

서로 다른 材料의 結合部에서의 應力傳達

任 尙 鍊*

Stress Distribution near the Joint of Different Materials

by

S. J. Yim*

Abstract

An elastic plate bar joined to a rigid bar is considered. The bar is subjected to uniform axial tension. A theoretical approximate solution is obtained in an infinite hyperbolic series form and some numerical results for various Poisson's ratios are presented. A rubber plate joined to a strong wooden plate has been tested to obtain an experimental data and the results are compared with theoretical ones. Two values for vertical displacements are in good agreement but it is not satisfactory for horizontal displacements. The conclusion arrived at are as follows: The natures of stress distributions and deformed shapes given by above theoretical solution are compatible in mechanical sense. The magnitudes of stress and displacement components would not be reliable for exact works. A sharp shear stress concentrations are detected at the both ends of the joint.

記 號

l : 結合面으로 인한 應力分布의 攪亂效果가 波及되는 距離

c : 平板의 半幅

q : 均一 引張荷重의 세기

E : 彈性係數

μ : Poisson 比

$$a_n = \frac{n\pi}{2c}$$

A_n, B_n, C_n, D_n : 常數

u, v : x - 및 y -方向의 變位成分

1. 緒 論

近年에 이르러 熔接技術의 發達과 強力한 接着劑의 出現으로 異質材料의 結合이 比較的 容易하게 되었으며 構造物이나 機械要素에 두 가지 以上の 材料의 結合體를 使用하는 例를 흔히 볼 수 있게 되었다.

이에 따라 異質材料의 結合에 關聯되는 여러 가지 工學上的 問題가 研究되어 왔으며, 結合境界面 近處에서

接受日字 1970 年 2 月 15 日

* 正會員, 서울大學校 工科大學

의 應力分布에 關해서도 많은 研究가 이루어진 바 있다. 그러나 그들의 大部分은 荷重이 結合境界面에 平行하는 경우를 다루고 있으며, 荷重이 結合面에 垂直한 경우를 取扱한 것은 드물다. Frasier 와 Rongved 는 異質材料의 半無限平面板 두 장을 結合한 無限平面板에서 結合面으로부터 有限距離만큼 떨어진 點에 各各 結合面에 垂直 또는 平行하는 集中荷重이 걸리는 경우의 應力分布를 구한 바 있다[1].

著者는 Fig. 1 에 보인 것과 같은 有限幅의 彈性材料와 剛性材料의 結合板이 均一引張荷重을 받는 경우를 解析하였다. 이 解析에서는 無限級數의 形式을 使用하여 近似解를 求하였고, Poisson 比가 0~0.5 에 걸친 몇 가지 경우에 對한 數值計算을 하였고, 그 解의 限界性を 理論과 實驗을 通하여 考察하였다.

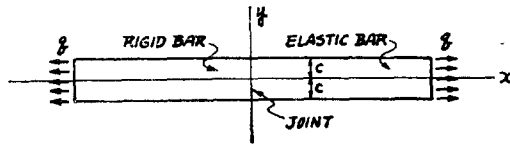


Fig 1. Geometry and loading

2. 理論的 解析

彈性板에 대하여 座標軸 x, y 를 Fig. 1 에 보인 것과 같이 擇하고, x -軸에 關한 對稱性を 考慮하여 $a_n =$

$\frac{n\pi}{2c}$ 로 놓고 應力函數를

$$\phi = \sum_{n=1}^{\infty} \cos a_n y \cdot f_n(x)$$

의 形式으로 假定하면, $\nabla^4 \phi = 0$ 으로부터 $f_n(x)$ 가 決定되어 應力函數는 다음 꼴로 된다[2].

$$\phi = \sum_{n=1}^{\infty} \cos a_n y [A_n \cosh a_n x + B_n \sinh a_n x + C_n x \cosh a_n x + D_n x \sinh a_n x] \tag{1}$$

이에 對應되는 應力成分과 變位成分들은 다음과 같다.

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \sum_{n=1}^{\infty} -a_n \cos a_n y [A_n a_n \cosh a_n x + B_n a_n \sinh a_n x + C_n a_n x \cosh a_n x + D_n a_n x \sinh a_n x] \\ \sigma_y &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos a_n y [A_n a_n \cosh a_n x + B_n a_n \sinh a_n x + C_n (2 \sinh a_n x + a_n x \cosh a_n x) \\ &\quad + D_n (2 \cosh a_n x + a_n x \sinh a_n x)] \\ \tau_{xy} &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin a_n y [A_n a_n \sinh a_n x + B_n a_n \cosh a_n x + C_n (\cosh a_n x + a_n x \sinh a_n x) \\ &\quad + D_n (\sinh a_n x + a_n x \cosh a_n x)] \end{aligned} \right\} \tag{2}$$

$$\left. \begin{aligned} u &= \frac{1}{E} \int (\sigma_x - \mu \sigma_y) dx + g(y) \\ &= \frac{1}{E} \sum_{n=1}^{\infty} -\cos a_n y \{ (1 + \mu) [A_n a_n \sinh a_n x + B_n a_n \cosh a_n x + C_n (a_n x \sinh a_n x - \cosh a_n x) \\ &\quad + D_n (a_n x \cosh a_n x - \sinh a_n x)] + 2\mu (C_n \cosh a_n x + D_n \sinh a_n x) \} + g(y) \\ v &= \frac{1}{E} \int (\sigma_y - \mu \sigma_x) dy + h(x) \\ &= \frac{1}{E} \sum_{n=1}^{\infty} \sin a_n y \{ (1 + \mu) [A_n a_n \cosh a_n x + B_n a_n \sinh a_n x + C_n a_n x \cosh a_n x \\ &\quad + D_n a_n x \sinh a_n x] + 2(C_n \sinh a_n x + D_n \cosh a_n x) \} + h(x) \end{aligned} \right\} \tag{3}$$

式 (3)에서 $[u]_{y=\pm c} = 0, [v]_{y=0} = 0$ 으로 놓으면 $g(y) = 0, h(x) = 0$ 을 얻는다.

다음에 境界條件과 變形條件을 利用하여 式 (2)와 (3)속의 常數들을 決定한다.

結合境界面이 應力分布에 미치는 攪亂效果가 $x \leq l$ 인 區域안에 局限된다고 하면 $x \geq l$ 에서는 $\sigma_x = q, \sigma_y = 0, \tau_{xy} = 0$ 일 것이므로, 이들 條件을 使用하면 다음 式들이 얻어진다. 즉, $[\sigma_x]_{x=l} = q$ 로부터

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} -a_n \cos a_n y [A_n a_n \cosh a_n l + B_n a_n \sinh a_n l + C_n a_n l \cosh a_n l + D_n a_n l \sinh a_n l] \\ = q = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4q}{n\pi} \sin \frac{n\pi}{2} \cdot \cos a_n y \\ \therefore A_n a_n \cosh a_n l + B_n a_n \sinh a_n l + C_n a_n l \cosh a_n l + D_n a_n l \sinh a_n l = -\frac{8cq}{(n\pi)^2} \sin \frac{n\pi}{2} \end{aligned} \quad (a)$$

$[\sigma_y]_{x=l} = 0$ 으로부터

$$A_n a_n \cosh a_n l + B_n a_n \sinh a_n l + C_n (2 \sinh a_n l + a_n l \cosh a_n l) + D_n (2 \cosh a_n l + a_n l \sinh a_n l) = 0 \quad (b)$$

$[\tau_{xy}]_{x=l} = 0$ 으로부터

$$A_n a_n \sinh a_n l + B_n a_n \cosh a_n l + C_n (\cosh a_n l + a_n l \sinh a_n l) + D_n (\sinh a_n l + a_n l \cosh a_n l) = 0 \quad (c)$$

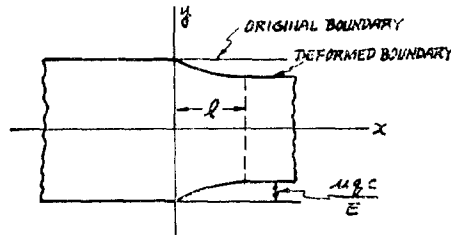


Fig. 2 Deformed boundary

結合面 近處의 變形後의 形狀은 Fig. 2 와 같을 것이며, $x \geq l$ 에서는 上下 境界面이 水平하게 될 것이므로,

$$\left[\frac{\partial v}{\partial x} \right]_{x=l} = 0 \text{ 으로부터 다음 式이 얻어진다.}$$

즉

$$\begin{aligned} \left[\frac{\partial v}{\partial x} \right]_{x=l} = \frac{1}{E} \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin a_n y \{ (1+\mu) [A_n a_n \sinh a_n l + B_n a_n \cosh a_n l + C_n (\cosh a_n l + a_n l \sinh a_n l) \\ + D_n (\sinh a_n l + a_n l \cosh a_n l)] + 2(C_n \cosh a_n l + D_n \sinh a_n l) \} = 0 \end{aligned}$$

을 얻는데, 式 (c)를 代入하면 다음 關係式이 얻어진다.

$$C_n \cosh a_n l + D_n \sinh a_n l = 0 \quad (d)$$

여기서 式 (a), (b), (c) 및 (d)를 聯立하여 풀면 常數들이 아직 未定인 길이 l 의 函數의 꼴로 다음과 같이 求해진다.

$$\begin{aligned} A_n a_n &= \theta (a_n l \sinh a_n l - 2 \cosh a_n l) \\ B_n a_n &= -\theta (a_n l \cosh a_n l - 2 \sinh a_n l) \\ C_n &= -\theta_1 (\sinh a_n l) \\ D_n &= \theta_2 (\cosh a_n l) \end{aligned} \quad (4)$$

여기서

$$\theta = -\frac{4cq}{(n\pi)^2} \sin \frac{n\pi}{2}$$

다음에 結合面에서의 拘束條件을 利用하면 길이 l 을 決定해 주는 다음 式이 얻어진다. 즉 式 (3)에 $[v]_{x=0}=0$ 이라는 條件을 使用하면

$$(1+\mu)A_n a_n + 2D_n = 0 \tag{e}$$

의 關係를 얻고, 여기에 式 (4)을 代入하면 다음 式을 얻게 된다.

$$(1+\mu)a_n l \sinh a_n l - 2\mu \cosh a_n l = 0$$

또는

$$\frac{(1+\mu) a_n l \tanh a_n l - 2\mu}{\sqrt{1-\tanh^2 a_n l}} = 0 \tag{5}$$

式 (5)로부터 l 을 決定하여 式 (4)에 代入하면 常數 $A_n, B_n, C_n,$ 및 D_n 이 決定되고, 이 값들을 式 (2) 및 (3)에 代入하면 應力分布와 變位成分들이 決定된다.

3. 數值計算

Poisson 比 μ 가 0, 0.1, 0.2, 0.3, 0.35, 0.4, 0.45, 및 0.5인 8가지 경우에 대하여 式 (5)로부터 $a_n l$ 을 決定하고, 그 값들을 式 (4)에 代入함으로써 $A_n a_n / \theta, B_n a_n / \theta, C_n / \theta,$ 및 D_n / θ 를 決定하여 다음 表와 같은 값들을 얻었다. Fig. 3은 이들 값이 μ 에 따라 變化하는 모양을 曲線으로 나타낸 것이다.

Table 1. Values of $a_n l$ and constants.

μ	$a_n l$	$A_n a_n / \theta$	$B_n a_n / \theta$	C_n / θ	D_n / θ
0	0	-2.00000	0	0	1.00000
0.1	0.440	-1.99683	0.42540	-0.45434	1.09837
0.2	0.611	-1.98909	0.57082	-0.64973	1.19254
0.3	0.736	-1.97466	0.66403	-0.80427	1.28330
0.35	0.789	-1.96633	0.69931	-0.87345	1.32774
0.4	0.836	-1.95736	0.72813	-0.93684	1.37028
0.45	0.879	-1.94762	0.75229	-0.99665	1.41184
0.5	0.919	-1.93714	0.77269	-1.05393	1.45285

다음에 이들 값을 式 (2) 및 (3)에 넣어 應力成分들과 變位成分들을 計算하였다. 이 計算은 一般的으로 Fig. 4에 보인 30個點에 對하여 實施하였으나 $a_n x$ 가 $a_n l$ 보다 커지는 點에 대해서는 $a_n x = a_n l$ 일 때의 값으로 取하였으며, 無限級數의 和을 求하는 過程에서도 $a_n x$ 가 $a_n l$ 을 넘을 때에는 $a_n x = a_n l$ 로 놓고 計算하였다. 또 한, 이 計算에서는 各點에서의 應力成分과 變位成分을 無次元化한 $\sigma_x/q, \sigma_y/q, \tau_{xy}/q, (E/qc)u,$ 및 $(E/qc)v$ 를 求하였다.

Fig. 5는 위에 말한 8가지 중의 6가지 경우의 應力分布 曲線들이고, Fig. 6은 8가지 경우의 變位成分들을 나타내는 曲線들이다.

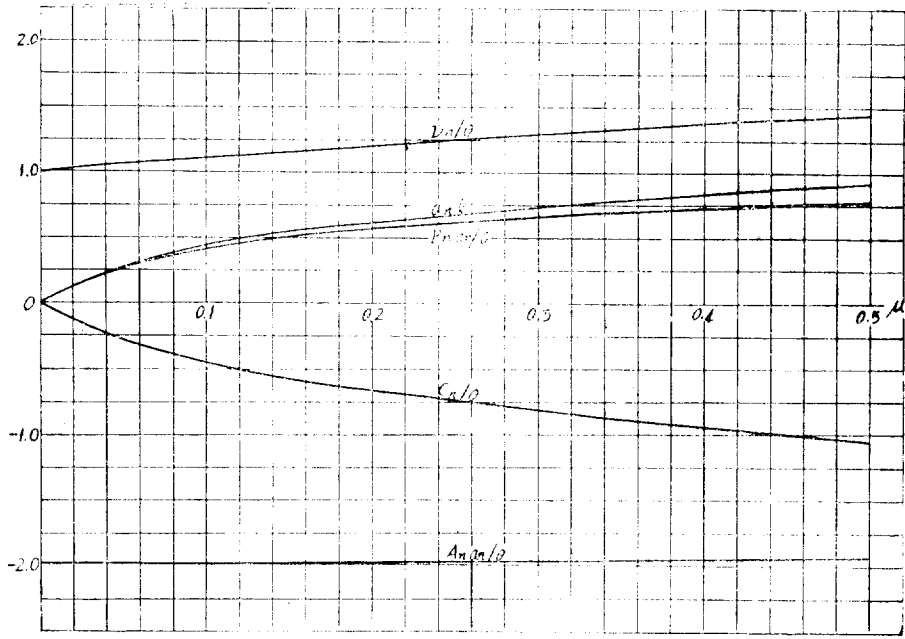


Fig. 3 $a_n l$, $A_n a_n/\theta$, $B_n a_n/\theta$, C_n/θ , and D_n/θ vs μ

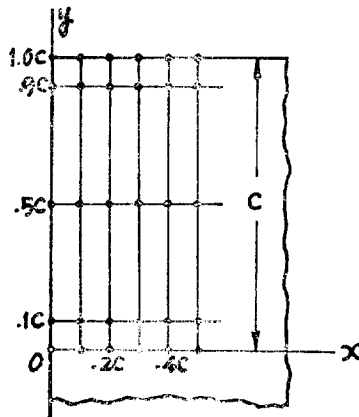


Fig. 4 Points where the stresses are obtained

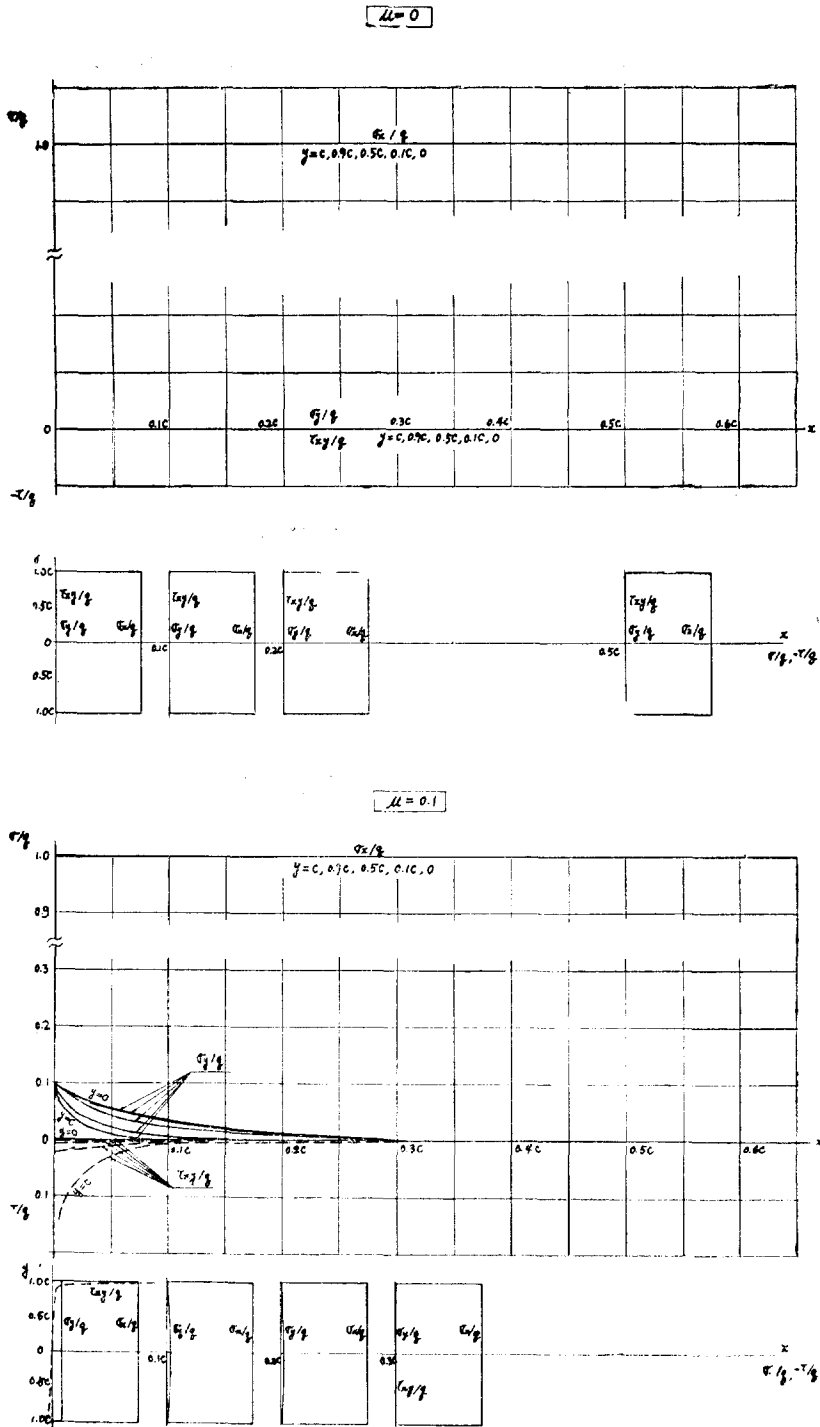
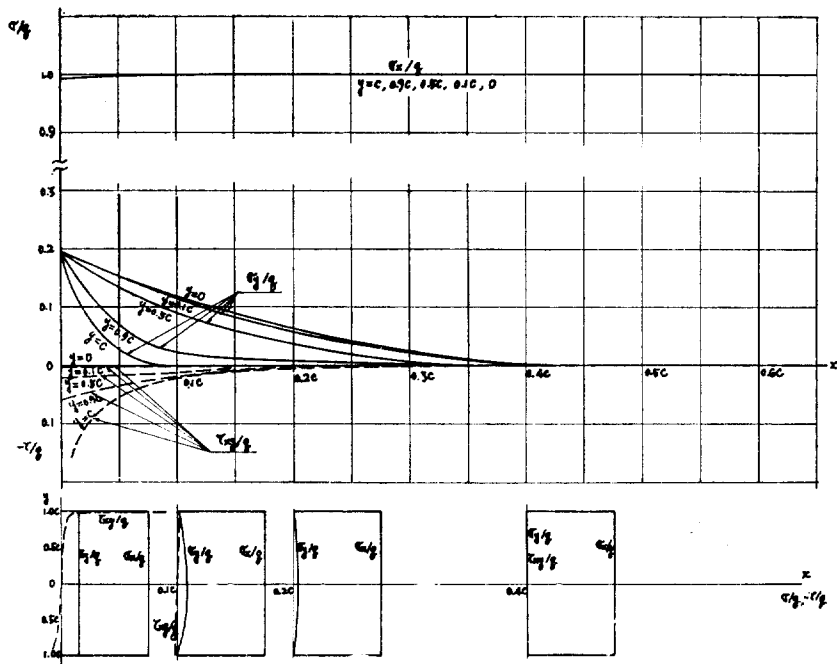


Fig. 5-1 σ_x/q , σ_y/q , and τ_{xy}/q vs x and y

$\mu = 0.2$



$\mu = 0.3$

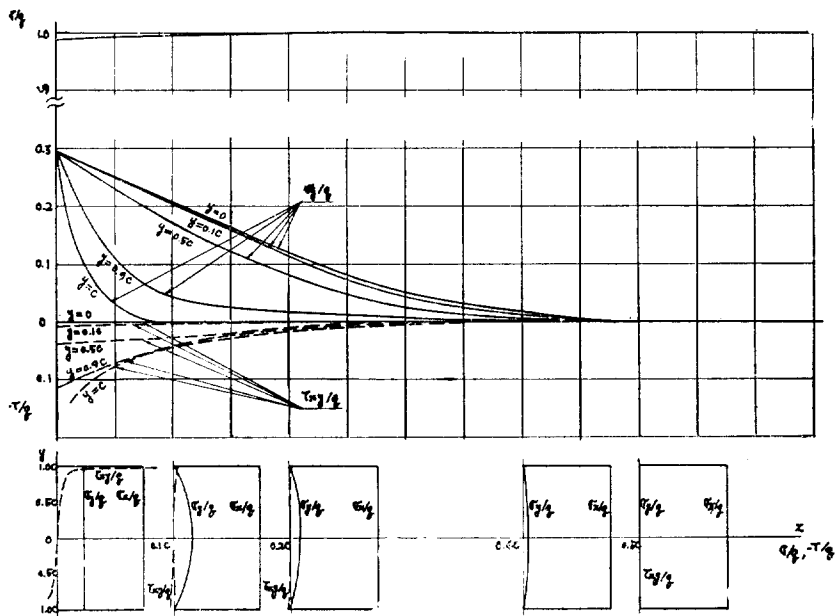


Fig. 5-2 σ_x/q , σ_y/q , and τ_{xy}/q vs x and y

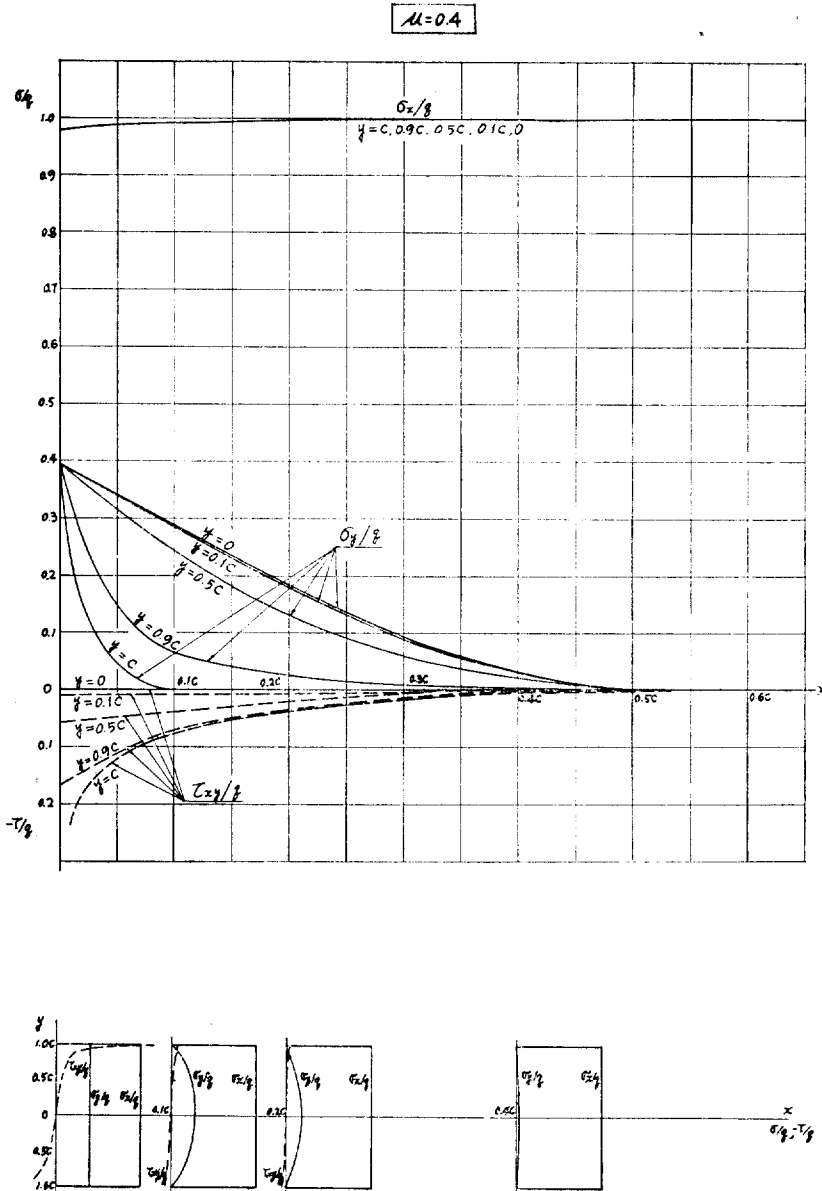


Fig. 5-3 σ_x/q , σ_y/q , and τ_{xy}/q vs x and y

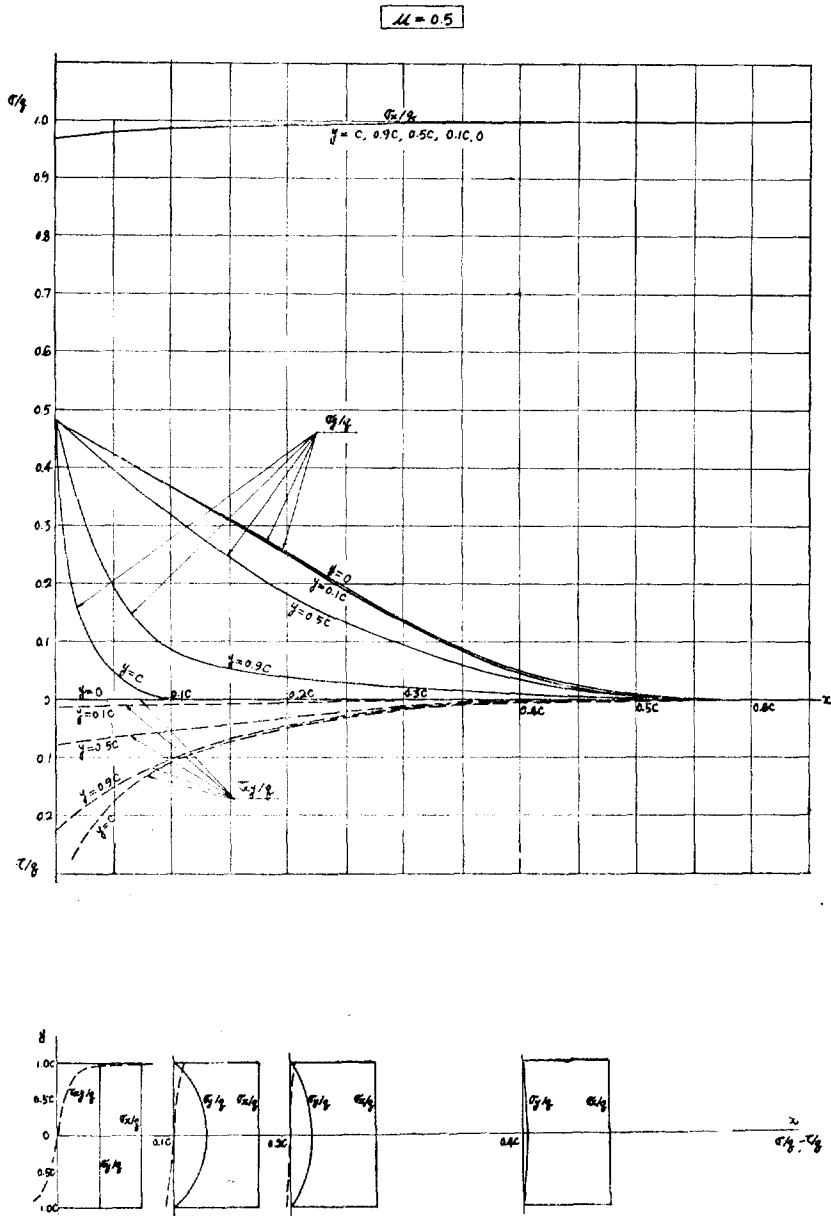


Fig. 5-4 σ_x/q , σ_y/q , and τ_{xy}/q vs x and y

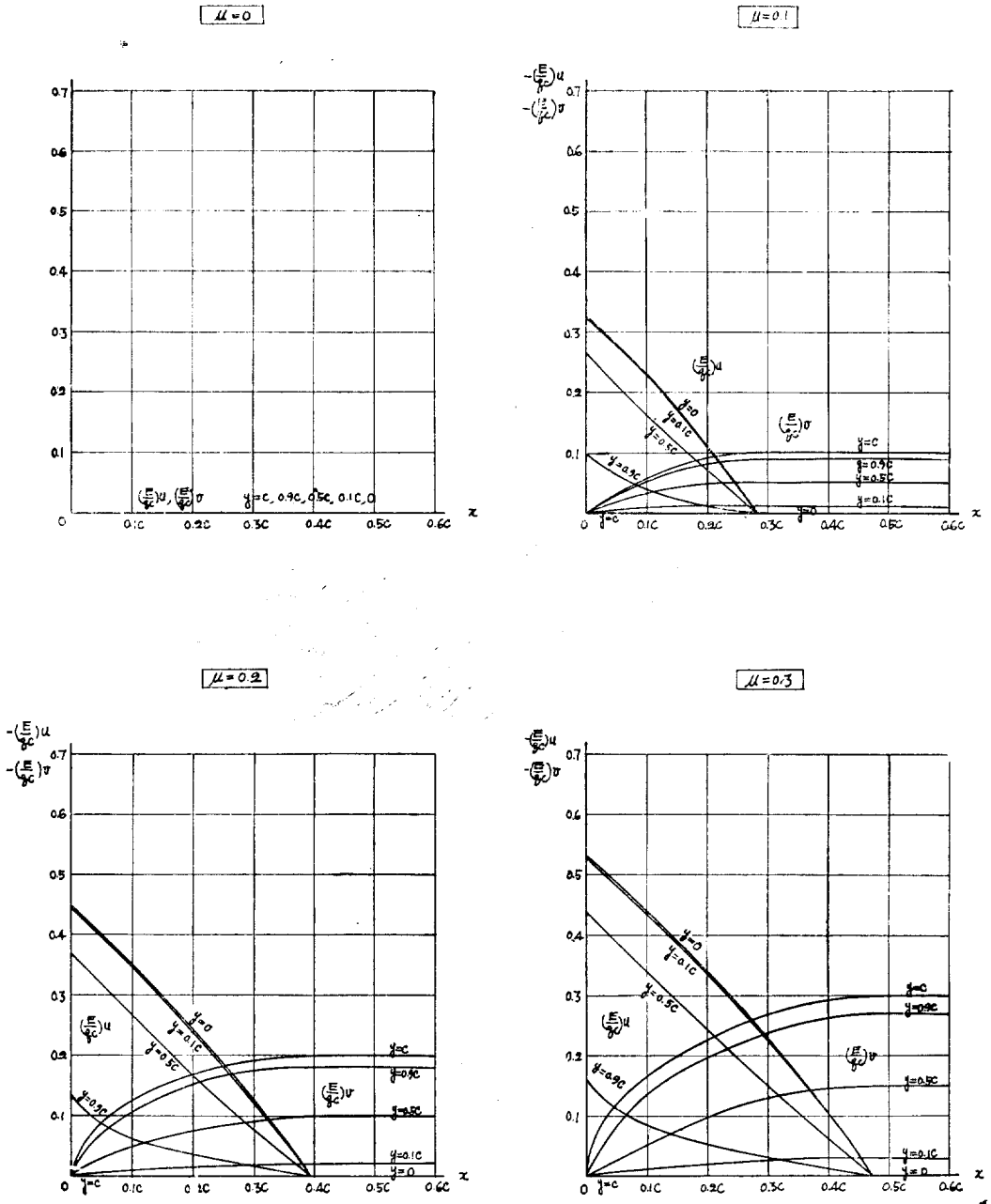


Fig. 6-1 $(\frac{E}{qc})u$ and $(\frac{E}{qc})v$ vs x and y

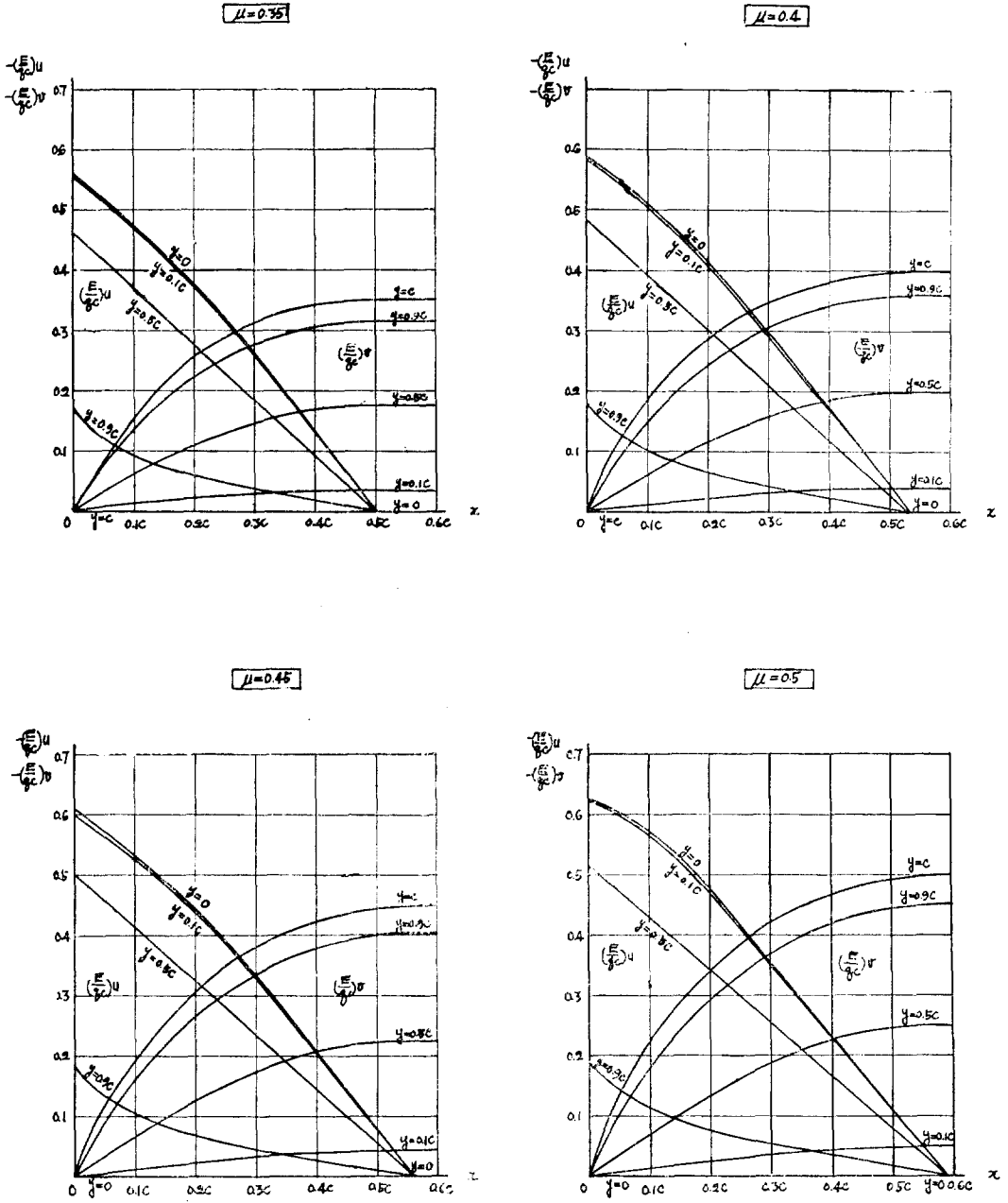


Fig. 6-2 $(E/qc)u$ and $(E/qc)v$ vs x and y

[-v]

		x=0	x=0.1c	x=0.2c	x=0.3c	x=0.4c	x=0.5c	x=0.6c	x=0.7c	x=0.8c	x=0.9c	x=1.0c
y=0	理論值	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
	實驗值	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
y=0.5c	理論值	0.0	0.064	0.109	0.148	0.172	0.180	0.180	0.180	0.180	0.180	0.180
	實驗值	0.0	0.050	0.099	0.120	0.160	0.180	0.200	0.203	0.204	0.204	0.204
y=1.0c	理論值	0.0	0.157	0.263	0.331	0.352	0.360	0.360	0.360	0.360	0.360	0.360
	實驗值	0.0	0.120	0.241	0.311	0.351	0.380	0.403	0.445	0.475	0.485	0.485

이 表에 의하면 v의 값은 理論值와 實驗值가 比較的 一致하고 있으나 u의 값은 그들 사이에 相當한 不一致가 나타나고 있다.

5. 考 察

理論解를 求하는 過程에서 結合面에서의 拘束條件으로서 $[u]_{x=0}=0$ 과 $[v]_{x=0}=0$ 의 두가지를 생각해야 하는데, 그 두 條件을 同時에 滿足시키자면 $l=\infty$ 가 要求되므로 이 方法으로는 嚴密解를 얻을 수 없게 된다. 그러므로 여기서는 近似解를 얻기 위한 한 方法으로서 後者の 條件만을 考慮하였으며, 그 結果로서 v에 對해서는 理論值와 實驗值 사이에 滿足스러운 一致를 얻었으나, u에 있어서는 實驗值가 理論值보다 相當히 낮게 나타났으며, 特히 結合面近處에서 그런 傾向이 顯著하다. 이와 같은 差異는 大體로 理論解에서 얻은 σ_y 가 實際값 보다 작거나 σ_x 가 實驗값 보다 커지는 結果라고 볼 수 있으나, v의 값이 比較的 잘 맞는 事實로 미루어 結合面に 極히 가까운 곳을 除外하면 그 差異는 그리 크지 않을 것으로 생각된다. 또한, 이 實驗은 彈性係數가 대단히 작은 경우에 대한 것이며, 大部分의 工業材料에서는 變形量이 작을 것이므로 그 差異도 줄어들 것이다.

이 近似理論解로부터 얻어지는 應力分布狀態와 變形後의 形狀은 力學上으로 合理的이나, 다만 結合面の 上下外側點($x=0, y=\pm c$)에서 $\tau_{xy}=-\infty$ 가 나타나는 것은 事實上 그 點에 대단히 큰 應力集中現象이 있다는 것을 뜻하며, 同一材料로 된 部材의 段部에서 볼 수 있는 現象과 同一하다[3][4]. 따라서 그런 位置에는 適當한 補強이 이루어져야 할 것이다.

Poisson 比 μ 가 應力分布에 미치는 影響은 σ_x 에 對해서는 輕微하지만, σ_y 와 τ_{xy} 는 μ 의 增加에 따라 相當히 커지는 것으로 나타나고 있다. 極端의 경우로서 $\mu=0$ 인 경우에는 y 方向의 變形이 일어나지 않을 것이므로 σ_y 와 τ_{xy} 가 모두 0일 것이 分明하며 理論解에서도 $\sigma_y=\tau_{xy}=0$ 이 얻어진다. 한편 μ 의 값이 큰 材料에서는 y 方向의 收縮이 클 것이며, 그 結果로서 結合面 近處에서 上下境界線에 急한 撓曲이 나타날 것이며, 이에 따르는 τ_{xy} 와 σ_y 가 큰 값을 갖게 될것으로 期待되는데, 理論解에서도 그런 傾向이 뚜렷히 나타나고 있다.

結合面이 應力分布에 미치는 攪亂效果가 到達하는 距離는 嚴密하게는 無限大일 것이며, 이 近似 理論解로부터 얻는 그 距離는 $\mu=0.5$ 인 경우에도 0.6c를 넘지 않으나 實驗結果로서는 0.9~1.0c가 얻어지고 있다. 이런 差異는 역시 結合面에서 $u=0$ 이라는 條件이 滿足되지 못한다 基因하는 것으로 보인다.

6. 結 論

以上을 要約하여 다음과 같은 結論을 얻었다.

1. 이 近似理論解는 力學上으로 矛盾이 없는 應力分布狀態와 變形後의 形狀을 나타내고 있으나, 結論面에서의 두 拘束條件中 하나만을 取하였기 때문에 定量的으로 滿足스럽지는 못하다.
2. 結合面의 끝에는 대단히 큰 剪斷應力이 作用한다.
3. 結合面의 存在로 因한 應力分布의 攪亂效果의 波及範圍는 事實上: 棒의 幅의 半을 넘지 않는다.
4. Poisson 比가 커질 수록 結合面近處에서의 應力成分에 큰 變化가 일어나는데, σ_x 는 減少하고 σ_y 와 τ_{xy} 는 增加한다.

後 記

本 研究를 遂行함에 있어서 數值計算과 實驗을 도와준 金曉哲氏와 曲線作成을 맡아준 權寧中, 崔恒洵 兩氏에게 感謝한다.

參 考 文 獻

- [1] J. T. Frasier and Leif Rongved, "Force in the Plane of Two Joined Semi-Infinite Plates", Trans. ASME, Applied Mechanics, 1955.
- [2] S. Timoshenko and J. N. Goodier, *Theory of Elasticity*, McGraw Hill Book Co., Inc., New York, 1951.
- [3] D.S. Houghton and A. Rothwell, "The Analysis of Reinforced Circular and Elliptical cutouts under Various Loading Conditions", Coll. of Aero, Cranfield, England, Report No. 151, 1961.
- [4] 任尙鍊, "平板에 붙은 Stiffener 속에서의 剪斷應力의 分布", 大韓造船學會誌 第3卷 第1號, 1966.
- [5] S. M. Selby, *Standard Mathematical Tables*, 14th ed., The Chemical Rubber Co., Ohio, 1965.
- [6] M. Hetenyi, *Handbook of Experimental Stress Analysis*, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1954.