

部分的인 均一剪斷荷重을 받는 平板에서의 應力分布

金 曉 哲\*

Stress Distributions in a Plate due to Shear Loading Uniformly Distributed on the End Portions of its Side Boundary.

by

Hyochul Kim\*

Abstract

The plate under shear loading uniformly distributed on the end portions of its side boundary was considered. Infinite hyperbolic series and Fourier series were combined as a stress function and from which exact solutions for the 15 cases for the parameters of  $b/L=0.25, 0.5, 1.0$  and  $l/L=0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1.0$  are obtained. In each cases the numerical values of the stress components and strain components are calculated by taking the first 5 terms of the infinite series at the 36 points as shown in Fig. 3. The results are presented in Fig. 4-1, 4-2, and 4-3.

The conclusions are as follows:

- 1) The stresses  $\sigma_x$  increase very slightly as  $x$  increases in the range of  $0 < x < L-l$
- 2) When the parameters satisfy the conditions  $b/L < 0.25$  and  $l/L < 0.2$ , the stresses in the region of  $0 < x < L-l$  can be obtained by replacing the uniform shear loading by the equivalent uniform tensile force and pure bending moment at  $x=L$ .
- 3) The stresses  $\sigma_y$  is negligible throughout the region.
- 4) When the parameter  $b/L$  varies, the stresses  $\sigma_x$  and  $u$  vary as  $L/b$ , while strain  $v$  varies as  $(L/b)^2$ .

記 號

- $L$  : 平板의 길이
- $l$  : 均一剪斷應力이 分布하는 區間의 길이
- $b$  : 平板의 幅
- $q$  : 均一剪應力의 세기
- $E$  : 彈性係數
- $\mu$  : Poisson 比
- $A_n, B_n, C_n$  : 常數

序 論

船舶을 비롯한 一般 構造物 및 機械部品中에서 많은 部分에 熔接 또는 接着方式이 採擇되고 있으며, 이러한 部品들은 그 接合面에서 機械的인 外力 외에도 熱, 加工 및 組立條件에 따라 初期應力狀態下에 있게 된다.

接受日字 1970. 2. 15

\* 正會員, 서울大學校 工科大學

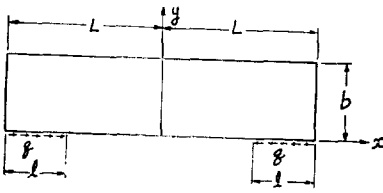


Fig. 1

위의 간단한 例로서 Fig. 1 과 같은 平板을 생각하고, 區間 l 에 均一剪斷應力 q 가 分布한다고 假定하여,  $l/L = 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1.0, b/L = 0.25, 0.5, 1.5$  에서 얻어지는 15 가지 경우에 대하여 각 점에서의 應力成分  $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ , 및 變位成分  $u, v$  를 數值計算하였다.

2. 理 論

座標系를 Fig 1 에 보인 것과 같이 設定하고, 應力函數를

$$\phi = \sum_{n=1}^{\infty} \cos \alpha_n x f_n(y)$$

의 故로 假定하면,  $\nabla^4 \phi = 0$  으로부터 應力函數는 다음과 같이 된다 [1][2][3][5].

$$\phi = \sum_{n=1}^{\infty} \cos \alpha_n x [A_n \sinh \alpha_n y + B_n y \cosh \alpha_n y + C_n y \sinh \alpha_n y] \tag{1}$$

따라서 應力成分은

$$\sigma_x = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \cos \alpha_n x [A_n \alpha_n \sinh \alpha_n y + B_n (\alpha_n y \cosh \alpha_n y + 2 \sinh \alpha_n y) + C_n (\alpha_n y \sinh \alpha_n y + 2 \cosh \alpha_n y)] \tag{2}$$

$$\sigma_y = \sum_{n=1}^{\infty} -\alpha_n \cos \alpha_n x [A_n \alpha_n \sinh \alpha_n y + B_n \alpha_n y \cosh \alpha_n y + C_n \alpha_n y \sinh \alpha_n y] \tag{3}$$

$$\tau_{xy} = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \sin \alpha_n x [A_n \alpha_n \cosh \alpha_n y + B_n (\alpha_n y \sinh \alpha_n y + \cosh \alpha_n y) + C_n (\alpha_n y \cosh \alpha_n y + \sinh \alpha_n y)] \tag{4}$$

變形成分은

$$u = \frac{1}{E} \sum_{n=1}^{\infty} \sin \alpha_n x \{ (1+\mu) [A_n \alpha_n \sinh \alpha_n y + B_n \alpha_n y \cosh \alpha_n y + C_n \alpha_n y \sinh \alpha_n y] + 2(B_n \sinh \alpha_n y + C_n \cosh \alpha_n y) + g(y) \} \tag{5}$$

$$v = \frac{-1}{E} \sum_{n=1}^{\infty} \cos \alpha_n x \{ (1+\mu) [A_n \alpha_n \cosh \alpha_n y + B_n (\alpha_n y \sinh \alpha_n y - \cosh \alpha_n y) + C_n (\alpha_n y \cosh \alpha_n y - \sinh \alpha_n y)] + 2\mu (B_n \cosh \alpha_n y + C_n \sinh \alpha_n y) \} + h(x) \tag{6}$$

式 (2)에서 境界條件으로서  $x = \pm L$  에서  $\sigma_x = 0$  임을 考慮하면

$$\alpha_n = \frac{n\pi}{2L} \sin \frac{n\pi}{2} \tag{7}$$

따라서  $x = \pm L$  에서  $u = 0$  이고,  $y = 0$  에서  $v = 0$  이므로

式 (5) 및 (6)에서  $g(y) = 0, h(x) = 0$  이 된다.

式 (3)에서 境界條件  $y = b, \sigma_y = 0$  을 使用하면

$$A_n \alpha_n \sinh \alpha_n b + B_n \alpha_n b \cosh \alpha_n b + C_n \alpha_n b \sinh \alpha_n b = 0 \tag{8}$$

또한  $y = b, \tau_{xy} = 0$  이므로

$$A_n \alpha_n \cosh \alpha_n b + B_n (\alpha_n b \sinh \alpha_n b + \cosh \alpha_n b) + C_n (\alpha_n b \cosh \alpha_n b + \sinh \alpha_n b) = 0 \tag{9}$$

$y=0$ 에서의 剪斷應力은

$$\tau_{xy} = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \sin \alpha_n x [A_n \alpha_n + B_n] \tag{10}$$

그런데  $y=0$ 에서의 均一剪應力을 Fourier series 로 표시하면

$$\tau_{xy} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-2q}{\pi n} \left[ \cos \frac{n\pi}{2} \left( \cos \frac{n\pi l}{2L} - 1 \right) + \sin \frac{n\pi}{2} \sin \frac{n\pi l}{2L} \right] \sin \frac{n\pi}{2L} x \tag{11}$$

여기서 式 (10)은 奇數項만을 갖고, 式 (11)은 奇數項 및 偶數項을 모두 갖는 수열이므로, 式 (10)의  $n$ 項과 式 (11)의  $n$ 項과  $n+1$ 項의 合이 같다고 하고,  $n=1, 3, 5, \dots$ 로 취하면

$$A_n \alpha_n + B_n = \frac{-4ql}{\pi^2 n^2 (n+1)} \left\{ (n+1) \sin \frac{n\pi l}{2L} - n \left[ \cos(n+1) \frac{\pi l}{2L} - 1 \right] \right\} \sin \frac{n\pi}{2} \tag{12}$$

式 (8), (9) 및 (12)를 使用하여  $A_n \alpha_n, B_n, C_n$ 을 求하면

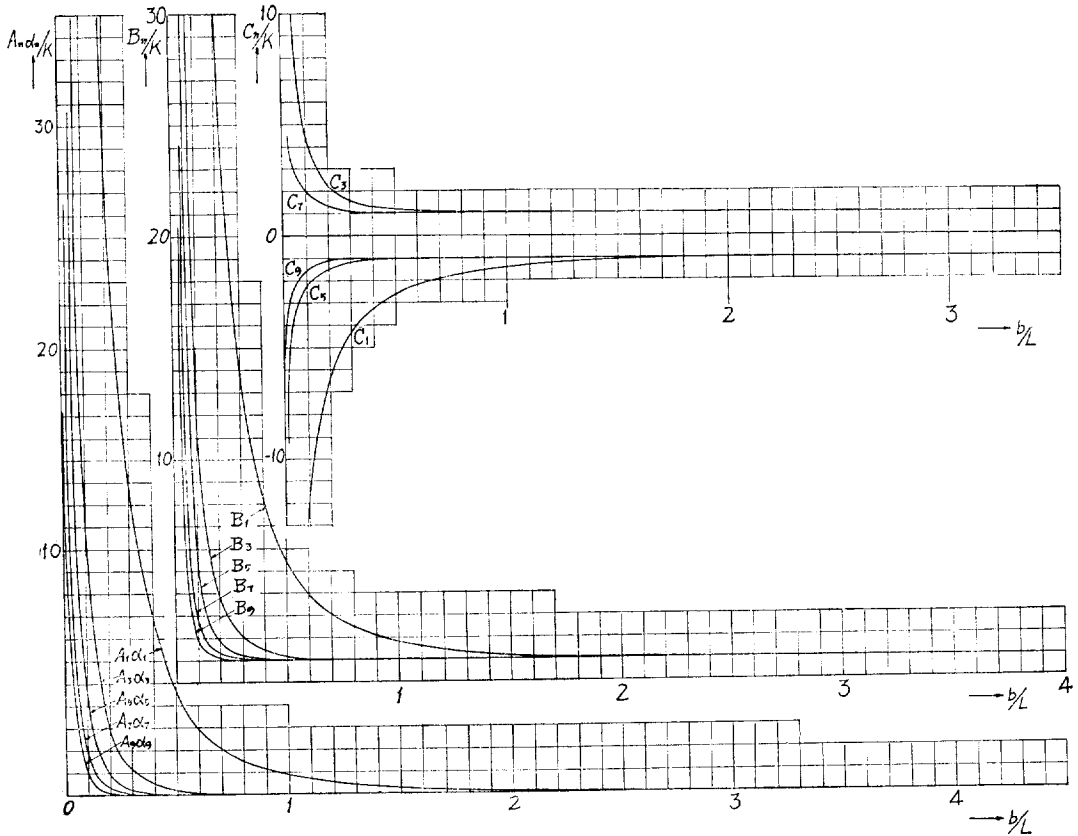


Fig. 2.  $A_n \alpha_n, B_n, C_n$  vs  $b/L$

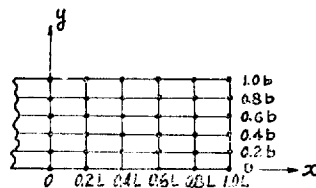


Fig. 3. Points where the stresses and strains are calculated.

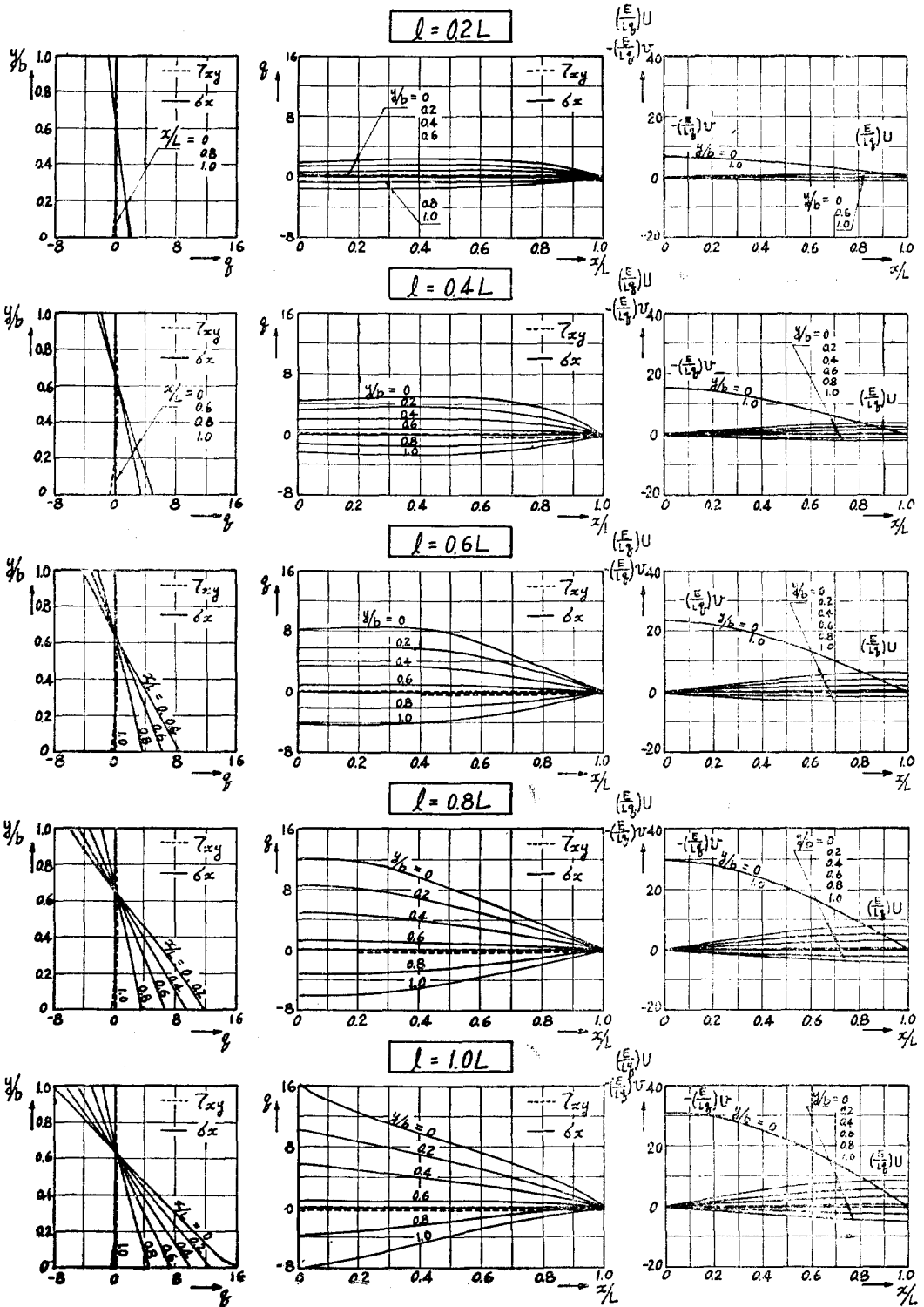


Fig. 4-1. Stresses and Strains vs  $x/L$  and  $y/b$  where  $b/L=0.25$

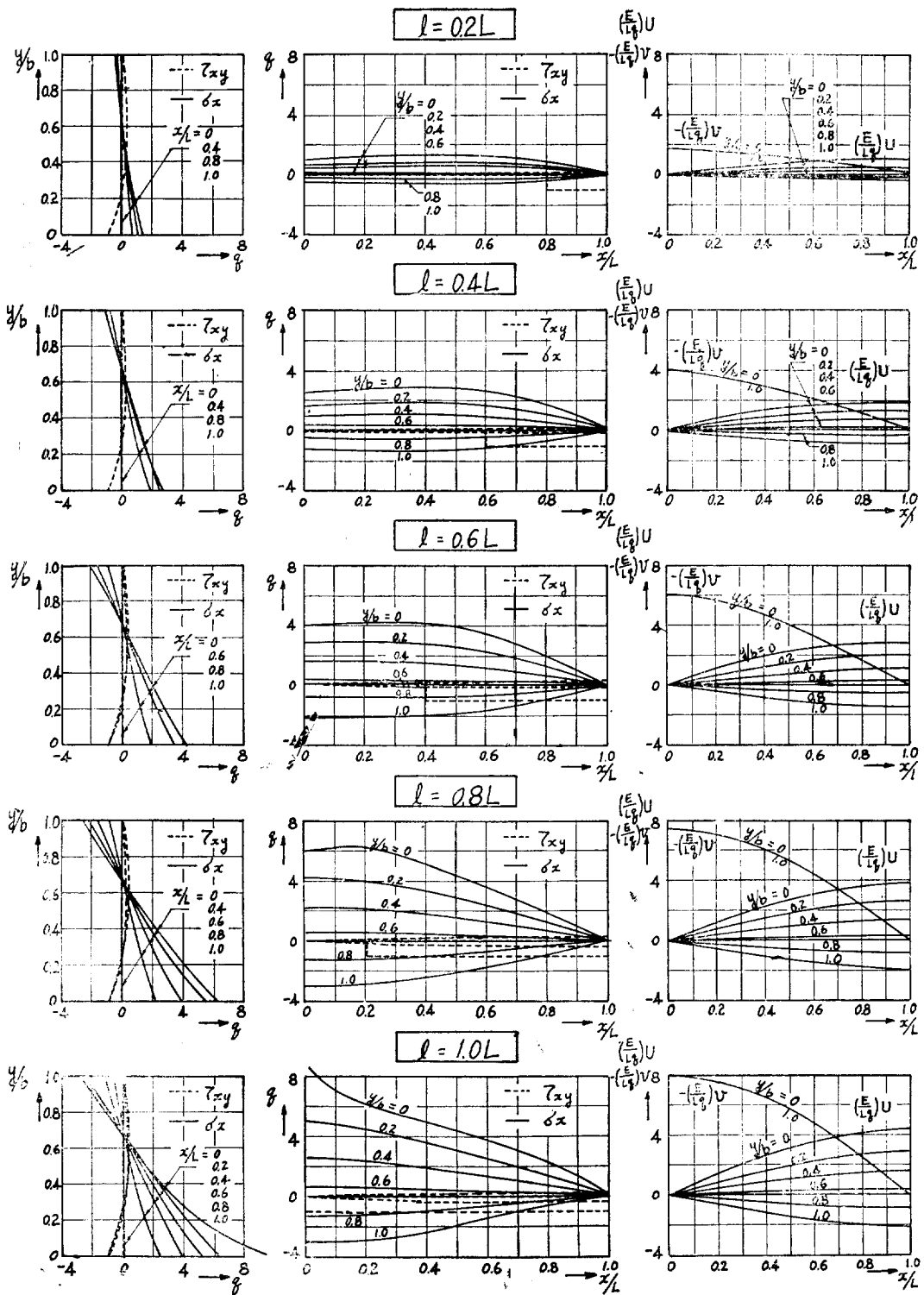


Fig. 4-2. Stresses and Strains vs  $x/L$  and  $y/b$  where  $b/L=0.5$

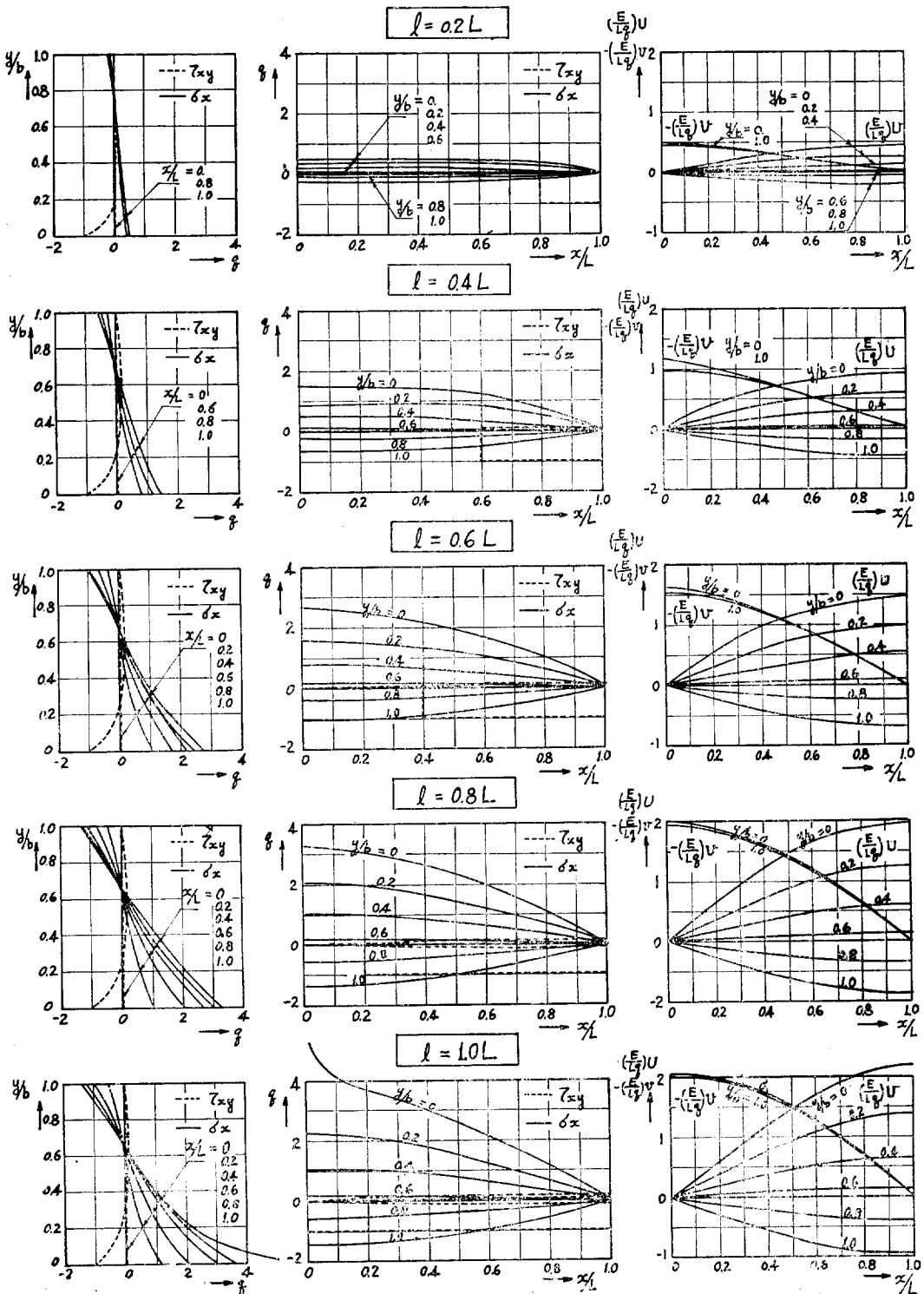


Fig. 4-3. Stresses and Strains vs  $x/L$  and  $y/b$  where  $b/L=1.0$

$$\left. \begin{aligned}
 A_n \alpha_n &= K \frac{(\alpha_n b)^2}{(\alpha_n b)^2 - \sinh^2 \alpha_n b} \\
 B_n &= K \frac{-\sinh^2 \alpha_n b}{(\alpha_n b)^2 - \sinh^2 \alpha_n b} \\
 C_n &= K \frac{\sinh \alpha_n b \cosh \alpha_n b - \alpha_n b}{(\alpha_n b)^2 - \sinh^2 \alpha_n b}
 \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

여기서

$$K = \frac{-4ql}{\pi^2 n^2 (n+1)} \left\{ (n+1) \sin \frac{n\pi l}{2L} - n \left[ \cos \frac{(n+1)\pi l}{2L} - 1 \right] \right\} \sin \frac{n\pi}{2}$$

이렇게 얻은 식 (13)을 使用하면 應力成分 및 變位成分을 얻을 수 있다.

### 3. 數值計算 및 結果

計算에 있어서는 우선 Fig. 2에서 볼 수 있는 바와 같이  $b/L=0\sim 4.0$ 에 對하여  $A_n \alpha_n / K, B_n / K, C_n / K$ 의 廓로 계수들을 구하였다. 이들로부터 應力成分式 (2), (3), (4), 및 變位成分式 (5), (6)은 急速히 收斂한다는 것을 알 수 있다.

따라서 數值計算에 있어서는 級數의 項數를  $n=9$ 까지를 취하여  $b/L=0.25, 0.5, 1.0$  및  $l/L=0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1.0$ 에서 얻어지는 15個의 條件에 對하여, Fig. 3에서 볼 수 있는 바와 같이, 36個의 點에서의 應力成分  $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ , 및 變位成分  $u, v$ 를 計算하였다. 이때 Poisson比  $\mu$ 는 一般的인 材料에서 使用할 수 있는 값으로 생각되는  $\mu=0.3$ 으로 취하였고 이렇게 얻어진 結果는 Fig. 4-1, 4-2 및 4-3에서 보는 바와 같다.

### 4. 考 察

應力成分을 살펴보면 Fig. 4-1, 4-2, 4-3에서와 같이  $\sigma_x$ 는  $y=0$ 에서 最大 引張應力을 갖고,  $y=b$ 에서 最大 壓縮應力을 나타내며,  $y=0.66b$ 에서 中立軸을 갖는 거의 直線의인 分布를 보이고 있다.

이러한 應力分布는 區間  $l$ 에 分布하고 있는 均一剪斷應力을  $x=L$ 에서  $y$ 方向으로 分布하는 均一引張荷重과 純粹굽힘 應力으로 바꾸어 생각할 때 얻어지는 것과 같은 形態라고 볼 수 있다. 특히 그 中立軸의 位置는 두 경우에 完全히 一致하며,  $b/L$  및  $l$ 이 작아질수록  $x=0$ 에서의  $\sigma_x$ 의 값들도 서로 接近하여  $b/L=0.25, l=0.2L$ 일 때에는 그 차이가 1.5%以內로 된다. 또한  $x$ 方向으로는  $0 < x < L-l$ 區間에서  $x$ 가 增加함에 따라 微小한 增加를 보이고  $L-l < x < L$ 에서는  $x$ 가 增加함에 따라 急激히 減少하여  $x=L$ 에서 0이 된다. 따라서  $0 < x < L-l$ 의 區間에서는  $\sigma_x$ 를  $x$ 方向으로 均一分布 한다고 생각하여도 좋다.

$\sigma_y$ 는  $x$  및  $y$ 方向의 全區間을 통하여  $x=L, y=0.1b$  近處에서 微小한 增加를 보이는 無視할 수 있는 작은 값을 갖는다. 따라서  $\sigma_y$ 는 Fig. 4-1, 4-2, 4-3에서 除外하였다.

剪斷應力  $\tau_{xy}$ 는  $0 < x < L-l$ 의 區間에서  $y=0$  및  $y=b$ 에서 0이고,  $0 < y < b$ 에서는 無視할 수 있는 작은 값을 갖는다.  $L-l < x < L$ 의 區間에서는  $y=0$ 일 때  $\tau_{xy}=q$ 이고,  $y=b$ 에서 0의 값을 갖고,  $0 < y < 0.2b$ 에서 急激히 減少하는 分布를 보인다.  $x=L$ 에서는  $\tau_{xy}$ 가  $0 \leq y \leq b$ 에서 0이라는 境界條件과 一致하지 않으나 그 크기가  $0 < y < 0.2b$ 의 區間을 除外하면 全區間을 통하여 작다는 점과  $x=L+\Delta L$ 에서  $y=0$   $\tau_{xy}=0$ 이라는 Fourier series의 性格을 考慮하면 別로 問題視되지 않는다.  $u$ 는  $x=0$ 에서 0이고,  $x=L$ 에서 最大値를 보이며,  $y$ 方向으로는  $y=0$ 에서 最大引張,  $y=b$ 에서 最大壓縮을 나타내며,  $y=0.66b$ 에서 中立軸을 갖는 거의 直線의인 分布를 하고 있다.  $v$ 는  $0 < y < b$ 에서는  $x$ 方向의 分布가 同一하며,  $x=0$ 에서 最大値를 갖고,

$x=b$ 에서 0이 된다.

$b/L$ 의 변화에 대하여서는  $b/L$ 이 減少하면  $\sigma_x$  및  $u$ 는  $L/b$ 에 比例하여 增加하고.  $\tau_{xy}$ 는 주어진 條件에 의하여 一定한 값을 나타내며,  $v$ 는  $(L/b)^2$ 에 比例하여 增加한다.

平板의 一端에 分布하는 剪斷應力이 均一分布가 아닌 경우에 있어서는 그때의 剪斷應力分布를 Fourier series로 표시하고 이에 相應하는 새로운  $K$ 를 算出하고 이것을 式 (13)의  $K$ 代身에 使用하면 그때의 剪斷應力分布에 該當하는 項들을 求할 수 있다.

## 結 論

- 1)  $\sigma_x$ 는 區間  $0 < x < L-l$ 에서는  $x$ 의 變化에 따라 거의 變化하지 않는다.
- 2)  $b/L < 0.25$ ,  $l/L < 0.20$ 일때는  $0 < x < L-l$ 에서의  $\sigma_x$ 는  $L-l < x < L$ 에서의 均一剪斷應力을  $x=L$ 에서  $0 < y < b$ 에 分布하는 均一引張應力과 純粹굽힘應力으로 바꾸어 생각할 수 있다.
- 3)  $\sigma_y$ 는 全區間을 通하여 無視할 수 있다.
- 4)  $\sigma_x$  및  $u$ 는  $(L/b)$ 에 比例하여 變化하고,  $v$ 는  $(L/b)^2$ 에 比例하여 變化한다.

## 後 記

本論文作成에 있어서 理論展開에 많은 助言을 해주신 任尙鎮 副教授에 感謝드리며 數值計算에 있어서 手苦하여준 洪斗杓, 李昊燮, 林文奎에게 感謝드린다.

## 參 考 文 獻

- [1] 任尙鎮: "서로 다른 재료의 결합부에서의 응력분포, 大韓造船學會誌 第7卷 第1號, 1970.
- [2] J.P.Benthem: "A Laplace Transform Method for the Solution of Semi Infinite and Finite Strip Problem in Stress Analysis", The Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics, Clarendon Press, Oxford, Vol. XVI Part 4, 1963.
- [3] Coker and Filon: "A treatise on Photoelasticity", Cambridge University Press, 1957.
- [4] 任尙鎮: "平板에 붙은 Stiffener 속에서의 剪斷應力分布" 大韓造船學會誌 第3卷 第1號, 1966.
- [5] Timoshenko and Goodier: "Theory of Elasticity" McGraw-Hill Book Co., New York, 1951.
- [6] Churchill: "Fourier Series and Boundary Value Problems", McGraw-Hill Book Co., New York, 1941.
- [7] S.M. Selby: "Standard Mathematical Table", 14th ed., The Chemical Rubber Co., Ohio, 1965.