論 文

自由水面에서의 비틀림 水平굽힘의 連成振動을 하는 船體斷面形의 二次元的 附加慣性 Moment에 關한 研究

金 士 洙*

The Study on the Added Moment of Inertia of Two Dimensional Cylinder induced by the Torsional Vibration coupled with the Flexural Vibration

by

S. S. Kim*

Abstract

An investigation was made for the added mass moment of inertia induced by the rotational motion of the cylinder with hull section on water in order to obtain the information to estimate the natural frequency of the torsional vibr ation of ships. The special consideration to the effect of the draught upon the added mass moment of inertia is taken into account in the study.

In this paper, the general expression for the added mass coefficients of moment of inertia of arbitrary two dimensional forms induced by the torsional vibration, was derived by the author. Hence, the coefficients for these forms are represented as functions of parameters, the section area coefficient and draft beam ratio, from which the added mass coefficients for arbitrary forms can be obtained. The result was shown in a chart for estimation of the added mass moment of inertia induced by the torsional vibration, as first trial, for the convenience of practical use.

緖 論

船體와 같은 左右對稱인 橫斷面을 가지는 柱體가 물의 自由表面을 가지고 彈性振動을 하는 경우 上下振動[7]인 때에는 이것이 單獨으로 일어남으로 固有振動의 解析에서 附加質量의 크기 만으로서 解析되지마는 橫斷面이 上下方向이 非對稱이고 自由表面을 가지는 경우는 水平振動과 비틀림振動은 必然的으로 連成振動을 하게된다. 또 實船인 경우 비틀림 中心이 橫斷面 即 變換圖形의 中心과 一致되는 吃水는 輕荷狀態와 滿載狀態의 거의 中間인 경우이고 하여 大概의 경우 비틀림中心과 水線과의 距離가 있으므로 이로 因해서도 水平振動이 비틀림 振動에 重疊이 되어 連成振動[2], [3], [4], [5], [10]을 하게 된다. 여기서는 비틀림・水平굽힘의 連成振動時의 附加慣性 moment를 理論解析하여 精密한 固有振動數를 求함으로써 船體振動防止의 資料를 提供하게 되며 또 吃水 變化에 따르는 비틀림中心位置 變化와 連成附加慣性 moment變化와의 相互關係를 船體斷面에 類似한

接受日字 1970. 10. 21

* 正會員, 釜山大學校 工科大學

寫像函數斷面形에 對한 數值計算을 하여 이를 初期推定時나 設計資料에 利用할 수 있게 하였다.

本 論

1. 附加慣性 Moment의 解析

Fig. 1과 같이 柱體의 橫斷面은 y軸에 關하여 左右對稱이고, x軸이 自由表面에 一致하게 한다. 또 이 柱體가 水平運動만이 일어날 경우의 速度 potential[9]과 原點 O 周圍의 回轉運動만이 일어날 경우의 速度 potential(附錄參照)은 미리 計算하여 두고, 水平運動과 回轉運動이 同時에 일어날 경우의 柱體의 合成運動을 求하기 爲하여 y軸上에 任意點 P를 擇하고 P點의 水平速度를 U, P點 周圍의 角速度를 Ω, P點과 原點 O와의 距離를 y_P라 定한다.

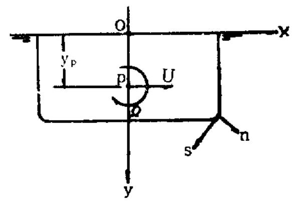


Fig. 1

이때에 P點이 x方向에 單位速度로서 水平運動만이 일어날 경우의 速度 potential를 ϕ_H라 하면 P點이 x方向에 速度 U로서 水平運動을 하는 경우의 速度 potential Φ_H는

$$\Phi_H = U\phi_H \tag{1}$$

이 된다. 또 P點周圍에 柱體가 單位角速度로서 回轉運動을 하는 경우의 速度 potential를 ϕ_{TP}이라 하면 P點周圍의 角速度 Ω로서 回轉運動을 하는 경우의 速度 potential Φ_{TP}는

$$\Phi_{TP} = \Omega\phi_{TP} \tag{2}$$

이 된다. 이 두 運動이 同時에 일어 날 경우의 물의 速度 potential Φ는

$$\Phi = U\phi_H + \Omega\phi_{TP} \tag{3}$$

이 된다. 이때의 물의 運動 energy T는

$$\begin{aligned} 2T &= -\rho\int \Phi\frac{\partial\Phi}{\partial n}ds = -\rho\int (U\phi_H+\Omega\phi_{TP})\Big(U\frac{\partial\phi_H}{\partial n}+\Omega\frac{\partial\phi_{TP}}{\partial n}\Big)ds \\ &= -\rho\int\Big\{U^2\phi_H\frac{\partial\phi_H}{\partial n}+U\Omega\Big(\phi_H\frac{\partial\phi_{TP}}{\partial n}+\phi_{TP}\frac{\partial\phi_H}{\partial n}\Big)+\Omega^2\phi_{TP}\frac{\partial\phi_{TP}}{\partial n}\Big\}ds \\ &= -U^2\rho\int\phi_H\frac{\partial\phi_H}{\partial n}ds - U\Omega\cdot\rho\int\Big(\phi_H\frac{\partial\phi_{TP}}{\partial n}+\phi_{TP}\frac{\partial\phi_H}{\partial n}\Big)ds \\ &\quad -\Omega^2\cdot\rho\int\phi_{TP}\frac{\partial\phi_{TP}}{\partial n}ds \end{aligned} \tag{4}$$

이 된다. 여기서 ϕ와 $\frac{\partial\phi}{\partial n}$는 어느 것이나 接水面에서의 값이고 s는 柱體周圍에 따라 젠 길이이다. 積分은 물과 接하고 있는 柱體周圍의 全長에 對하여 한 것이다. (4)의 右邊의 第1項은 速度 U로서 水平運動만이 일어날 경우의 運動 energy, 第3項은 角速度 Ω로서 P點周圍에 回轉運動만이 일어날 경우의 運動 energy이다. (4)에서 알 수 있는 바와 같이 任意點 P에서의 運動인 全 energy는 水平運動만에 依한 energy와 回轉運動만에 依한 energy 外에 第2項에서의 energy

$$2T' = -U\Omega\rho\int\Big(\phi_H\frac{\partial\phi_{TP}}{\partial n}+\phi_{TP}\frac{\partial\phi_H}{\partial n}\Big)ds \tag{5}$$

가 있다는 것을 注意하지 않으면 안 된다.

여기서 $T'=0$이 되겠금 P點을 擇하면

卽
$$\int\Big(\phi_H\frac{\partial\phi_{TP}}{\partial n}+\phi_{TP}\frac{\partial\phi_H}{\partial n}\Big)ds = 0 \tag{6}$$

이어야 한다. 여기서 (6)이 Green의 定理에 依하여

$$\int \phi_H \frac{\partial \phi_{TP}}{\partial n} ds = \int \phi_{TP} \frac{\partial \phi_H}{\partial n} ds = 0 \tag{7}$$

이 된다. 따라서 이 $T'=0$인 y_P의 값을 求하기 爲하여는 (7)이 滿足하여야 한다. 여기서 ϕ_{TP}를 原點 O에서의 速度 potential로 나타내어 본다. 이때의 ϕ_{TP}는 P點周圍를 單位角速度로 回轉하는 경우의 速度 potential이므로 이와 같은 運動은 Fig. 2와 같이 O點이 x方向에 y_P인 速度로서 水平運動을 하고 同時에 O點 周圍로 單位角速度로서 回轉運動을 하고 있는 꼴로 바꾸어 나타낼 수가 있다.

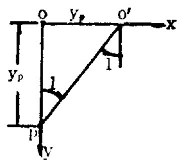


Fig. 2

即
$$\phi_{TP} = \phi_{TO} + y_P \phi_H \tag{8}$$

라 고쳐 쓸 수 있다. 이것이 主體가 O點이 方向에 x方向에 y_P인 速度로서 水平運動을 하고 同時에 O點周圍를 單位角速度로서 回轉運動을 하는 경우의 速度 potential이다.

여기서 (8)을 (7)에 代入하면

$$\int \phi_{TP} \frac{\partial \phi_H}{\partial n} ds = \int (\phi_{TO} + y_P \phi_H) \frac{\partial \phi_H}{\partial n} ds$$
$$= \int \phi_{TO} \frac{\partial \phi_H}{\partial n} ds + y_P \int \phi_H \frac{\partial \phi_H}{\partial n} ds = 0$$

이것으로 부터 y_P는 다음과 같이 求해진다. [5]

$$y_P = -\frac{\int \phi_{TO} \frac{\partial \phi_H}{\partial n} ds}{\int \phi_H \frac{\partial \phi_H}{\partial n} ds} \tag{9}$$

여기서 ϕ_H, ϕ_{TO}는 旣知의 速度 potential이므로 上式에 依해서 y_P의 값이 計算된다. 따라서 P點을 (9)에서 얻은 y_P의 位置에 擇하면 물의 全運動 energy의 式 (4)는 水平運動에 對한 附加質量 m_H와 回轉運動에 對한 附加慣性 moment I_{TP}를

$$\left. \begin{aligned} m_H &= -\rho \int \phi_H \frac{\partial \phi_H}{\partial n} ds \\ I_{TP} &= -\rho \int \phi_{TP} \frac{\partial \phi_{TP}}{\partial n} ds \end{aligned} \right\} \tag{10}$$

라 놓으면

$$2T = m_H U^2 + I_{TP} \Omega^2 \tag{11}$$

이 된다. 即 水平運動과 回轉運動이 各 各 單獨으로 일어났을 때의 運動 energy의 合으로서 나타내 진다. (11)의 關係式을 利用하면 原點 O로 부터 y軸上 h인 距離에 있는 任意의 點 Q 周圍에 柱體가 角速度 Ω로서 回轉運動을 할 경우의 물의 運動 energy의 附加 慣性 moment I_{TQ}를 求할 수가 있다. 即 Fig. 3과 같이 Q點 周圍의 角速度 Ω의 回轉運動은 P點에 對하여는

$$\left. \begin{aligned} U &= (h - y_P)\Omega \\ \Omega &= \Omega \end{aligned} \right\} \tag{12}$$

인 運動이므로 (12)를 (11)에 代入하면

$$2T = \{I_{TP} + m_H (h - y_P)^2\} \Omega^2 \tag{13}$$

이 된다. 따라서 Q點에서의 附加慣性 moment I_{TQ}는

$$I_{TQ} = I_{TP} + m_H (h - y_P)^2 \tag{14}$$

이 된다. 上式에 依하여 알 수 있는 바와 같이 $h - y_P = 0$ 即 Q點이 P點에 一致하는 경우는 $I_{TQ} = I_{TP}$가 되고 이것이 附加慣性 moment의 最少값을 나타내

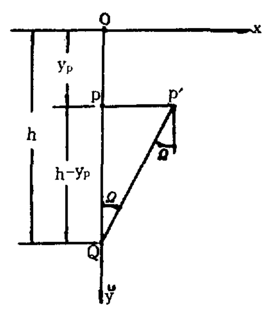


Fig. 3

게 된다. 水平運動에 對한 附加質量 m_H 와 回轉運動에 對한 附加慣性 moment I_T 를 다음과 같이 定義하면[3]

$$\left.\begin{aligned} m_H &= \frac{1}{2} C_H \rho \pi d^2 \\ I_T &= C_T \rho \pi d^4 \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

但 여기서 C_H, C_T 를 各各 水平運動에 對한 附加質量係數, 回轉運動에 對한 附加慣性係數이다.
따라서 水平運動에 對한 附加質量係數는

$$C_H = \frac{m_H}{1/2\,\rho \pi d^2} \tag{16}$$

이 되고 回轉運動에 對한 附加慣性係數는 y 軸上의 各點 O,P,Q 點에서

$$\left.\begin{aligned} C_{TO} &= \frac{I_{TO}}{\rho \pi d^4} \\ C_{TP} &= \frac{I_{TP}}{\rho \pi d^4} \\ C_{TQ} &= \frac{I_{TQ}}{\rho \pi d^4} \end{aligned}\right\} \tag{16$'$}$$

이 된다. ϕ_H 와 ϕ_{TO} 에 對應하는 flow function 을 各各 ψ_H 및 ψ_{TO} 라하면 (9)는

$$y_P = -\frac{\int \phi_{TO} d\psi_H}{\int \phi_H d\psi_H} = -\frac{\int \phi_H d\psi_{TO}}{\int \phi_H d\psi_H} \tag{17}$$

이 된다. 여기서 ϕ_H, ψ_H, ϕ_{TO}, ψ_{TO} 는 單位速度와 單位角速度에 對한 것이고 다음과 같이 나타내 진다.[9]

$$\left.\begin{aligned} \phi_H &= \sum_{n=2,4,6,\cdots}^{\infty} C_n^H \sin n\theta \\ \psi_H &= \sum_{n=2,4,6,\cdots}^{\infty} C_n^H \cos n\theta \end{aligned}\right\} \tag{18}$$

但 여기서 $C_n^H = -\frac{4}{\pi} \sum_{n=1,3,5,\cdots}^{\infty} a_m' \frac{m^2}{m^2-n^2}$

$$a_1' = a_1 - 1, \quad a_m' = a_m \quad (m \neq 1)$$

$$\left.\begin{aligned} \phi_{TO} &= \sum_{n=2,4,6,\cdots}^{\infty} C_n^T \sin n\theta \\ \psi_{TO} &= \sum_{n=2,4,6,\cdots}^{\infty} C_n^T \cos n\theta \end{aligned}\right\} \tag{18$'$}$$

但 여기서 $C^T_n = -(a_{n-1} + \sum_{i=1,3,5,\cdots}^{\infty} a_i a_{i+n})$ $(n=2,4,6,\cdots)$ 以上의 것을 綜合하면 水平과 비틀림振動의 連成附加慣性係數 C_{TP} 는 (14)의 Q 點이 P 點에 一致하였을 경우이니 이를 考慮하면 (14)는

$$I_{TP} = I_{TO} - m_H\, y_P^2 \tag{19}$$

이 되고, 위 식에 (16)과 (16)$'$ 를 代入하면 C_{TP} 는 다음과 같이 求해 진다.

$$C_{TP} = C_{TO} - \frac{1}{2} C_H \left(\frac{y_P}{d}\right)^2 \tag{20}$$

2. 寫像函數斷面을 가진 y_P 의 計算

Fig. 4 와 같이 ξ-平面의 單位圓을 Z-平面의 圖形에 옮길 寫像函數는 對稱性을 考慮하면 一般的으로

$$Z = x + iy = \xi + \frac{a_1}{\xi} + \frac{a_3}{\xi^3} + \frac{a_5}{\xi^5} + \cdots = \xi + \sum_{n=1,3,5,\cdots}^{\infty} \frac{a_n}{\xi^n} \tag{21}$$

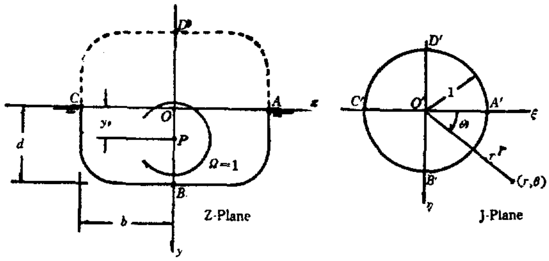


Fig. 4

이 된다. 柱體의 運動에 依하여 일어나는 運動에 對한 速度 potential ϕ와 flow function ψ는 一般的으로

$$\left.\begin{aligned}\phi&=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{r^n}(b_ne^{-in\theta}+\bar{b}_ne^{in\theta})\\ \psi&=\frac{1}{2i}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{r_n}(b_ne^{-in\theta}-\bar{b}_ne^{in\theta})\end{aligned}\right\}\tag{22}$$

이 된다. 但 여기서

$$\left.\begin{aligned}Z&=x+iy\\ \zeta&=\xi+i\eta=re^{i\theta}\end{aligned}\right\}\tag{23}$$

이고 b_n는 一般的으로 複素定數, $\bar{b}_n$는 b_n의 共軛複素數이다. 그러면 먼저 ϕ_{TO}를 求해보기로 한다. 原點 O 周圍를 回轉運動을 할때의 速度 potential ϕ_{TO}는 附錄에서

$$\phi_{TO}=\sum_{n=2,4,6,\cdots}^{\infty}\frac{C_n^T}{r^n}\sin n\theta\tag{24}$$

이 된다. 但 여기서 $C^T{}_n=-(a_{n-1}+\sum_{i=1,3,5,\cdots}^{\infty}a_ia_{i+n})$ $(n=2,4,6,\cdots)$이다.

또 (18)과 (18)'의 各 第2式으로 부터

$$\left.\begin{aligned}d\psi_{TO}&=\frac{d\psi_{TO}}{d\theta}d\theta=-\sum_{n=2,4,6,\cdots}^{\infty}C_n^Tn\sin n\theta d\theta\\ d\psi_H&=\frac{d\psi_H}{d\theta}d\theta=-\sum_{n=2,4,6,\cdots}^{\infty}C_n^Tn\sin n\theta d\theta\end{aligned}\right\}\tag{25}$$

이므로 (17)의 分母, 分子의 積分은 다음과 같이 된다. 먼저 分子의 積分을 하면

$$\begin{aligned}\int\phi_H\psi_{TO}&=-\int_o^{\pi}\Big(\sum_{n=2,4,6,\cdots}^{\infty}C_n^H\sin n\theta\Big)\Big(\sum_{n=2,4,6,\cdots}^{\infty}C_n^Tn\sin n\theta\Big)d\theta\\ &=-\sum_{n=2,4,6,\cdots}^{\infty}nC_n^HC_n^T\int_o^{\pi}\sin^2 n\theta d\theta\\ &=-\frac{\pi}{2}\sum_{n=2,4,6,\cdots}^{\infty}nC_n^HC_n^T\\ &=-2\Big\{\sum_{n=2,4,6,\cdots}^{\infty}na_{n-1}\Big(\sum_{m=1,3,5,\cdots}^{\infty}a_m'\frac{m}{m^2-n^2}\Big)\\ &\quad+\sum_{n=2,4,6,\cdots}^{\infty}n\Big(\sum_{m=1,3,5,\cdots}^{\infty}a'_m\frac{m}{m^2-n^2}\Big)\Big(\sum_{i=1,3,5,\cdots}^{\infty}a_ia_{i+n}\Big)\Big\}\\ &=-2\Big\{\sum_{n=2,4,6,\cdots}^{\infty}n\cdot a_{n-1}\sum_{m=1,3,5,\cdots}^{\infty}a'_m\frac{m}{m^2-n^2}\end{aligned}$$

$$+\sum_{n=2,4,6,\cdots}^{\infty} n\sum_{m=1,3,5,\cdots}^{\infty} \sum_{i=1,3,5,\cdots}^{\infty} \frac{m}{m^2-n^2} a'_m a_i a_{i+n} \Big\}$$

$$=-2\Big\{\sum_{r=1,3,5,\cdots}^{\infty} a'_r \sum_{n=2,4,6,\cdots}^{\infty} \frac{a_{n-1} n\cdot r}{r^2-n^2}$$

$$+\sum_{r=1,3,5,\cdots}^{\infty} \sum_{s=1,3,5,\cdots}^{\infty} a_r' a_s \sum_{n=2,4,6,\cdots}^{\infty} \frac{a_{s+n}\cdot n\cdot r}{r^2-n^2}\Big\} \qquad (a)$$

이 되고 다음으로 分母의 積分을 하면

$$\int \phi_H d\psi_H = \int_o^{\pi}\Big(\sum_{n=2,4,6,\cdots}^{\infty} C_n{}^H \sin n\theta\Big)\Big(-\sum_{n=2,4,6,\cdots}^{\infty} C_n{}^H\cdot n\cdot \sin n\theta\Big)d\theta$$

$$=-\sum_{n=2,4,6,\cdots}^{\infty} n(C_n{}^H)^2\int_o^{\pi}\sin^2 n\theta d\theta$$

$$=-\frac{\pi}{2}\sum_{n=2,4,6,\cdots}^{\infty} n(C_n{}^H)^2$$

$$=-\frac{\pi}{2}\sum_{n=2,4,6\cdots}^{\infty} n\Big(\frac{4}{\pi}\Big)^2\Big(\sum_{m=1,3,5,\cdots}^{\infty} a'_m \frac{m}{m^2-n^2}\Big)^2$$

$$=-\frac{8}{\pi}\sum_{r=1,3,5,\cdots}^{\infty} \sum_{s=1,3,5,\cdots}^{\infty} a'_r a'_s \sum_{n=2,4,6,\cdots}^{\infty} \frac{n\cdot r\cdot s}{(n^2-r^2)(n^2-s^2)} \qquad (b)$$

이 된다. 따라서 (17)은 다음과 같은 結果를 얻게 된다.

$$y_P=-\frac{2\Big\{\sum_{r=1,3,5,\cdots}^{\infty} a'_r \sum_{n=2,4,6,\cdots}^{\infty} \frac{a_{n-1} n\cdot r}{r^2-n^2}+\sum_{r=1,3,5,\cdots}^{\infty}\sum_{s=1,3,5,\cdots}^{\infty} a_r' a_s \sum_{n=2,4,6,\cdots}^{\infty}\frac{a_{s+n} n\cdot r}{r^2-n^2}\Big\}}{\frac{8}{\pi}\Big\{\sum_{r=1,3,5,\cdots}^{\infty}\sum_{s=1,3,5,\cdots}^{\infty} a_r' a_s' \sum_{n=2,4,6,\cdots}^{\infty}\frac{n\cdot r\cdot s}{(n^2-r^2)(n^2-s^2)}\Big\}} \qquad (26)$$

여기서 다시 위의 식을 簡單하게 하기 爲하여

$$d_r=\sum_{n=2,4,6,\cdots}^{\infty} \frac{a_{n-1} n\cdot r}{n^2-r^2},\quad d_{r,s}=\sum_{n=2,4,6,\cdots}^{\infty}\frac{a_{s+n}\cdot n\cdot r}{n^2-r^2},\quad C_{r,s}=\sum_{n=2,4,6,\cdots}^{\infty}\frac{n\cdot r\cdot s}{(n^2-r^2)(n^2-s^2)}$$

이라 두면

$$y_P=-\frac{\pi}{4}\,\frac{\sum_{r=1,3,5,\cdots}^{\infty} a_r' d_r+\sum_{r=1,3,5,\cdots}^{\infty}\sum_{s=1,3,5,\cdots}^{\infty} a_r' a_s d_{r,s}}{\sum_{r=1,3,5,\cdots}^{\infty}\sum_{s=1,3,5,\cdots}^{\infty} a_r' a_s' C_{r,s}} \qquad (26)'$$

但 여기서 $a_1'=a_1-1$, $a_r'=a_r$ $(r\neq 1)$이 된다.

3. Prohaska form[8]에 對한 計算例

이의 寫像函數는 (21)로 부터

$$Z=\zeta+\frac{a_1}{\zeta}+\frac{a_7}{\zeta^7}$$

이 된다. 따라서 이를 實數部와 虛數部로 나눈 꼴로 나타 내면

$$\left.\begin{aligned} x&=(1+a_1)\cos\theta+a_7\cos 7\theta\\ y&=(1-a_1)\sin\theta-a_7\sin 7\theta\end{aligned}\right\} \qquad (27)$$

이 된다. 였기서 $\theta=0$ 일때에 $x=b$, $\theta=\frac{\pi}{2}$일 때에 $y=d$ 이므로 (27)는

$$\left.\begin{aligned} b&=1+a_1+a_7 \\ d&=1-a_1+a_7 \end{aligned}\right\} \tag{28}$$

但 여기서 b는 半幅, d는 吃水

가 된다. 이것으로 부터 a_1, a_7은

$$a_1=\frac{1-\lambda}{\alpha},\quad a_7=\frac{1+\lambda}{\alpha}-1 \tag{29}$$

但 여기서 $\lambda=\frac{d}{b}b$, $\alpha=\frac{2}{b}$ 이 된다.

面積比 σ는 附錄의 (f)에 (27)를 考慮하면

$$\begin{aligned} \sigma&=\frac{\pi\alpha^2}{16\lambda}(1-a_1{}^2-7a_7{}^2) \\ &=\frac{\pi}{8\lambda}\{3\alpha^2+7(1+\lambda)\alpha-4-6\lambda-4\lambda^2)\} \end{aligned} \tag{30}$$

이 된다. 위식을 α에 對하여 풀면

$$\alpha=\frac{1}{6}\left\{7(1+\lambda)\pm\sqrt{(1+\lambda)^2+24\lambda\left(1-\frac{4\sigma}{\pi}\right)}\right\} \tag{31}$$

이 된다. 위식의 複號 $\pm$ 중 $-$가 楕圓을 包含하는 圖形群이고 $+$는 其外의 圖形群이 된다. 여기서는 $-$符號를 가진 α에 對한 것만 取扱하였다. 原點 O 周圍의 附加慣性係數 C_{TO}는 附錄의 (v)로 부터

$$C_{TO}=\frac{\alpha^4}{16\lambda^4}(a_1{}^2+3a_1{}^2a_7{}^2+4a_7{}^2) \tag{32}$$

이 된다. 위의 식 중 α는 (31)로 부터, a_1,a_7는 (29)로 부터 各各 얻는 값을 使用하면 된다. 水面으로 부터 附加質量重心까지의 距離 y_P는 (26)로 부터

$$y_P=\frac{\pi}{4}\;\frac{2/3(a_1-1)a_1+8/63(a_1-1)a_7-14/45a_1a_7+56/15a_7{}^2+6/35(a_1-1)a_1a_7-42/13a_1a_7{}^2}{1/4(a_1-1)^2-29/90(a_1-1)a_7+2560/6300a_7{}^2} \tag{33}$$

이 된다. 水平振動의 附加質量係數 C_H[9]는

$$C_H=\frac{16}{\pi^2d^2}\sum_{r=1,3,5,\cdots}^{\infty}\;\sum_{s=1,3,5,\cdots}^{\infty}C_{r,s}a_r{}'a_s{}' \tag{34}$$

이므로 이것으로 부터

$$C_H=\frac{16}{\pi^2d^2}\left\{\frac{1}{4}(a_1-1)^2-29/90(a_1-1)a_7+25607/6300a_7{}^2\right\}$$

但 여기서 $a_1{}'=a_1-1)$, $a_r{}'=a_r$ ($r\neq1$) 이 된다.

水平과 비틀림振動의 連成附加慣性係數 C_{TP}는 (20)으로 부터 求해진다.

다음으로 두 係數 a_1, a_7의 許用範圍에 對하여 調査하여 보기로 한다.

寫像函數 (21)는 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\left.\begin{aligned} x&=\cos\theta+\sum_{n=1,3,5,\cdots}^{\infty}a_n\cos n\theta=x(\theta) \\ y&=\sin\theta-\sum_{n=1,3,5,\cdots}^{\infty}a_n\sin n\theta=y(\theta) \end{aligned}\right\} \tag{35}$$

이로 부터

$$\left.\begin{aligned} x&=(1+a_1)\cos\theta+a_7(64\cos^7\theta-112\cos^5\theta+56\cos^2\theta-7\cos\theta) \\ y&=(1-a_1)\sin\theta-a_7(-64\sin^7\theta+112\sin^5\theta-56\sin^3\theta+7\sin\theta) \end{aligned}\right\} \tag{36}$$

이 된다. 여기서 $0 \leqq x \leqq b$ $0 \leqq y \leqq d$ 이기 爲하여는[9]

$$\left.\frac{dx(\theta)}{d(\cos\theta)}\right|_{\cos\theta=0,1} \geqq 0, \qquad \left.\frac{dy(\theta)}{d(\sin\theta)}\right|_{\sin\theta=0,1} \geqq 0 \tag{37}$$

이어야 하고

半幅 b 와 吃水 d 가 正의 값을 가지기 爲하여는

$$\left.\begin{aligned} b=x(\theta)]_{\theta=0}=1+a_1+a_7\geqq 0 \\ d=y(\theta)]_{\theta=\frac{\pi}{2}}=1-a_1+a_7\geqq 0 \end{aligned}\right\} \tag{38}$$

이어야 하고

面積比 σ 가 $\sigma \geqq 0$ 이기 爲하여는

$$1-a_1^2-7a_7^2 \geqq 0 \tag{39}$$

이어야 하고

또 面積比 σ 는 $\sigma \leqq 1$ 이기 爲하여서는

$$a_1^2+7a_7^2+\frac{4}{\pi}(1+a_1+a_7)(1-a_1+a_7)-1\geqq 0 \tag{40}$$

이어야 하기 때문에 두 係數 a_1, a_7 의 許用範圍는 條件式 (37)~(40)의 制限을 받게 된다. 이를 그림으로 나타낸 것이 Fig. 5 이다. 이 그림 중 斜線을 친 部分이 두 係數 a_1, a_7 의 許用範圍를 나타낸다.

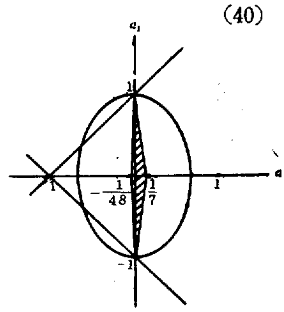


Fig. 5

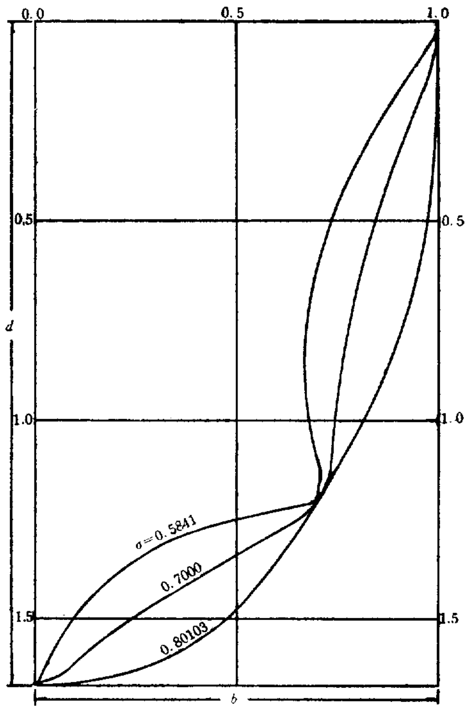
마지막으로 Prohaska forms 에 對한 數値計算을 한 結果를 통털어 다음과 같이 Table 과 그림으로 나타 내었다. Table 1. 은 b/d 에 對한 σ 의 許用範圍를 나타 내고, Fig. 7 은 Prohaska forms 을 나타 내고, Fig. 8 은 水平振動時의 b/d 를 parameter 로 한 C_H 와 σ 와의 關係를 나타 내고, Fig. 9, Fig. 10, Fig. 11 은 各各 비틀림振動時의 b/d 를 parameter 로 한 C_{TO}, y_P/d, C_{TP} 와 σ 의 關係를 나타내고 있다. 本論文에서는 Prohaska forms 에 對한 計算만 하였지마는 그外의 여러가지 form 에 對한 것도 같은 要領으로 求할 수가 있다. 이에 對한 것은 다음 機會에 發表하기로 하겠다.

結　　論

1. 寫像函數로서 나타나는 모든 圖形에 對한 連成附加慣性 moment 를 求하는 一般式을 誘導하였다.
2. 비틀림·水平굽힘의 連成振動을 解析하므로서 비틀림 固有振動數의 算定을 할 수 있다.
3. 吃水의 變化에 따라 비틀림 中心의 位置變化에 따른 連成附加慣性 moment 變化를 系統的으로 調査를 해 놓으므로서 各 載貨狀態의 비틀림 固有振動數의 算定은 할 수 있게 된다.
4. 以上의 비틀림固有振動數를 初期推定時나 各 載貨狀態時의 것을 미리 算定이 되므로서 共振現象의 避하거나 防止할 수가 있게 된다.
5. 本論文에서는 附加慣性 moment 를 2次元的計算에 對한 解析을 하였으나 이를 3次元形狀과 3次元運動에 對한 修正을 하여야 참 값을 얻을 수가 있게 된다. 이의 研究는 여러가지로 다루어지고 있긴 하나 아직 檢討할 餘地가 있다 할 수 있겠다.

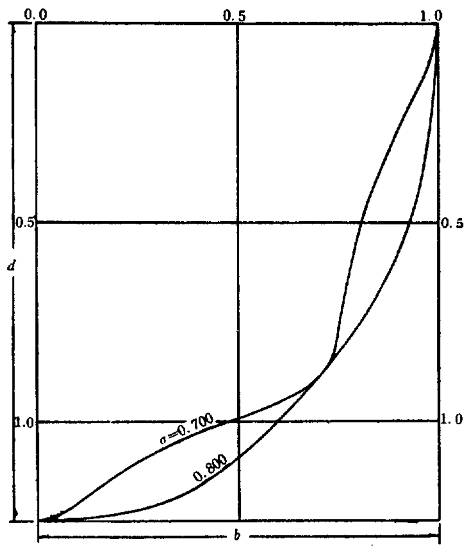
Table 1 Permissible Range of Values of σ

b/d	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0	1.2	1.4	1.6	1.8	2.0
σ	0.6528～0.8046	0.6148～0.8075	0.5841～0.8103	0.5498～0.8132	0.5154～0.8161	0.5440～0.8137	0.5645～0.8120	0.5794～0.8107	0.5918～0.8097	0.6013～0.8089



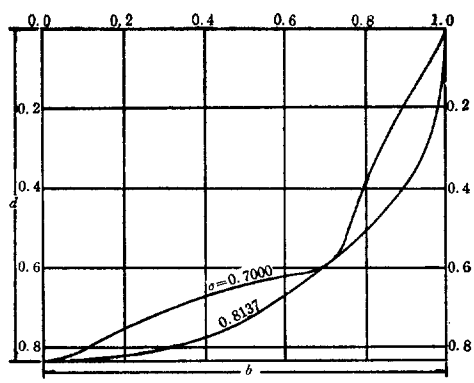
(a) b/d=0.6

Fig. 7 Prohaska forms



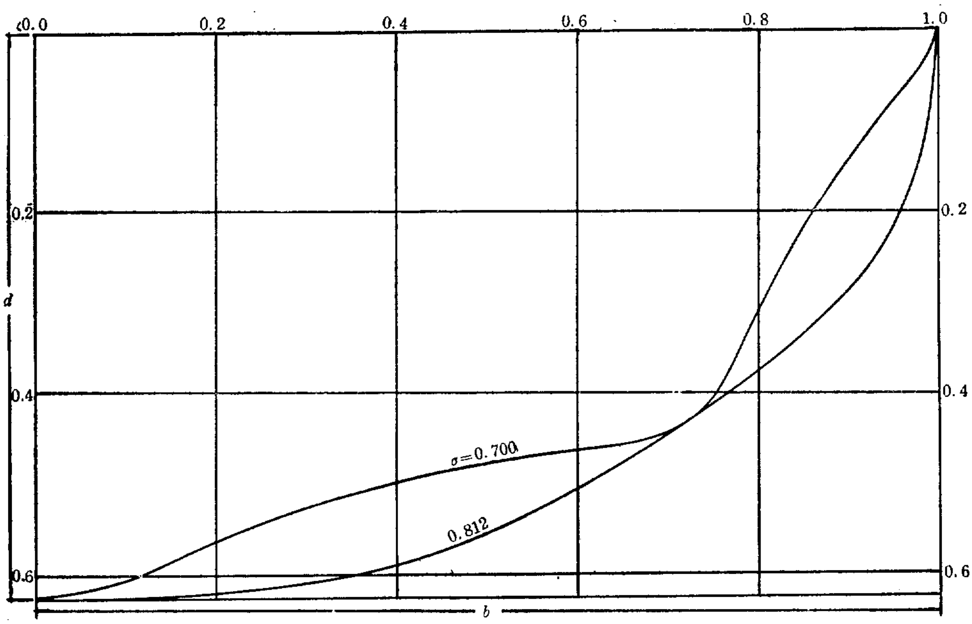
(b) b/d=0.8

Fig. 7 Prohaska forms



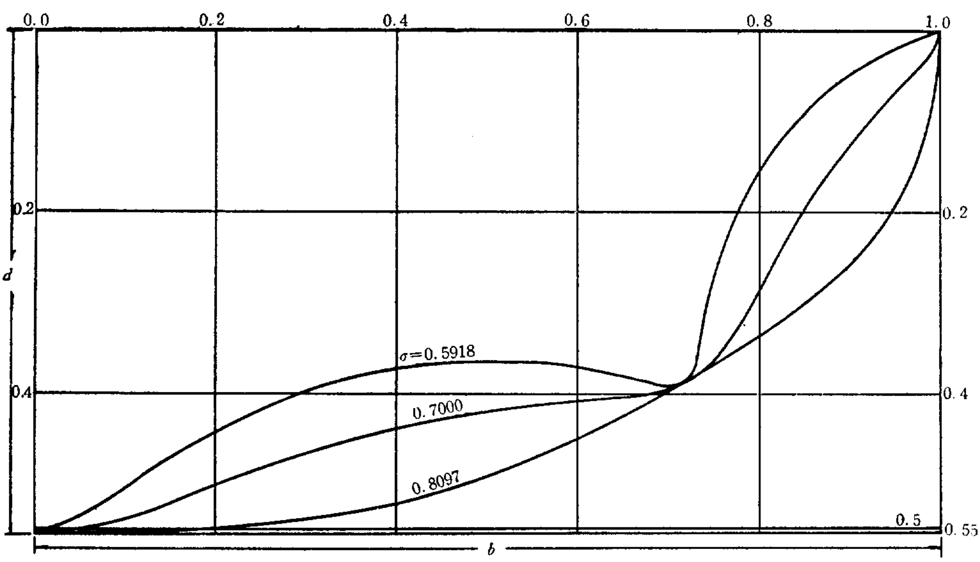
(c) b/d=1.2

Fig. 7 Prohaska forms



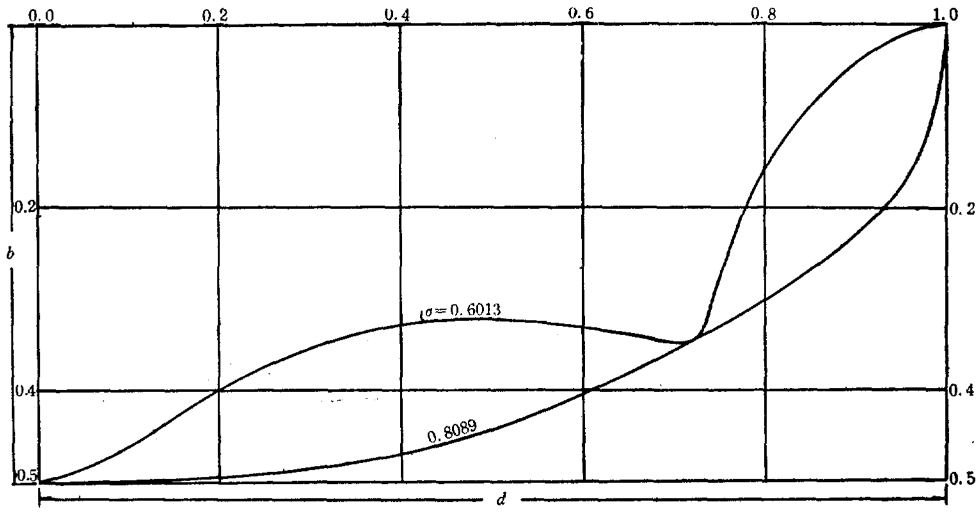
(d) b/d=1.4

Fig. 7 Prohaska forms



(e) b/d=1.8

Fig. 7 Prohaska forms



(f) b/d=2.0

Fig. 7 Prohaska forms

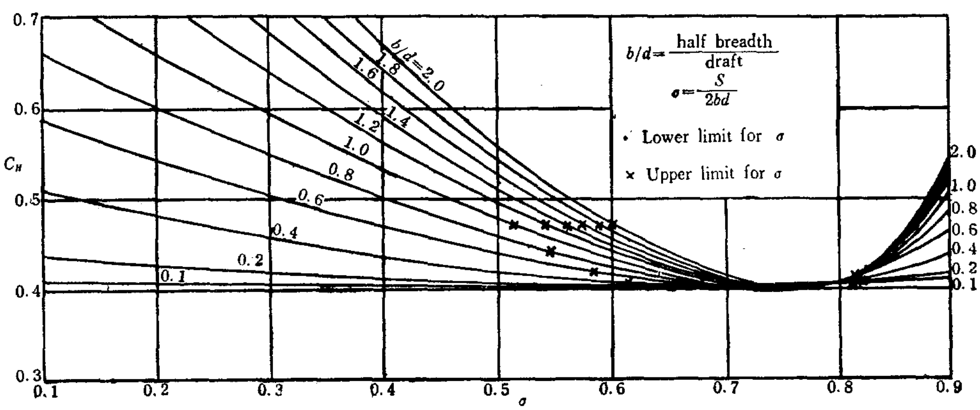


Fig. 8 Added mass coefficient for horizontal motion

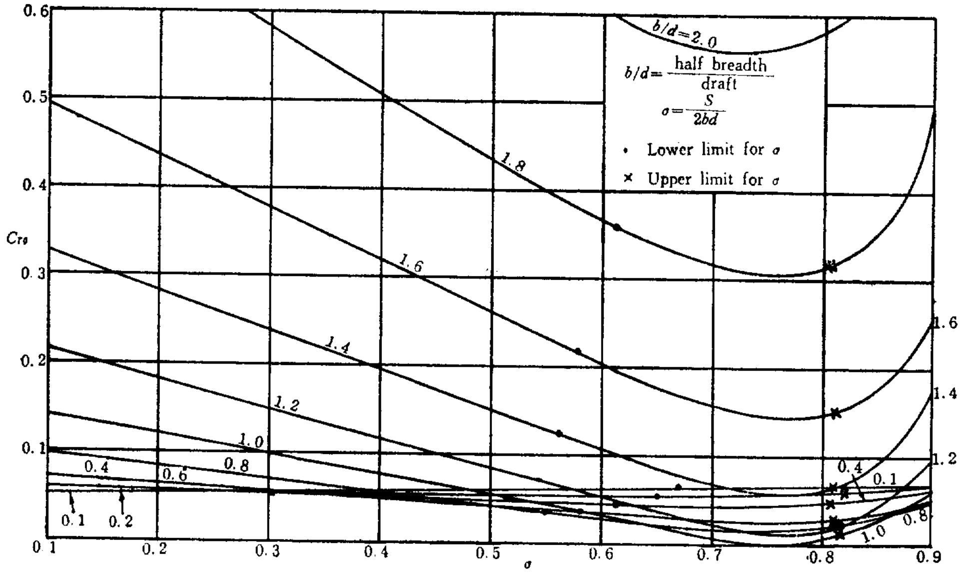


Fig. 9 Added mass coefficient for torsional motion round origin on water surface

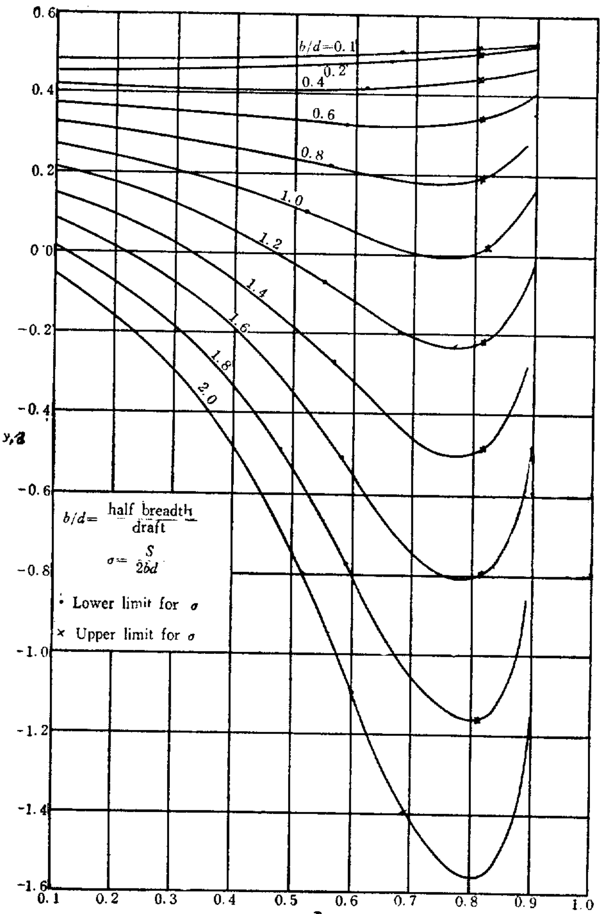


Fig. 10 Values of y_p/d for torsional motion

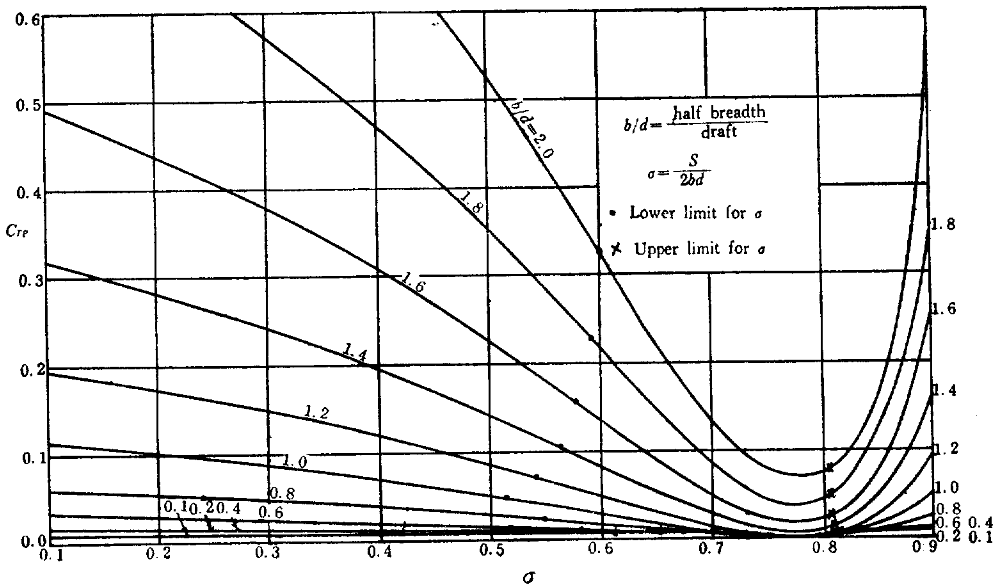


Fig. 11 Added mass coefficient for torsional motion round torsional center

附 錄

水線下의 船型斷面을 나타내는 圖形의 變換에 對하여는 渡邊[1]論文에 詳細히 說明되고 있다. 여기서는 船體斷面과 같은 左右對稱인 橫斷面을 가진 柱體가 自由水面에서 비틀림振動을 할 때의 附加慣性 Moment를 2次元的 解析을 하고저 한다.

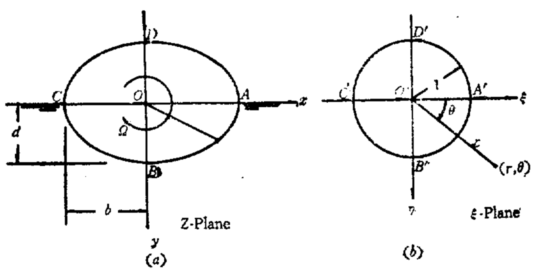


Fig. 6

Fig. 6과 같이 ζ-平面上의 原點 O를 中心으로 하는 楕圓을 Z-平面上의 x, y 軸에 關하여 對稱인 圖形에 옮겨서 單位圓의 外部를 Z-平面上의 外部에 옮기는 寫像函數는

$$Z=\zeta+\sum_{n=1,3,5,\cdots}^{\infty}\frac{a_n}{\zeta^n} \qquad (a)$$

이다. 여기서 $a_n(n=1,3,5,\cdots)$는 實數係數이다.

지금 $\qquad Z=x+iy, \qquad \zeta=\xi+i\eta=re^{i\theta} \qquad (b)$

이니 (a)를 實數部와 虛數部로 나누어 나타내면

$$\left.\begin{aligned} x&=r\cos\theta+\sum_{n=1,3,5,\cdots}^{\infty}\frac{a_n}{r^n}\cos n\theta \\ y&=r\sin\theta-\sum_{n=1,3,5,\cdots}^{\infty}\frac{a_n}{r^n}\sin n\theta \end{aligned}\right\} \qquad (c)$$

이 된다. 이것으로 부터 Z-平面에서의 圖形의 方程式은 $r=1$ 인 때에 이므로

$$\left.\begin{aligned} x&=\cos\theta+\sum_{n=1,3,5,\cdots}^{\infty}a_n\cos n\theta \\ y&=\sin\theta-\sum_{n=1,3,5,\cdots}^{\infty}a_n\sin n\theta \end{aligned}\right\} \qquad (d)$$

이 된다. Fig. 6(a)에서의 Z-平面上의 圖形의 x 軸(x 軸을 水面이라 생각함)의 밑部分의 面積 S 는

$$S=\int xdy=\int_o^\pi x(\theta)\frac{dy(\theta)}{d\theta}d\theta$$

에 依하여 求해진다. 위식에 (d)을 代入하여 積分하면

$$S=\frac{\pi}{2}(1-\sum_{n=1,3,5,\cdots}^{\infty}na_n^2) \qquad (e)$$

이 된다. 또 圖形의 水線面에서의 半幅을 b, 吃水를 d 라 하면 面積比 σ 는 다음과 같이 된다.

$$\sigma=\frac{S}{2bd}=\frac{\pi}{4bd}(1-\sum_{n=1,3,5,\cdots}^{\infty}na_n^2) \qquad (f)$$

다음으로 柱體의 運動에 對하여 일어나는 물의 運動에 對한 複素 potential w 는 一般的으로 다음과 같은 式으로 나타내 진다.

$$w=\frac{b_1}{\zeta}+\frac{b_2}{\zeta^2}+\frac{b_3}{\zeta^3}+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{\zeta^n} \qquad (g)$$

여기서 $b_n(n=1,2,3,\cdots)$는 一般的으로 複素數의 係數이다. $w=\phi+i\psi$ 이므로 (g)를 實數部와 虛數部로 나누어 나타내면

$$\left.\begin{aligned} \phi&=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{r^n}(b_ne^{-in\theta}+\bar{b}_ne^{in\theta}) \\ \psi&=\frac{1}{2i}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{r_n}(b_ne^{-in\theta}-\bar{b}_ne^{in\theta}) \end{aligned}\right\} \qquad (h)$$

이 된다.

여기서 ϕ 는 速度 potential ψ 는 flow function 이다. 또 $\bar{b}_n$ 는 b_n 의 共轉複素數이다. 여기서 自由表面의 條件 即

$$\theta=0 \text{ 와 } \theta=\pi \text{ 에서 } \phi=0 \qquad (i)$$

를 滿足하는 ϕ 와 ψ 가 (h)에 依하여 주어질 때에 물의 運動 energy T 는

$$T=-\frac{\rho}{2}\int_o^\pi\phi\frac{\partial\psi}{\partial\theta}d\theta$$

에 依하여 求해 진다. (h)를 위식에 代入하여 積分을 하면[9]

$$T=\frac{\pi\rho}{4}\sum_{n=1}^{\infty}n|bn|^2 \qquad (j)$$

이 된다. (h)의 ϕ 와 ψ 는 柱體의 接水面에서의 境界條件을 滿足하지 않으면 안된다. 지금 柱體는 Fig. 6(a)와 같이 原點 O 周圍를 角速度 Ω 로서 回轉運動을 한다고 하면 接水面에서는 다음과 같은 條件[6]

$$r=1 \text{ 에서 } \psi=-\frac{1}{2}\Omega P^2+\text{const} \qquad (k)$$

을 滿足하지 않으면 안된다. 여기서 P 는 Fig. 6 (a)와 같이 原點 O 에서 柱體表面上까지의 距離로서 $P^2=x^2+y^2$ 이 된다. 그러면 上下對稱인 斷面을 가진 柱體가 無限한 流體中에서 原點 O 周圍를 回轉運動을 하는 것이라 하면 接水面의 條件 (k)를 써서 (h)의 係數 b_n 를 計算하여 보기로 한다. 먼저 (k)의 右邊의 P^2 를 求하면

$$P^2=x^2+y^2=(\cos\theta+\sum_{n=1,3,5,\cdots}^{\infty} a_n\cos n\theta)^2+(\sin\theta-\sum_{n=1,3,5,\cdots}^{\infty} a_n\sin n\theta)^2$$

$$=1+2\sum_{n=1,3,5,\cdots}^{\infty} a_n(\cos\theta\cos n\theta-\sin\theta\sin n\theta)$$

$$+\sum_{n=1,3,5,\cdots}^{\infty}\sum_{m=1,3,5,\cdots}^{\infty} a_na_m(\cos n\theta\cos m\theta+\sin n\theta\ \sin m\theta)$$

$$=1+2\sum_{n=1,3,5,\cdots}^{\infty} a_n\cos(n+1)\theta+\sum_{n=1,3,5,\cdots}^{\infty}\sum_{m=1,3,5,\cdots}^{\infty} a_na_m\cos(n-m)\theta \quad (l)$$

위식 右邊의 第 3 項의 二重級數는 다음과 같이 고쳐 쓸 수 있다.

$$\sum_{n=1,3,5,\cdots}^{\infty}\sum_{m=1,3,5,\cdots}^{\infty} a_na_m\cos(n-m)\theta$$

$$=\sum_{n=1,3,5,\cdots}^{\infty} a_n^2+2(\cos 2\theta\sum_{n=1,3,5,\cdots}^{\infty} a_na_{n+2}+\cos 4\theta\sum_{n=1,3,5,\cdots}^{\infty} a_na_n+4$$

$$+\cos 6\theta\sum_{n=1,3,5,\cdots}^{\infty} a_na_{n+6}+\cdots\cdots)$$

따라서 (l)는 結局 다음과 같이 된다.

$$P^2=1+\sum_{n=1,3,5,\cdots}^{\infty} a_n^2+2(a_1+\sum_{n=1,3,5,\cdots}^{\infty} a_na_m+2)\cos 2\theta$$

$$+2(a_3+\sum_{n=1,3,5,\cdots}^{\infty} a_na_n+4)\cos 4\theta+2(a_5+\sum_{n=1,3,5,\cdots}^{\infty} a_na_{n+6})\cos 6\theta+\cdots \quad (m)$$

P^2 이 cosine 級數로서 나타내 지므로 境界條件 (k)에 依한 接水面에서의 ϕ 도 亦是 cosine 級數 꼴로 取하면 對應하는 係數를 比較하여 未知의 係數를 求하게 된다. 그러기 爲하여 (h)의 第2式에서 $b_n=-\bar{b}_n$ 이면 된다. b_n 가 純虛數이므로

$$b_n={}_iC_n \quad (C_n:\text{實數},\ n=1,2,3,\cdots) \quad (n)$$

이라 두면 接水面에서

$$\phi=\frac{1}{2i}\sum_{n=1}^{\infty} b_n(e^{-in\theta}+e^{in\theta})=\sum_{n=1}^{\infty} C_n\cos n\theta \quad (o)$$

이 된다. (m)와 (o)를 境界條件 (k)에 代入하여 兩邊을 比較하면

$$\left.\begin{aligned}
&C_1=C_3=C_5=\cdots\cdots=0\\
&C_2=-\Omega(a_1+\sum_{i=1,3,5,\cdots}^{\infty} a_ia_{i+2})\\
&C_4=-\Omega(a_3+\sum_{i=1,3,5,\cdots}^{\infty} a_ia_{i+4})\\
&C_6=-\Omega(a_5+\sum_{i=1,3,5,\cdots}^{\infty} a_ia_{i+6})\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}\right\} \quad (p)$$

이 된다. 또 (k)의 任意定數는

$$\text{const}=\frac{1}{2}\Omega\left(1+\sum_{i=1,3,4\cdots}^{\infty} a_i^2\right) \tag{q}$$

이 된다.

물의 運動 energy T는 以上의 것을 考慮하여 (j)로 부터

$$T=\frac{\pi\rho}{4}\sum_{n=2,4,6,\cdots}^{\infty} nC_n^2=\frac{1}{4}\pi\rho\Omega^2\sum_{n=2,4,6,\cdots}^{\infty} n\left(a_{n-1}+\sum_{i=1,3,5,\cdots}^{\infty} a_i a_{i+n}\right)^2 \tag{r}$$

이 된다. 한편 물의 附加慣性 moment를 I_{TO}라 하면

$$T=\frac{1}{2}I_{TO}\Omega^2 \tag{s}$$

이다. 따라서 (r)과 (s)로 부터 附加慣性 moment(柱體의 單位 길이當)

I_{TO}는

$$I_{TO}=\frac{\pi\rho}{2}\sum_{n=2,4,6,\cdots}^{\infty} n\left(a_{n-1}+\sum_{i=1,3,5,\cdots}^{\infty} a_i a_{i+n}\right)^2 \tag{t}$$

이 된다. 또 附加慣性係數 C_{TO}를

$$I_{TO}=C_{TO}\pi\,\rho\,d^4 \tag{u}$$

라 定義하면 (t)와 (u)로 부터

$$C_{TO}=\frac{1}{2d^4}\sum_{n=2,4,6,\cdots}^{\infty} n\left(a_{n-1}+\sum_{i=1,3,5,\cdots}^{\infty} a_i a_{i+n}\right)^2 \tag{v}$$

이 된다. (t)와 (v)가 原點周圍의 뒤틀림 振動때의 附加慣性 moment와 附加慣性係數이다.

參 考 文 獻

〔1〕 渡邊惠弘; 横動搖における 船の 見掛け 慣性力率に ついて, 造船協會會報 第52號, 1933年 10月
〔2〕 熊井豐二; 船體の 水平曲げ・捩水連成振動に ついて, 造船協會論文集 第100號, 1957年 2月
〔3〕 熊井豐二; 船體捩れ振動に おける 附加慣性力率に ついて, 造船協會論文集 第104號, 1959年 1月
〔4〕 熊井豐二; 船體水平・捩れ振動の 研究(その 1), 造船協會論文集 第121號, 1967年 6月
〔5〕 松浦義一; 長大倉口船の 捩り・曲げ連成振動に ついて(第3報), 日本造船學會誌 第483號, 1969年 9月
〔6〕 H. Lamb; "*Hydrodynamics*" 6 th edition, 1932.
〔7〕 F.M. Lewis; "The Intreia of the Water Surrounding a Vibration Ship," *Trans. S.N.A.M.E*, 1929.
〔8〕 C.W. Prohaska; "Vibrations Verticales du Navire," *Bull. A.T.M.A.*, 1947.
〔9〕 L. Landweber and M.C. de Macagno; "Added Mass of Two-dimensional Forms Oscillating in a Free Surface," *Jour. of Ship Research* Nov. 1957.
〔10〕 K. Wendel; "Hydrodynamische Massen und hydrodynamische Massenträgheitsmomente," *J.S.T.G* Vol. 44, 1950.