論 文
19~2~5

分布定數系統의 最適制御 必要條件[(1)]

Necessary Conditions of Optimal Distributed Parameter Control Systems

楊 慶 甲*
(Kyung Gap Yang)

(1) 이 논문은 1968. 11. 23. 第2次 學術硏究發表會에서 발표된 것을 보완한 것이다.

[ABSTRACT]

Necessary conditions of optimal distributed parameter control systems, Hamiltons canonical equations, weierstrass condition, transversality condition and boundary condition are obtained, when the control function is constrained and the performance index takes on the general form. Also it is concluded that the lumped parameter system is the special case of the distributed parameter system.

1. 序 論

1960年을 前後하여 自動制御分野에는 큰 變化를 가져왔다. 制御裝置가 複雜하고 非線型이며, 多入力, 多出力의 系統을 解析하고 設計하기에는 종래의 知識과 試行錯誤方法으로는 곤란하여진 것이다. 美國의 Bellman[1]과 소련의 Pontryagin[2]은 각각 dynamic Programming과 Maximum Principle을 내세웠으며, 自動制御界에 一大轉換點을 이룬 것이다. 이 方法들은 數學이라는 수단을 빌려서 自動制御系統解析에 확고한 기반을 세웠으며, 따라서 應用數學者는 새로운 分野를 開拓하게 되었고 自動制御工學者는 數學을 이용 하여 더욱 확고하고 깊은 硏究를 할 수 있게 되었다. 制御系統은 集中 定數系統과 分布定數系統으로 나눌 수 있다. 集中定數系統으로 나눌 수 있다. 集中定數系統은 誘導彈의 움직임이라던가 antenna dish의 回轉 같이 常微分方程式으로 표시된다. 反面 分布定數系統은 定數가 時間과 空間에 分布되어 있으며 그 動作特性은 偏微分方程式으로 표시된다. conveyor가 장치되어 있는 乾燥爐라 던가 reactor 등은 分布定數系統의 例이다. 最適制御理論에 대한 硏究는 최근 많은 발전을 보았으며 集中定數系統問題를 解析하는데에는 다음과 같은 몇가지 방법이 있다. 즉 Bellman의 dynamic programming은 Hamilton-Jacobi 方程式을 이루며, Pontryagin 의 最大原理는 Hamilton의 標準方程式을 이룬다. 여기에 특기 할 만한 사실은 Isaacs[3]가 발전시킨 differential games이다. 이것은 더욱 일반적인 制御問題를 다룬것이며 따라서 制御問題는 differential games의 한 특별한 경우 即 one player differential games라 할 수 있다. Kalman[4] Berkovitz[5] Troitskill[6] 등은 制御問題를 變分學을 利用하여 다루었다. 또한 functional analysis를 사용하여 制御問題를 다루는 경향도 요지음 증가하고 있다. 分布定數系統의 最適制御問題를 다루는 데에도 上記한 方法들의 一般化가 이루어지고 있으나 系統의 複雜性 그리고 基本的인 相違性等으로 一般化라는 것이 그리 용이한 일은 아닌 것이다. 分布定數系統의 理論的인 硏究는 여러사람들에 의하여 이루어져 왔다. 그 가운데 몇개를 들어보면 Wang과 Tung[7]은 dynamic programming을 利用하였으며 observability와 controllability를 포함하여 全般的인 問題를 다루었다. Butkovskii와 Lerner[8]는 Pontryagin의 最大原理와 흡사한 결과를 얻었으며 Lur'e[9]는 Mayer-Bolza型의 문제를 형성하여, 變分學을 이용해서 最適必要條件을 구하였다.

*正會員 : 陸軍士官學校 敎授部 電氣工學科

本 論文에서는 다음과 같은 假定下에 分布定數系統의 最適問題를 定義하고 解析하고자 한다.

1. 系統의 動作特性은 주어진 初期條件下에 境界條件 영향밑에서 時間과 더불어 변해나간다.
2. 系統의 特性은 주어진 偏微分方程式과 初期 및 境界條件으로 표시된다.
3. 雜音및 干涉은 없다.
4. 系統의 空間領域은 일정하다.
5. 制御函數는 系統의 物理的인 特性 및 設計上의 制約 때문에 제한을 받는다.

以上의 假定下에서 分布定數系統에 대한 一般化된 Pontryagin 의 最大原理 및 여러 必要條件을 얻고자 한다.[1]

2. 問題設定

分布定數系統의 最適制御問題란 集中定數系統이나 마찬가지로 系統의 動作特性이 어떤 動作基準에 가장 適合하도록 하는 制御函數를 選定하는 것이다. 系統의 動作特性은 다음과 같은 偏微分方程式으로 表示된다고 생각한다.

$$\frac{\partial x}{\partial t}=f(t,r,x,\partial x/\partial r\cdots,\partial^{\mu}x/\partial r^{\mu}\cdots,u) \tag{1}$$

$$\mu=1,\cdots\alpha$$

但 x는 n-벡터 (n개의 要素를 가진 벡터)이며 時間 t ($t\epsilon T, T=[t_0,t_1]$의 모든 瞬間 그리고 N次 空間 R의 各 位置 r에서의 系統의 特性을 나타내는 狀態變數(state variable)이며 u는 時間 t 및 空間 r의 函數인 m-벡터이며 系統을 調整하는 制御變數(control variable)이다.

系統의 狀態를 決定하는데 다음의 初期 및 境界條件이 주어진다.

$$x(t_0,r)=x^0(r) \tag{2}$$

$$B(t,r,x,\ \partial x/\partial r,\cdots,\ \partial^{p}x/\partial r^{p}\cdots,)=0 \tag{3}$$

$$r\epsilon S,\ p=1,\cdots,\ \alpha-1$$

但 S는 R의 境界이며 B는 N^1-벡터이다.

따라서 制御問題는 주어진 初期條件으로 부터 ($t=t_0$) 願하는 終期 狀態($t=t_1$) 까지 다음과 같은 動作指數(performance index) I를 最小 (最大 또는 最小는 符號의 差이므로 最大나 最小나 實際的인 差는 없으며 여기서는 便宜上 最小로 하였음)로 하는 制御函數 u를 求하는 것이다.

$$I=\int_R \phi(t,r,x^1,\ \partial^{\mu}x^1/\partial r^{\mu})dr+\int_{t_0}^{t_1}\int_R L(tr,x,\partial^{\mu}x/\partial r^{\mu},\ u)drdt \tag{4}$$

但 ϕ, L는 주어진 函數들 이며 r,x,u는 各各의 該當要素들의 벡터 表示이며, $x^1=x(t_1,r)$이다.

系統의 方程式 (1)은 새로운 x

$$\partial x_0(t,r)/\partial t=1$$

$$x_0(t_0,r)=x^0{}_0(r)=t \tag{5}$$

를 定義하면 다음과 같이 된다.

$$\frac{\partial x(t_1r)}{\partial t}=f(r,x,x,\mu,u) \tag{6}$$

$$x(t_0,r)=x^0(r)$$

$$B(r,x,x_{rp})=0, \qquad r\epsilon S$$

但 $x=(x_0,x_1,\cdots,\ r_n)$

$f=(f_0,f_1,\cdots,\ f_n)$

x_{r^μ}, x_{rp}는 各各 系統方程式 그리고 境界條件에 나타나는 r에 대한 모든 微係數를 表示한다.

制御變數 $u(t,r)$는 通常 다음과 같은 制約을 받는다.

$$|u_i(t_1r)|\leq 1, \qquad i=1,\cdots,m \tag{7}$$

또는

$$a_i\leq u_i(t,r)\leq b_i \tag{8}$$

$$(a_i,\ b_i\text{는 constant})$$

一般的으로

$$C_j(r,x,x_r{}^{\mu},u)\geq 0,\ \ j=1,\cdots,c \tag{9}$$

但 C_j는 連續的으로 微分可能하다. 萬若 $c>m$인 경우에는 最大限으로 C_j 가운데 m 個가 零이 되며 $C^{\alpha}{}_u$는 最大 rank 를 갖는다. $\alpha(\leq C)$는 等符號制約의 數이다.

3. 最適必要條件

必要條件定理

$u(t,r)$, $t\epsilon T, r\epsilon R$를 許容制御變數(admissible control variable)-印加된 制約條件을 滿足하며 狀態變數 $x(t,r)$를 $x(t_0,r)$에서 願하는 終期值에 이르도록 하는 $u(t,r)$ --라 하면 $u(t,r)$ 그리고 $x(t,r)$가 最適이 되기 위해서는 零이 아닌 連續 벡터 變數(補狀態變數)

$$p(t,r)=(p_o(t,r),\cdots,\ p_n(t,r))$$

와 c次의 連續벡터, 변수 $\pi(t,r)$가 存在하며 다음과 같은 條件들을 滿足한다.

條件 1: Hamilton 의 標準方程式

最適軌跡 x를 따라서

$$\frac{\partial x}{\partial t}=\frac{\partial H}{\partial p}$$

$$\frac{\partial p}{\partial t}=-\frac{\partial}{\partial x}(H+C^T\pi)$$

$$-\sum_{\mu=1}^{\alpha}\sum_{k=1}^{N}(-1)^{\mu}\frac{\partial^{\mu}}{\partial r_k^{\mu}}\left(\frac{\partial}{\partial x_{r_k^{\mu}}}(H+C^T\pi)\right) \tag{11}$$

但 $C=(C_1,\cdots,\ C_c)$

$(\cdot)^T$는 $(\cdot)$의 transpose

$$\frac{\partial H}{\partial u}+\left(\frac{\partial C}{\partial u}\right)^T\pi=0 \tag{12}$$

$$C_{\rho}^{T}\pi_{\rho}=0, \qquad \rho=1,\cdots,C \tag{13}$$

$$H=\sum_{i=1}^{n}f_ip_i+L \tag{14}$$

條件 2: Weierstras 條件

最適軌跡上의 모든 要素

$(x^*,p,u) \neq (x^*,p,u^*)$

에 대하여

$$N(x^*,p,u) \geq N(x^*,p,u^*) \tag{15}$$

但 $N=\int_R Hdr$, x^*,u^*는 最適 x,u

條件 3: 橫斷條件

時間 $t=t_1^*$에서

$$\int_R \phi_\sigma + Ht_{1\sigma_i} - \sum_{j=1}^{n} p'_j \times^1{}_{j_i\sigma})\, dr = 0 \tag{16}$$

但 $\sigma=\sigma_i(r)$, $i=1, \cdots, q$

條件 4: 境界條件

空間領域 R의 境界 S에서

$$\sum_{\rho=0}^{\alpha-1-b} \sum_{k=1}^{N} (-1)^\rho \frac{\partial^\rho}{\partial r^\rho{}_k}\left(\frac{\partial H}{\partial x^r{}_{k(\rho+1+b)}} + \frac{\partial C^T}{\partial x_{r_k(\rho+1+b)}}\pi\right)\cos$$

$$(\nu,r_k)=0 \tag{17}$$

$$b=0, \cdots, \alpha-1$$

但 $\cos(\nu,r_k)$는 境界 S의 外向 *normal*과 r_k의 正方向과의 角

註 1: 萬一 制御變數의 制約條件 C에 x 및 $x_{r\mu}$가 包含되지 않는 경우 即

$C_x=0$, $C_{x_{r\mu}}=0$ 이면

$$\frac{\partial p}{\partial t} = -\frac{\partial H}{\partial x} - \sum_{\mu=1}^{\alpha} \sum_{k=1}^{N} (-1)^\mu \partial/\partial r^\mu{}_k \left(\frac{\partial H}{\partial x^{r\mu}{}_k}\right) \tag{18}$$

이것은 制御變數에 制約條件이 없는 경우[10]와 같다.

註 2: 만일 x,p,H가 r의 函數가 아니면 Hamilton의 標準方程式은 다음과 같이 된다.

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p} \tag{19}$$

$$\frac{dp}{dt} = -\frac{\partial}{\partial x}(H + C^T\pi) \tag{20}$$

이것은 集中定數系統의 結果[5]와 같다.

註 3: 制御變數의 制約은 補狀態變數 p, 따라서 狀態變數 x 및 Hamiltonian H에 영향을 주나 H의 表現에는 아무런 變化가 없으므로 Weierstrass, 橫斷 條件등은 制約되지 않은 制御變數인 경우와 같은 形式을 갖는다.

4. 結　論

分布定數系統은 여러 工學分野에서 많이 찾아 볼 수 있으며 여기서는 最適制御問題에서 制御變數가 制約되어 있는 경우에 對하여 여러 必要條件들을 列擧하였다. 여기서 다룬 制御變數의 制約은 一般的인 것이며 또한 境界條件은 새로운 것이다.

參 考 文 獻

1. Bellman, R. "Dynamic Programming" Princeton University Press, Princeton, 1957.
2. Pontryagin, L.S.et al "Mathematical Theory of Optimal Processes" Interscience, New York, 1962.
3. Isaacs, R. "Differential Games" John Wiley, New York, 1965.
4. Kalman, R.E. "The Theory of Optimal Control and The Calculus of Variations" in Mathematical Optimization Techniques" Edited by Bellman, R., University of California Press, Los Angeles, 309—331, 1963.
5. Berkovitz, L.D. "Variational Methods in Problems of Control and Programming," J. Math, Annal Appl. 3: 145—169, 1961.
6. Troitskii, V.A. "On Variational Problems of Optimization of Control Processes," PMM 26: 35—49, 1962.
7. Wang, P.K.C. and Tung,F. "Optimum Control of Distributed Parameter Systems" ASME Trans. Ser. D 86: 67—79, 1964.
8. Betkovskii, A.B. and Lerner, A.Y. "The Optimum Control of Systems With Distributed Parameters," Automat. Remote Control 21:472—477, 1960.
9. Lur'e, K.A. "The Mayer Balza problem for Multiple Integrals and the Optimization of the Performance of System With Distributed Parameters," PMM 28:316—327, 1964.
10. Yang, K. "Optimization of a Class of Distributed, Parameter Control Systems" Ph. D. Dissertation, The Johns Hopkins University, May 1968.