<論　說>

고등학교 수학과 학습에 대한 소고

金　興　基

Ⅰ. 서　론

수학교육의 현대화라는 세계적인 동향에 발맞추기 위한 우리나라의 수학교육은 그 교과 과정 구성 자체에도 많은 문제점이 있지만 대다수의 학생들이 어렵고 귀찮게만 생각하는 과목중인 하나가 수학이고 보면 수학 학습 지도에 대하여도 우선적으로 보다 활발한 연구가 필요한 것이다.

〔5〕 수학은 과학의 기초 학문으로 급진적으로 발달하는 과학에 인적 자원을 충당하기 위하여, 그리고 복잡한 사회에 보다 간결하고 보다 정확하고 합리적으로 올바르게 이해하고 적응할 수 있는 현대인의 교양과 자질을 향상시키기 위하여 필요 불가결한 학문인 것이다.

고로 이런 수학의 학습에는 모든 학생들이 흥미있게 참여하여 그들 각자 각자가 창의적 사고를 할 수 있고 추상적 차원에서 수학적 구조를 이해하여 훗날에는 선진국의 발달하는 과학의 모방만을 넘어서 우리나라가 스스로 발달할 수 있도록 근본적인 토대를 만들어 주어야만 할 것이다.

사실 학습지도 이론은 오랫동안 많이 연구되어 왔고 우리나라에도 물밀듯이 밀려 들어와 현장에서 판을 치고 있기는 하지만 과연 이렇게 무작정 받아들인 결과가 얼마만큼의 효과를 걷우었고 걷을 수 있을지는 의문스러운 일이다. 이곳에서도 학습이론 그 자체에 중점을 두어 논하려는 것이 아니고 수학 학습지도의 구조적인 면과 창의적인 면의 지도에 관하여 간단히 小考하려 하기 때문에 깊은 이론적 설명은 않겠지만 예를 들자면 한동안 우리나라에서 유행적으로 보급되었던 program 학습이 과연 수학에서 얼마만한 효과를 걷우었는지는 의문스러운 일이다.

왜냐 하면 수학의 내용에는 기계적인 면도 있지만 역시 중요한 것은 기계적인 면보다는 창의적 사고를 할 수 있고 추상적 차원에서 수학적 구조를 이해할 수 있는 능력을 기르게 하는 내용일텐데 이런 과목의 내용을 학습하는데 S—R 이론만을 전적으로 받아 들여 세분된 교과 내용의 정답을 유일한 것인양 학습시키고 강화하는 것은 여러 가지 풀이 방법이 있고 또 생길지도 모르는 수학 문제에서 문제가 되지 않을까 생각되기 때문이다.

그런데도 우리나라에 너무나 많이 보급되어 어떤 사람은 S—R 이론으로 모든 학습을 완성할 수 있다는 착각을 하고 있고, 또 현장에 무작정 보급시키려 하는데 이런 보급 보다는 극히 냉철한 비판을 하여 취사 선택하여만 되리라고 생각한다. 그래서 필자는 어떻게 하면 고등학교 수학에서 수학 학습의 구조적이고 학생들의 창의성을 키워줄 수 있는가 하는데 대해서 문제를 선택하여 보기를 들어 가면서 간단하게 小考하려는 것이다.

Ⅱ. 수학적 구조 학습

〔6〕 수학을 「구조의 과학」이라고 하는 인식이 점점 증가하고 연구되고 있는 것이 세계적인 조류인 데도 지금까지의 수학 교육은 대개 구조면의 중요성을 인식하지 못하고 습관의 타성으로 말미아마 수식의 말단적인 취급과 공식의 기엽적인 사용 방법 등에만 치중하여 단편적이고 기엽적 지식의 습득에만 급급한 나머지 수학이라는 거대한 건축물이 어떤 원리 밑에서 구성되어 가는가를 전체적으로 파악시켜 주지 못하였다.

이와 같은 잘못을 시정하기 위하여는 집합을 토대로 하여 기엽적인 기술보다는 수학의 원리 원칙을 엄밀한 논리 밑에서 어떻게 구성되어 가는가를 이해시켜야만 할 것이다.

그래서 이곳에서는 RONALD L. IMAN 〔1〕의 논문에서 인용하는 극히 작은 한 부분인 수열에서의 공식을 구하는 방법과 그들간에 관계 및 발

전에 대한 발견을 구조화하여 종래의 현행 우리나라 교과서에와 다른 방법으로 접근하려 한다.

어떤 구조와 체계를 세우며 수학적 귀납법의 사고 방식을 적용할 수 있는 학생들로서는 간단한 합의 연산으로만 계속되는 다음 공식들의 유도 과정에 만족할 것이며 보다 발전적인 사고력을 기를 수 있을 것이다.

즉 1부터 n까지의 자연수의 합을 구하는 과정과 그리고 그것에서 더 발전된 1부터 n까지의 각 항의 제곱의 합, 각 항의 세제곱의 합, 등등을 유도하는 다음에 전개시킬 방법은 종래 사용하던 방법보다는 보다 구조적이고 연결된 사고 과정을 부여하게 될 것이다.

우선 임의의 자연수 a부터 n까지의 합을 $S=\sum_{i=a}^{N} i$ 라고 하면

$$S=a+(a+1)+(a+2)+\cdots+(N-1)+N$$
$$S=N+(N-1)+(N-2)+\cdots+(a+1)+a$$

이 되고 두 식의 각 변을 각각 더하면

$$2S=(N+a)+(N+a)+(N+a)+\cdots+(N+a)+(N+a)=(N+a)(N-a+1)$$

이 되므로

$$S=\sum_{i=a}^{N} i=\frac{(N+a)(N-a+1)}{2} \text{ 이고}$$

이곳에서 $a=1$ 이라면

$$S=\sum_{i=1}^{N} i=1+2+\cdots+N=\frac{(N+1)N}{2}$$

다음에는 1부터 n까지 각 항의 제곱의 합을 위에 사용한 연산 과정을 이용하여 구해 본다.

$S=\sum_{i=1}^{N} i^2$ 라 하면

$$\begin{aligned} S&=1^2+2^2+3^2+4^2+\cdots\cdots\cdots\cdots+N^2\\ &=1+2+3+4+\cdots\cdots\cdots\cdots+N\\ &\quad+2+3+4+\cdots\cdots\cdots\cdots+N\\ &\quad\quad+3+4+\cdots\cdots\cdots\cdots+N\\ &\quad\quad\quad+4+\cdots\cdots\cdots\cdots+N\\ &\quad\quad\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ &\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad+N \end{aligned}$$

위와 같이 표시하면 i번째 있는 행의 각 숫자의 합은 i^2이고 위에서부터 j번째 있는 열의 각 항의 합은 앞에서 유도된 공식에 의해서 다음과 같이 됨을 알 수 있다.

$$j+(j+1)+(j+2)+\cdots+N$$
$$=\frac{(N+j)(N-j+1)}{2}$$
$$=\frac{1}{2}(N^2+N+j-j^2)$$

그래서 위의 열들을 전부 합하면

$$S=\sum_{j=1}^{N}\frac{1}{2}(N^2+N+j-j^2)$$
$$=\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N}N^2+\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N}N+\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N}j-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N}j^2$$
$$=\frac{1}{2}(N\cdot N^2)+\frac{1}{2}(N\cdot N)+\frac{1}{2}\,\frac{(N+1)N}{2}-\frac{1}{2}S$$

이 식을 정리하여 간단히 하면

$$S=\sum_{i=1}^{N}i^2=\frac{N(N+1)(2N+1)}{6}$$

이 된다.

위와 같은 방법의 과정은 다른 거듭 제곱에 대한 합을 구하는 데에 쉽게 확장할 수 있으며 서로의 관계도 훨씬 명백하여진다.

일반적으로 정수들의 k 제곱의 합에 대하여도 다음과 같이 3각형의 모양으로 쓸 수가 있으며 k에 자연수를 대입하여 확장시킬 수가 있는 것이다.

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{N} i^k&=1^k+2^k+3^k+\cdots+N^k\\ &=1^{k-1}+2^{k-1}+3^{k-1}+\cdots+N^{k-1}\\ &\quad+2^{k-1}+3^{k-1}+\cdots+N^{k-1}\\ &\quad\quad+3^{k-1}+\cdots+N^{k-1}\\ &\quad\quad\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\\ &\quad\quad\quad\quad+N^{k-1} \end{aligned}$$

위에서 $\sum_{i=1}^{N}i^{k-1}-\sum_{i=1}^{j-1}i^{k-1}$을 간단히 한 것이 j번째 열의 합이 될 것이다.

Ⅲ. 창의성을 높이기 위한 학습

성실한 수학 교사라면 그가 할 수 있는 한 수학적 지식에 넓고 깊은 경지에 달하여 훌륭한 수업을 하기 위해 각 반 수업에서 학생들에게 가르칠 세분된 교과 내용을 계획하며 이론적 근거를 참조하려고도 할 것이다.

그리고 학생들의 질문을 예기하며 학생들이 추측하고 탐구할 기회를 부여하기도 할 것이다. 하지만 불가피하게 학생들이 예기치 않았던 문제를 질문하여 그 해답이 즉각적으로 명백하지 않아 당황하게 하는 경우도 생기게 된다.

그래서 이곳에서는 ELAINE KIVY GENKINS 〔2〕의 논문을 인용하여 학생들의 질문을 토대로 창의성을 높이기 위한 학습에 대하여 논하려 한다.

학생들의 진지한 질문을 위해 계획된 수업 내용으로부터 떠나 그 질문을 연구하거나 학급 전체의 토론 대상으로 만드는 것은 흥미와 동기유발을 일으키며 동시에 창의성을 높여줄 수 있는 것이다.

왜냐하면, 이런 일로 가끔 학급에서 교사뿐만 아니라 학생들까지도 흥분하게 되는 순간이 되며 교사와 학생이 모두 그 문제의 해결을 하려고 하는 작업에서 증명이던 반증이던 간에 이로 인하여 수학이 창조적으로 학습될 수 있기 때문이다.

다음의 보기로 이런 관점의 예를 든다.

"등비수열의 초항과 제 2 항의 합이 -3이고 제 5 항과 제 6 항의 합이 $-\frac{3}{16}$이다. 초항부터 제 8 항까지 이 수열의 합을 구하라."

라는 문제가 제기되어 어느 학생이 옳은 답을 구했는데 그 학생이 구한 방법이 교사에게 즉각적으로 명백하지 않았으며 학생들도 그 방법에 대하여 질문을 하였다.

그래서 그 학생은 등비수열에서 계속되는 한 쌍의 항의 합으로 이루어지는 수열도 또 다른 등비수열을 형성한다는 가정을 하고 그런 가정 위에 문제 해결의 기반을 잡았다고 설명했다.

이 추측이 옳은가는 즉각적으로 명백하지 않으며 몇 몇 학생들은 이런 추측은 사용되어지기 전에 증명이 되어야만 할 것이라고 말할 것이다.

이 때 교사는 계획된 수업 내용을 떠나서 그 추측을 조사하기로 하고 다음과 같은 등비수열을 예로 들어 살펴 보기로 했다.

2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, …

729, 243, 81, 27, 9, 3, …

위의 수열에서 계속되는 한 쌍의 항의 합을 취하면 다음과 같은 새로운 수열이 얻어진다.

6, 24, 96, 384, …

972, 108, 12, …

위의 수열에서 다음과 같은 것을 알 수 있다.

$$\frac{24}{6}=4=2^2, \qquad \frac{66}{42}=4=2^2$$

$$\frac{108}{972}=\frac{1}{9}=\left(\frac{1}{3}\right)^2, \quad \frac{12}{108}=\frac{1}{9}=\left(\frac{1}{3}\right)^2$$

고로 본래의 수열의 공비가 r이라면 새로 얻어진 수열의 공비는 r^2이 되는 것을 알 수 있게 되며, 나아가서는 몇 가지 토론이 있은 후 추측에 대한 다음과 같은 증명이 학생들에 의해서 형성될 수 있다.

" $a,\ ar,\ ar^2, \cdots,\ ar^{n-2},\ ar^{n-1}$

(단 $a \neq 0,\ r \neq 0,\ 1,\ n$: 자연수)

공비가 r인 위의 수열에서

$a+ar,\ ar^2+ar^3, \cdots,\ ar^{n-2}+ar^{n-1}$인 등비수열을 만들면 각 항은 공비가 r^2인 등비수열이 됨을 보여라.

〔증명〕

임의의 n에 대하여 계속되는 2개의 항의 비는

$$\frac{ar^{n-2}+ar^{n-1}}{ar^{n-4}+ar^{n-3}}=\frac{ar^{n-2}(1+r)}{ar^{n-4}(1+r)}=r^2 \quad "$$

이런 방법에 의해서 학생들을 계속되는 한 쌍의 항의 합으로 이루어지는 수열은 등비수열을 이룸을 알았다. 그러면 또 새로운 추측이 일어나게 된다. 즉 등비수열의 계속되는 3항의 합으로 이루어지는 수열은 공비가 r^3인 등비수열이 될 것이가 하는 것이다.

이전의 흥미와 전념의 전이로 위의 보기와 같게 하여 학생들은 이 추측이 옳다는 것을 증명할 것이다. 이런 과정을 거치다 보면 이들 두 증명된 문제의 확장은 어떻게 될 것인가 하는 의문이 생기게 될 것이다.

즉 만일 등비수열에서 계속되는 n개의 항의 합으로 만든 새로운 수열은 공비가 r^n인 등비수열이 될 것인가 하는 것이다.

학생들은 이 추측을 증명하기 위하여 다시 한 번 좀 더 높은 동기유발이 될 것이다. 직관적으로는 이 명제가 옳다는 것을 느끼겠지만 처음 수열의 표현방법의 어려움을 교사로부터 약간 도움을 받는다면 다음과 같은 증명을 하게 될 것이다.

" 공비가 r인 등비수열의 처음부터 n 항까지는

$a,\ ar,\ ar^2, \cdots,\ ar^{n-1}$

(단 $a \neq 0,\ r \neq 0.1,\ n$: 자연수)

이 되고 그 다음부터 n 항은 ar^n, $ar^{n+1}, \cdots$, ar^{2n-1} 이면 일반적으로 임의의 n 항은 ar^{kn}, ar^{kn+1}, $\cdots$, $ar^{(k+1)n-1}$ 로 표시된다. 그러면

$a+ar+\cdots+ar^{n-1}$, $ar^n+ar^{n+1}+\cdots+ar^{2n-1}$, $\cdots$, $ar^{kn}+ar^{kn+1}+\cdots+ar^{(k+1)n-1}$ 은 공비 r^n 인 등비수열임을 보이자.

〔증명〕

임의의 n 과 k 에 대하여 n 개의 계속되는 항의 합의 비는

$$\frac{ar^{kn}+\cdots+ar^{(k+1)n-1}}{ar^{(k-1)}+\cdots+ar^{kn-1}}=\frac{ar^{kn}(1+\cdots+r^n)}{ar^{(k-1)n}(1+\cdots+r^n)}$$

$=r^n$. ”

이렇게 해서 학생들은 원래 그들이 계획된 학습에서 배우려던 것만큼 이 토론에 의해서 배우게 되었는데 실은 더 잘 배웠는지도 모른다.

그리고 학생이나 교사나 모두 새로운 수학적 정리를 배운 것이 되며 학생들의 문제 풀이방법의 수단도 늘게 되었고 또 그들 자신이 동기유발되었으며 열열히 참여하여 증명을 완성하였다는데 대한 큰 기쁨도 얻게 되는 것이다.

만일 학생들의 증명이 틀려졌다 하드래도 학생들은 잘 알고 있는 교사로부터 잘 배울 수 있는 것이고 이로 인해 학생들의 문제풀이에 대한 융통성은 다음에도 때때로 충분히 일어나게 될 것이다. 교사의 입장에서 용갈하게 "나는 이 문제의 답을 모른다. 그럼 다 같이 해결하여 보기로 하자."라고 말하는 것은 학생들을 발견하고 창조하도록 인도하게 될 것이다.

Ⅳ. 결　론

이제까지 수열에서 구조와 학습방법에 관하여 小考하여 보았는데 실은 우리나라의 수학 교과 내용에서 수열의 도입부터 좀터 많은 연구가 필요한 것으로 생각한다.

〔4〕 왜냐하면 수열의 도입을 자연수 위에 정의된 함수치 즉 $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$, $\cdots$와 같이 도입하여 전개한다면 구체적이고 발전적이며 그리고 수학 교육 현대화의 큰 목적이 되는 내용의 통일성을 갖게 되기 때문이다.

사실 간단한 예로 $1, 3, 5, 7, \cdots, 2, 4, 6, \cdots$은 수열이 아니라는 설명을 할 때 수열의 도입을 위와 같이 하면 학생들이 아무런 혼동없이 선명하게 받아드리도록 설명되는 것이다.

〔3〕 그리고 좀더 부가해서 말하면 고등학교에서는 국민학교 때부터 사용하여 잘못 인식하면 사칙연산 기호만이 연산기호로써 유일한 것으로 알고 있는 고정된 관념을 고쳐 넓혀주기 위하여 좀더 추상화된 연산기호의 정의 및 연산 과정과 수의 구조를 규명할 필요가 있다고 생각한다.

여하튼 부분 부분을 들추어 내어 따진다면 그 내용과 학습방법에 관한 많은 연구가 필요할 것이며 이런 연구하에 보다 성실하고 장래를 위한 바람직한 수업이 이루어지도록 해야 할 것이다.

References

〔1〕 Iman Ronald L : 1970 The mathematics Teacher Vol. 63, No. 4. pp. 296～297.
〔2〕 Elaine Kivy Genkins : 1970 The mathematics Teacher Vol. 63, No. 4 pp. 298～300.
〔3〕 Musser Gary L : 1967 The mathematics Teacher Vol. 60 No. 4 p. 350.
〔4〕 Casper Goffman : 1967 Introduction to real analysis.
〔5〕 한국 수학 교육 연구회 : 1969. 학교 수학(제1권 제1호) p. 14
〔6〕 홍 창주 : 1969. 수학 구조 지도에 관한 연구 p. 3.
〔7〕 현행 고등학교 수학 교과서.