI} M_B \\
C_{AB} &= \frac{2f_{AB}f_{BA}'}{4-f'} M_B \\
&= \frac{2f_{AB} (1-f_{BA})}{3+f_{AB}+f_{BA}-f_{AB}f_{BA}} M_B \\
C_{BA} &= \frac{4f_{BA}}{4-f'} M_B \\
&= \frac{4f_{BA}}{3+f_{AB}+f_{BA}-f_{AB}f_{BA}} M_B
\end{aligned}$$

다음에 A 端 및 B 端에 時計針方向으로  $M_A$  및  $M_B$  가 各各 同時에 作用하였다 하고 材端의回轉角을 各各  $O_{AB}$  및  $O_{BA}$  라 하면

$$\begin{aligned}
O_{AB} &= O_{AB}'' - O_{AB}'' \\
&= \frac{f_{AB}'}{4-f'} \frac{L}{EI} M_A - \frac{f'}{2(4-f')} \frac{L}{EI} M_B \\
&= \frac{f_{AB}'}{4-f'} \frac{L}{EI} \left( M_A - \frac{1}{2} f_{BA}' M_B \right) \\
&= \frac{1-f_{AB}}{3+f_{AB}+f_{BA}-f_{AB}f_{BA}} \frac{L}{EI} \left\{ M_A
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
O_{BA} &= O_{BA}' - O_{BA}'' \\
&= \frac{f'}{2(4-f')} \frac{L}{EI} M_A - \frac{f_{BA}'}{4-f'} \frac{L}{EI} M_B \\
&= \frac{f_{BA}'}{4-f'} \frac{L}{EI} \left( M_B - \frac{1}{2} f_{AB}' M_A \right) \\
&= \frac{1-f_{BA}}{3+f_{AB}+f_{BA}-f_{AB}f_{BA}} \frac{L}{EI} \left\{ M_B - \frac{1}{2}(1-f_{AB}) M_A \right\}
\end{aligned}$$

또 이境遇에 A端 및 B端에 있어서의 部分 固定端모멘트를 求하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
C_{AB} &= \frac{4f_{AB}}{4-f'} M_A - \frac{2f_{AB}f_{BA}'}{4-f'} M_B \\
&= \frac{4f_{AB}}{4-f'} \left( M_A - \frac{1}{2} f_{BA}' M_B \right) \\
&= \frac{4f_{AB}}{3+f_{AB}+f_{BA}-f_{AB}f_{BA}} \left\{ M_A - \frac{1}{2}(1-f_{BA}) M_B \right\} \\
C_{BA} &= \frac{2f_{BA}f_{AB}'}{4-f'} M_A - \frac{4f_{BA}}{4-f'} M_B \\
&= \frac{4f_{BA}}{4-f'} \left( \frac{1}{2} f_{AB}' M_A - M_B \right) \\
&= (-) \frac{4f_{BA}}{3+f_{AB}+f_{BA}-f_{AB}f_{BA}} \left\{ M_B - \frac{1}{2}(1-f_{AB}) M_A \right\}
\end{aligned}$$

#### 4. 節點回轉角과 部分剛 接合端 回轉角의 關係

鐵骨架構에서 기둥에 보가 部分剛 接合으로 接合되어 있다 하고 그 節點에서 기둥이 O 라는 回轉角을 일으켰을 境遇 部分剛으로 接合되어 있는 보의 材端回轉角은 如何히 될것인가. 即 보의 材端回轉角과 O 와의 關係를 求하여 보기로 한다.

다음 그림 4.1에서 기둥 CD와 기둥 EF에 보 AB가 部分剛으로 接合되어 있다하고 A 및 B에서의 部分固定도를 各各  $f_{AB}$   $f_{BA}$ 라 한다.

기둥 CD가 節點 A에서 時計針方向으로 O 라는 回轉角을 일으켰다 하고 보 AB가 節點 A에서 일으킨 回轉角  $O_{AB}'$ 와 節點 B에서 일으킨 回轉角  $O_{BA}'$ 를 求하고자 한다.

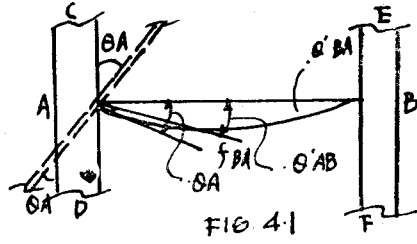


FIG 4-1

우선 다음에 Fig 4.2 表示된 바와 같이 보 AB가 A에서 部分固定度  $f_{AB}$ 를 갖는 部分剛接合端이고 B에서는 完全剛接合端이라 假定하자.

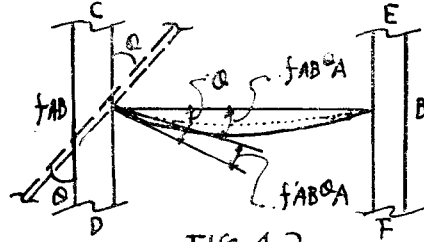


FIG 4-2

이때 節點 A에서 기둥 CD가 時計針方向으로  $O_A$  라는 回轉角을 일으키고 B點에서는 기둥 EF가 回轉을 일으키지 않았다 하면 보 AB는 A에서  $f_{AB} O_A$  라는 回轉角을 일으키게 된다.

이때에 보 AB에서 A端에 作用하였다고 생각할 수 있는 모멘트는 다음 Fig 4.3에 表示된 대로  $\frac{4EI}{L} O_A - \frac{4EI}{L} f_{AB}' O_A = f_{AB} \frac{4EI}{L} O_A = f_{AB} m O_A$ 가 되고 B端에 일으킨 固定端모멘트는

$\frac{2EI}{L} O_A - \frac{2EI}{L} f_{AB}' O_A = \frac{2EI}{L} f_{AB} O_A = \frac{1}{2} m f_{AB} O_A$ 가 될 것이다.

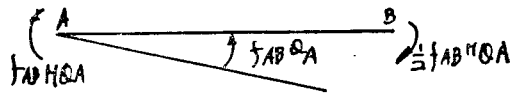


FIG 4-3

단, 여기서

$$\frac{4EI}{L} = m$$

로 놓았고

$L$  = 보의 span length

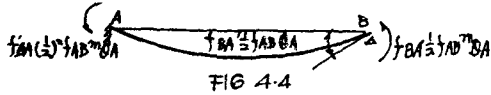
$I$  = 보 斷面의 2次 모멘트

$E$  = 보 材料의 young's modulus

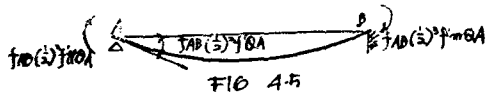
이다.

그런데 實際에 있어서는 보 AB는 B端에서

完全 剛接分이 아니고 部分固定度  $f_{BA}$  를 갖는 部分 剛接合端이므로 이 影響을 考慮하여 fig 4.4 에 表示한 바와 같이 A 端을 固定으로 假定하고 B 端에 反時計針方向으로  $f_{BA}' \frac{1}{2} f_{AB} MO_A$  의 모멘트를 作用시켜 주어야 될 것이다. 이 때에 B 端의 回轉角은  $f_{BA}' \frac{1}{2} f_{AB} O$  가 되며 A 端의 固定端 모멘트는  $f_{BA}' \left(\frac{1}{2}\right)^2 f_{AB} MO_A$  가 될 것이다.



다음에 完全 固定으로 假定한 A 端의 部分剛接合의 影響을 考慮하여 그림에 表示하면 Fig 4.5 와 같다.



이와 같이 하여 B 端, A 端의 部分剛接合의 影響을 交代로 考慮하여 이 操作을 無限히 繼續하고 A 端 및 B 端의 回轉角과 固定端 모멘트를 總和하면  $O_{AB}'$  및  $O_{BA}'$  와 部分剛接合端 AB 의 A 및 B 端의 固定端 모멘트를 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned}
 O_{AB}' &= f_{AB} O_A \left( 1 + \frac{f'}{2^2} + \frac{f'^2}{2^4} + \frac{f'^3}{2^6} + \dots \right) \\
 &= \frac{4f_{AB}}{4-f'} O_A \\
 &= \frac{4f_{AB}}{3+f_{AB}+f_{BA}-f_{AB}f_{BA}} O_A \\
 O_{BA}' &= f_{AB} O_A \left( \frac{1}{2} f_{BA}' + \frac{1}{2^3} f_{BA}' f' + \frac{1}{2^5} f_{BA}' f'^2 \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{2^7} f_{BA}' f'^3 + \dots \right) \\
 &= \frac{1}{2} f_{AB} f_{BA}' O_A \left( 1 + \frac{f'}{2^2} + \frac{f'^2}{2^4} + \frac{f'^3}{2^6} \dots \right) \\
 &= \frac{1}{2} f_{AB} f_{BA}' O_A \frac{4}{4-f'} \\
 &= \frac{2f_{AB} f_{BA}'}{4-f'} O_A \\
 &= \frac{2f_{AB} (1-f_{BA})}{3+f_{AB}+f_{BA}-f_{AB}f_{BA}} O_A
 \end{aligned}$$

A 및 B 端의 固定端 모멘트  $M_{AB}$  및  $M_{BA}$  를 求하면

$$M_{AB} = m f_{AB} O_A - \frac{1}{2^2} m f_{AB} O_A f_{BA}'$$

$$\begin{aligned}
 &+ \frac{1}{2^2} m f_{AB} O_A f' - \frac{1}{2^4} m f_{AB} O_A f'^2 f_{BA}' \\
 &+ \frac{1}{2^4} m f_{AB} O_A f'^2 - \frac{1}{2^6} m f_{AB} O_A f'^2 f_{BA}' \\
 &+ \frac{1}{2^6} m f_{AB} O_A f'^3 - \frac{1}{2^8} m f_{AB} O_A f'^3 f_{BA}' \\
 &+ \dots
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= m f_{AB} O_A \left( H \frac{f'}{2^2} + \frac{f'^2}{2^4} + \frac{f'^3}{2^6} \dots \right) \\
 &- m f_{AB} O_A f_{BA}' \left( \frac{1}{2} \right)^2 \left( 1 + \frac{f'}{2^2} + \frac{f'^2}{2^4} \right. \\
 &\quad \left. + \frac{f'^3}{2^6} \dots \right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{4}{4-f'} \left( m f_{AB} O_A - \frac{1}{4} m f_{AB} f_{BA}' O_A \right) \\
 &= \frac{f_{AB} m}{4-f'} (4-f_{BA}') O_A \\
 &= \frac{f_{AB} m}{4-f'} (3+f_{BA}) O_A \\
 &= \frac{4f_{AB} (3+f_{BA})}{3+f_{AB}+f_{BA}-f_{AB}f_{BA}} \frac{EI}{L} O_A
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 M_{BA} &= \frac{1}{2} m f_{AB} O_A - \frac{1}{2} m f_{AB} f_{BA}' O_A \\
 &+ \frac{1}{2^2} m f_{AB} O_A f' - \frac{1}{2^3} m f_{AB} f_{BA}' O_A f' \\
 &+ \frac{1}{2^5} m f_{AB} O_A f'^2 - \frac{1}{2^5} m f_{AB} f_{BA}' O_A f'^2 \\
 &+ \frac{1}{2^7} m f_{AB} O_A f'^3 - \frac{1}{2^7} m f_{AB} f_{BA}' \\
 &\quad \cdot O_A f'^3 + \dots \\
 &= \frac{1}{2} m f_{AB} O_A \left( 1 + \frac{f'}{2^2} + \frac{f'^2}{2^4} \right. \\
 &\quad \left. + \frac{f'^3}{2^6} + \dots \right) - \frac{1}{2} m f_{AB} f_{BA}' O_A \left( 1 \right. \\
 &\quad \left. + \frac{f'}{2^2} + \frac{f'^2}{2^4} + \frac{f'^3}{2^6} + \dots \right) \\
 &= \frac{1}{2} \frac{4}{4-f'} m f_{AB} O_A (1-f_{BA}') \\
 &= \frac{8f_{AB} f_{BA}}{4-f'} \frac{EI}{4} O_A \\
 &= \frac{2f_{AB} f_{BA}}{3+f_{AB}+f_{BA}-f_{AB}f_{BA}} \frac{EI}{L} O_A
 \end{aligned}$$

또  $M_{AB}$  및  $M_{BA}$  는 Slope-depletion method 의 基本公式

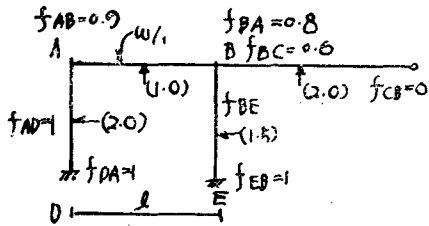
$$M_{AB} = \frac{2EI}{L} (2O_{AB}' + O_{BA}')$$



$$M_{BA} = -\frac{2EI}{L}(2O_{BA}' + O_{AB}')$$

에 위에서 求한  $O_{AB}'$  와  $O_{BA}'$  의 값을 代入하여 서도 求할 수 있다.

### 5. 例 題

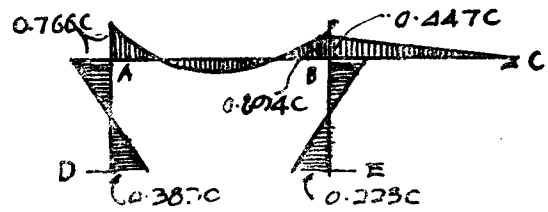


위 例題에서 部分剛接合度를

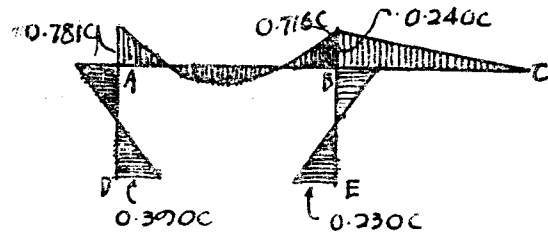
$$\begin{aligned} f_{DA} &= f_{EB} = 1 \\ f_{CB} &= 0 \\ f_{AD} &= f_{BE} = 1 \\ f_{AB} &= 0.9 \\ f_{BA} &= 0.8 \end{aligned}$$

$$f_{BC} = 0.6$$

各部材의 剛士  $I$  을 0 으로 表示한 것이라 하고 위에서 誘導한 公式에 依하여 이 架構를 Slope-deflection method 또는 moment distribution method 로 풀어서 B.M.D 를 그리면 다음과 같다.



다음은 各節點이 完全剛接合일 境遇의 B.M.D 을 그린 것이다.



1970年度

### 韓國技術士會任員名單

會 長	柳 鐘	理 事	金海琳	理 事	張建型
副會長	金熙喆	"	康明順	"	崔錫煥
"	林鳳鍵	"	金圭泰	"	韓萬春
常任理事	金慶植	"	金在瑾	"	許 垸
"	金仁圭	"	金瑢會		
"	廉道有	"	文宗洙		
"	李瑑根	"	李康鎬	監 事	朱寶淳
"	李獻卿	"	李昌九	"	盧 鴉 翼
"	鄭 昞 玟	"	陸 英 洙		